Particules et Symétries: Partie II

P. Verdier , verdier@ipnl.in2p3.fr

Institut de Physique Nucléaire de Lyon

9 mars 2015

Outline

L'isospin fort

L'isospin fort est introduit en 1932 par Heisenberg qui remarque que le proton et le neutron sont équivalents par rapport à l'interaction forte : études des noyaux miroirs Li^7, Be^7 et ^{14}C, ^{14}N, ^{14}O.
Le proton et le neutron, dont les masses sont très proches (938,72 MeV et 939,565 MeV), sont une même manifestation d'un "nucléon" avec un nouveau nombre quantique, l'isospin fort : $I = 1/2$.

- Pour le proton : $I_z = +1/2$
- Pour le neutron : $I_z = -1/2$

$$|N> = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad et \qquad |p> = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \ |n> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut relier la charge électrique Q à I_z par la relation de Gell-Mann-Nishijima :

$$Q = I_z + \frac{B}{2}$$

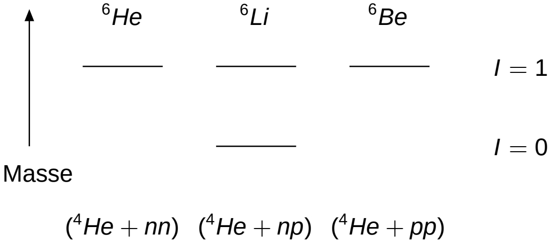
avec B qui est ici le nombre baryonique (B=1 pour le proton et le neutron)

Système de 2 nucléons

Considérons un système de 2 nucléons. On obtient un triplet et un singlet :

$$\begin{cases} |I=1,\ I_z=+1> &=& pp \\ |I=1,\ I_z=0> &=& \sqrt{\frac{1}{2}}(pn+np) \\ |I=1,\ I_z=-1> &=& nn \end{cases}$$

$$|I=0,\ I_z=0> \quad = \quad \sqrt{\frac{1}{2}}(pn-np)$$



Ces noyaux correspondent à un coeur ^4He avec $I=0$ plus un système à 2 nucléons

Force forte invariante sous transformation d'isospin $=$ indépendante de I_z dans le multiplet $I=1$

Système de 2 nucléons

On a donc les états à 2 nucléons suivant en fonction des états $|I, I_z>$:

$$\begin{cases} pp & = & |1,1> \\ pn & = & \sqrt{\frac{1}{2}}(|1,0> + |0,0>) \end{cases}$$

Considérons maintenant les réactions suivantes procédant par interaction forte.

$$\begin{cases} pp & \rightarrow & \pi^+ d \\ pn & \rightarrow & \pi^0 d \end{cases}$$

- Le deuton, d, est le noyau constitué d'un proton et d'un neutron d'isospin $I = 0$: $|d> = |00>$
- Les pions sont des mésons avec un isospin $I = 1$: $|\pi^+> = |11>$ et $|\pi^0> = |10>$

Si l'interaction forte est invariante par transformation d'isospin fort, et avec :

$$\sigma \sim |Amplitude|^2 \sim \sum_I |<I', I_z|A|I, I_z>|^2$$

L'états final $|\pi^+ d>$ est donc $|11>$ et le système $|\pi^0 d>$ est $|10>$.
On en déduite donc que :

$$\frac{\sigma(pp \rightarrow d\pi^+)}{\sigma(pn \rightarrow d\pi^0)} = \frac{1}{(1/\sqrt{2})^2} = 2$$

ce qui est vérifié expérimentalement.

Isospin et symétrie SU(2)

Le nucléon peut être vu comme une particule ayant un degré de liberté interne donnant 2 états permis, le proton et le neutron, qui se comportent de la même manière vis à vis de l'interaction forte. Nous avons donc une symétrie $SU(2)$ où (n, p) est la représentation fondamentale. Les générateurs d'isospin satisfont :

$$[I_j, I_k] = i\epsilon_{jkl} I_l$$

avec $\epsilon_{123,231,312} = 1$ et $\epsilon_{213,132,321} = -1$

Dans la représentation fondamentale, les générateurs d'isospin sont $I_i = \frac{1}{2}\tau_i$ avec :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

agissant sur les états proton et neutron :

$$|p >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |n >= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

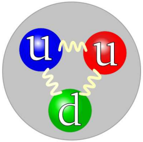
Plan

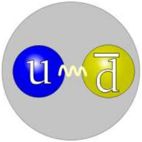
Le modèle des quarks

Le modèle des quarks a été développé par Murray Gell-Mann qui reçut le prix Nobel de de physique en 1969.

Les hadrons (mésons et baryons) ne sont pas des particules fondamentales : ils sont constitués de quarks de valence. Le modèle des quarks est donc un schéma de classification des hadrons en fonction des quarks de valence qui les constituent (quarks et anti-quarks).

$$|baryon>=|qqq> \quad \text{et} \quad |meson>=|q\bar{q}>$$





Plan

Le modèle des quarks : nombres quantiques

Les nombres quantiques des quarks sont :

- La charge électrique : $Q = 2/3$ (u,c,t) et $Q = -1/3$ (d,s,b)
- Le spin 1/2 : les quarks sont des fermions.
- Le nombre baryonique : $B = 1/3$ (baryon constitué de 3 quarks).
- La saveur : u (up), d(down), s(strange), c (charm), t (top), b (bottom).

Etrangeté :	$S_s = -1$,	$S_{\bar{s}}$=1	et	$S_q = 0$ pour $q = u, d, c, t, b$
Charme :	$C_c = 1$,	$C_{\bar{c}}$=-1	et	$C_q = 0$ pour $q = u, d, s, t, b$
Bottom :	$B_b = -1$,	$B_{\bar{b}}$=1	et	$B_q = 0$ pour $q = u, d, s, c, t$
Top :	$T_t = 1$,	$T_{\bar{t}}$=-1	et	$T_q = 0$ pour $q = u, d, s, c, b$

- L'hypercharge : $Y = B$ (Nombre baryonique) $+S + C + B + T$
- $I_z = 3$ ème composante de l'isospin qui est relié à la charge électrique par la formule de Gell-Mann Nishijima :

$$Q = I_z + \frac{Y}{2}$$

Le modèle des quarks : nombres quantiques

	$d(\bar{d})$	$u(\bar{u})$	$s(\bar{s})$	$c(\bar{c})$	$b(\bar{b})$	$t(\bar{t})$
Q (Charge électrique)	$\mp\frac{1}{3}$	$\pm\frac{2}{3}$	$\mp\frac{1}{3}$	$\pm\frac{2}{3}$	$\mp\frac{1}{3}$	$\pm\frac{2}{3}$
B (Nombre baryonique)	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{3}$
I (Isospin)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
I_z (3ème composante Isospin	$\mp\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0	0	0	0
S (étrange)	0	0	∓ 1	0	0	0
C (charme)	0	0	0	± 1	0	0
B (bottom)	0	0	0	0	∓ 1	0
T (top)	0	0	0	0	0	± 1
Y (Hypercharge)	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{3}$	$\mp\frac{2}{3}$	$\pm\frac{4}{3}$	$\mp\frac{2}{3}$	$\pm\frac{4}{3}$

Plan

SU(2) d'isospin

Dans la limite d'une symétrie SU(2) parfaite d'isospin fort, l'interaction forte identique pour les nucléons (proton et neutron) et on aurait $m_{proton} = m_{neutron}$ (après correction de l'interaction EM).

Les mésons sont des états liés composés d'un quark et d'un anti-quark. En considérant, tout d'abord, 2 saveurs de quark, up (u) et down (d), on va pouvoir construire les pions. Pour cela on va à nouveau utiliser la représentation fondamentale de SU(2) pour ce doublet de spin 1/2 :

$$|u >= |1/2, +1/2 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |d >= |1/2, -1/2 >= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I_z = +1/2 \qquad I_z = -1/2$$

L'isodoublet $I = 1/2$ permet de représenter les quarks u et d dans la représentation 2 de SU(2) :

$$2 \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

SU(2) d'isospin

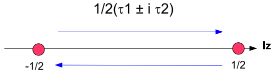
Les opérateurs $I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$ et I_3 permettent de classer un état à l'aide de leurs valeurs propres :

$$I^2|I, I_z >= I(I+1)|I, I_z > \quad , \; et \quad I_z|I, I_z >= I_z|I, I_z >$$

$$I_z u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}u \quad , \; et \quad I_z d = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}d$$

et les opérateurs $I_\pm = I_1 \pm i I_2$ permettent de transiter entre les états de même I^2 :

$$I_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \; et \quad I_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$I_+ u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad , \; et \quad I_- u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = d$$

$$I_+ d = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u \quad , \; et \quad I_- u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

L'opérateur de Casimir est celui qui commute avec tous les générateurs du groupe :

$$[I^2, I_j] = 0$$

SU(2) d'isospin

Pour la paire d'antiquark, on va définir la représentation conjuguée $\bar{2}$:

$$\bar{2} \quad \equiv \quad \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ u \end{pmatrix}$$

La modification du doublet d'anti-quark (signe et ordre du doublet) vient du fait que l'on veut que le doublet d'antiparticules se transforme exactement de la même manière que le doublet de particule. Si on introduit l'opérateur de conjugaison de charge, C, tel que :

$$Cu = \bar{u} \quad \text{et} \quad Cd = \bar{d}$$

et que l'on considère une rotation de π autour du 2ème axe dans l'espace de l'isospin :

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = e^{i\pi(\tau_2/2)} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = -i\tau_2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

En appliquant l'opérateur C à la formule précédente, il faut réordonner le doublet et un changement de signe pour que le doublet d'antiquarks se transforme de la même manière que le doublets de quarks :

$$\begin{pmatrix} -\bar{d}' \\ \bar{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$$

Les pions et SU(2)

En utilisant 2 quarks (u et d) et 2 antiquarks ($\bar{u}$ et $\bar{d}$), on obtient 1 triplet et un singlet :

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & \otimes & \bar{2} & = & 3 & \oplus & 1 \\ q & & \bar{q} & & \textit{triplet} & & \textit{singlet} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} |I = 1,\ I_z = +1 > & = & -u\bar{d} \\ |I = 1,\ I_z = 0 > & = & \sqrt{\frac{1}{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ |I = 1,\ I_z = -1 > & = & d\bar{u} \end{array} \right.$$

$$|I = 0,\ I_z = 0 > \quad = \quad \sqrt{\frac{1}{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$$

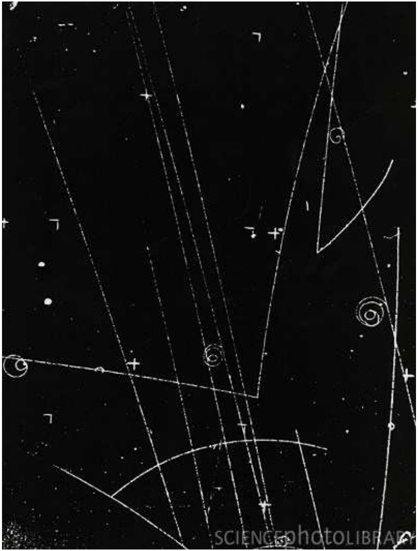
Les 3 états du triplet correspondent aux pions π^+,π^0 et π^-.

Plan

Observation des particules étranges

En 1947, les premères particules étranges sont observées dans le rayonnement cosmique. Ces particules ont une durée de vie beaucoup plus longue que l'échelle de temps des interactions fortes : particules étranges Σ, K, Λ

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0 \rightarrow (\pi^+ \pi^-) + (\pi^- + p)$$



Observation des particules étranges

Et à chaque fois qu'on produit un Σ ou un Λ, un kaon (K) est également présent.
Considérons les 2 interactions suivantes :

$$\begin{aligned} \pi^- + p &\rightarrow K^+ + \Sigma^- \qquad (1) \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^+ + \Sigma^- \qquad (2) \end{aligned}$$

Les sections efficaces devraient être proches, mais (2) n'est jamais observé.
Ceci conduit à l'introduction d'un nouveau nombre quantique, l'étrangeté S.

$$\begin{aligned} \pi,\ p,\ n &\ :\ S = 0 \\ K^+ &\ :\ S = 1 \\ \Sigma^-, \Lambda &\ :\ S = -1 \end{aligned}$$

De plus, la réaction : $\pi^- + p \rightarrow K^- + \Sigma^+$ (3) n'est jamais observée :
$\Longrightarrow$ Σ^+ n'est pas l'antiparticule de Σ^-

$$\Sigma^+ \ et\ \Sigma^- \quad : \quad S = -1$$

$\Longrightarrow$ Par contre, K^- est l'antiparticule de K^+
(2) et (3) ne sont pas observées car elles ne conservent pas S (interaction forte).

Dans les désintégrations $\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$ et $\Sigma^- \rightarrow n\pi^-$, l'étrangeté n'est pas conservée.
Mais ces désintégrations se font par interaction faible ce qui explique aussi que leur taux soient très faible ($\alpha_W \ll \alpha_S$).

Plan

SU(3) de saveur

En 1961, Murray Gell-Mann, suivi de peu par Yuval Ne'eman, propose un schéma de classification des hadrons baptisé la voie octuple ("Eightfold way") basé sur une symétrie SU(3) de saveur. A cette époque, les particules étranges ont été observées. Mais il faudra attendre 1968 pour que l'on découvre une sous-structure au proton dans les expériences de diffusion pronfondément inélastique à SLAC. En 1964, Gell-Mann et George Zweig proposent (indépendamment) le modèle des quarks :

- 2 quarks up et down qui portent la charge d'isospin
- 1 quark s qui porte l'étrangeté

Ceci conduit à une redéfinition de l'hypercharge et la modification de la formule de Gell-Mann Nishijima :

$$Y = B + S \quad , \, et \quad Q = I_z + \frac{B+S}{2}$$

avec B le nombre baryonique et S l'étrangeté.

Symétrie SU(3)

La représentation fondamentale de SU(3) est un triplet d'éléments (ici pour SU(3) de saveur) :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Les éléments du groupe agissant sur cette représentation sont des matrices 3×3
- On a 8 ($3^2 - 1$) générateurs $T_i = \lambda_i/2$ obéissant à l'algèbre de Lie :

$$[T_i, T_j] = \quad T_i T_j - T_j T_i = \quad 2if_{ijk} T_k$$

- avec, f_{ijk} coefficients antisymétriques par permutation de n'importe quelle paire d'indices :

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1 \\ f_{458} &= f_{678} = \sqrt{3}/2 \\ f_{147} &= f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = 1/2 \end{aligned}$$

Symétrie SU(3)

Représentation de Gell-Mann avec 8 matrices unitaires, où les matrices λ sont :

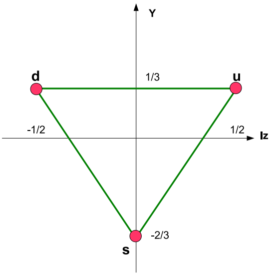
$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On va choisir 2 générateurs commutant parmi 8 :

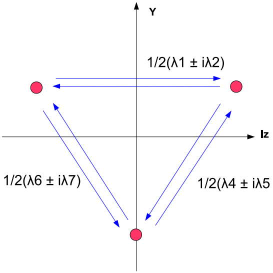
$$I_z \equiv 1/2\lambda_3 \quad \text{3eme composante de l'isospin}$$
$$Y \equiv 1/\sqrt{3}\lambda_8 \quad \text{hypercharge}$$



SU(3) de saveur

Les opérateurs permettant de transiter entre les états sont :

$$
\begin{aligned}
T_\pm &= \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2) \quad (u \leftrightarrow d) \\
V_\pm &= \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5) \quad (u \leftrightarrow s) \\
U_\pm &= \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7) \quad (d \leftrightarrow s)
\end{aligned}
$$



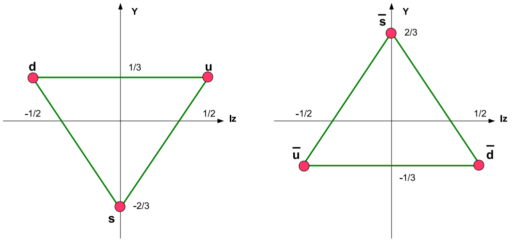
Et l'application de ces opérateurs donnent :

$$
\left\{\begin{array}{ll}
T_+ d = u & T_- u = d \\
V_+ s = u & V_- u = s \\
U_+ s = d & U_- d = s
\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{ll}
T_+ \bar{u} = -\bar{d} & T_- \bar{d} = -\bar{u} \\
V_+ \bar{u} = -\bar{s} & V_- \bar{s} = -\bar{u} \\
U_+ \bar{d} = -\bar{s} & U_- \bar{s} = -\bar{d}
\end{array}\right.
$$

les autres combinaisons donnant 0. On a également anticipé l'utilisation de la représentation $\bar{3}$ de SU(3) pour les antiquarks.

SU(3) de saveur

L'extension de la symétrie SU(2) avec 2 quarks (u et d) est donc SU(3) pour inclure le quark s. On va donc construire les mésons formés de 3 quarks et 3 anti-quarks en utilisant les représentations 3 et $\bar{3}$ de SU(3) :



$$\begin{array}{ccccccc} 3 & \otimes & \bar{3} & = & 8 & \oplus & 1 \\ q & & \bar{q} & & \textit{octet} & & \textit{singlet} \end{array}$$

On obtient donc 9 combinaisons possibles pour l'état $q\bar{q}$ avec 3 quarks u, d et s.

SU(3) de saveur : les mésons

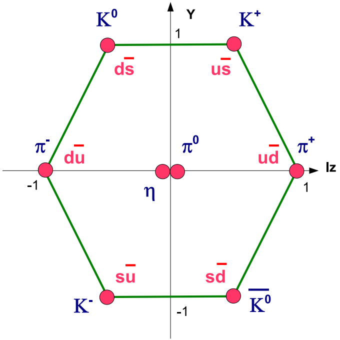
L'octet est donc constitué :

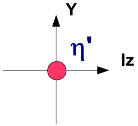
- d'un doublet de Kaon : $\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}$
- d'un doublet d'anti-Kaon : $\begin{pmatrix} -\bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix}$
- d'un triplet de pion : $\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$
- d'un singlet : le η

et on a un autre singlet : le η'

Les masses des mésons mesurées expérimentalement sont : $m_{K^\pm}$ =493.7 MeV et $m_{K^0} = m_{\bar{K}^0} =$ 497.7 MeV
La symétrie d'isospin est $\sim$ respectée

Par contre, la masse des Kaons est différentes de celles des pions, $m(\pi^0)$ =135 MeV et $m(\pi^\pm)$ =140 MeV : la symétrie SU(3) est brisée.
Résultat attendu du fait des différence de masse entre les quarks u, d et s.





SU(3) de saveur : les mésons

Revenons aux 3 mésons avec $Y = 0$ et $I_z = 0$:

$$\begin{cases} \pi^0 & = & \sqrt{\frac{1}{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \eta_8 & = & \sqrt{\frac{1}{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \\ \eta_1 & = & \sqrt{\frac{1}{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \end{cases}$$

- Expérimentalement, on observe 3 mésons légers avec $m \sim 140$ MeV : π^+, π^0, π^- On identifie donc la combinaison $\sqrt{1/2}(u\bar{u} - d\bar{d})$ au π^0, c'est à dire à la particule du triplet d'isospin qu'on aurait obtenu avec 2 quarks (u et d) et 2 antiquarks ($\bar{u}$ et $\bar{d}$) en combinant $2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1$.
- Pour le η_8, on prend la combinaison orthonormée et orthogonale au π^0 de l'octet : $< \pi^0|\eta_8 >= 0$ et $< \eta_8|\eta_8 >= 1$
- Pour le η_1 du singlet, on prend la combinaison orthogonale au π^0 et au η_8.

Dans la brisure de SU(3), le η_8 et le η_1 se mélangent pour former les particules observées expérimentalement : le η et le η'.

$$\begin{cases} \eta & = & \cos\theta\eta_8 - \sin\theta\eta_1 \\ \eta' & = & \sin\theta\eta_8 + \cos\theta\eta_1 \end{cases}$$

Pour $\theta = -10.1^\circ$, on trouve les bonnes masses :
$m_\eta =$547.3 MeV et $m_{\eta'} =$957.7 MeV.

Les différents mésons

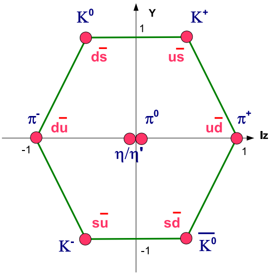
Comme tout système quantique de 2 états liés, les états $q\bar{q}'$ ont un spectre d'énergie correspondant aux différents modes d'excitation. Les quarks ayant un spin 1/2, les mésons peuvent avoir $S = 0$ ou $S = 1$. De plus, L est le moment orbital relatif du quark et de l'antiquark.
Pour les mésons la parité P et la conjugaison de charge C (attendre le prochain cours) :

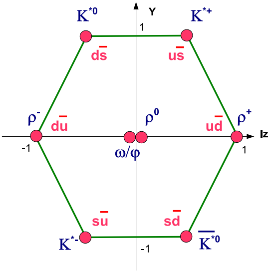
$$P = -(-1)^L \quad , \; et \quad C = (-1)^{L+S}$$

Notation spectroscopique : ${}^{2S+1}L_J$
Notation phys. part. : J^{PC}

Moment Orbital	Spin	J^{PC}	$I = 1$	$I = 1/2$	$I = 0$	Masses approx.
$L = 0$	$S = 0$	0^{-+}	π	K	η, η'	100-600 MeV
	$S = 1$	1^{--}	ρ	K^*	ω, ϕ	700-1000 MeV
$L = 1$	$S = 0$	1^{+-}	b_1	K_{1B}	$h_1(1170), h_1(1380)$	1100-1300 MeV
		2^{++}	a_2	K_2^*	$f_2(1270), f_2'(1525)$	1300-1500 MeV
	$S = 1$	1^{++}	a_1	K_{1A}	$f_1(1285), f_1(1420)$	1300-1400 MeV
		0^{++}	a_0	K_0^*	$f_0(1370), f_0(1710)$	1400-1700 MeV

Mésons pseudoscalaires et vecteurs





Les mésons pseudoscalaires : L=0, S=0, J=0, P=-1
Comme la symétrie SU(3) est une symétrie approximative, les états avec $I_z = 0$ et $Y = 0$ peuvent être un mélange des 2 états de l'octet et du singlet.

Les masses mesurées expérimentalement sont :

$\pi^\pm$	:	140 *MeV*	π^0	:	135 *MeV*
$K^\pm$	:	494 *MeV*	$K^0/\bar{K}^0$	:	498 *MeV*
η	:	549 *MeV*	η'	:	958 *MeV*

Les mésons vecteurs : L=0, S=1, J=0, P=-1
Dans ce cas, les mésons ρ^0,ω et ϕ sont des mélanges presque parfaits :

$$\begin{cases} \rho^0 & = & \sqrt{\frac{1}{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \omega & \approx & \sqrt{\frac{1}{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \\ \phi & \approx & s\bar{s} \end{cases}$$

Les masses mesurées expérimentalement sont :

$\rho^\pm$	:	770 *MeV*	ρ^0	:	770 *MeV*
$K^{*\pm}$	:	892 *MeV*	$K^{*0}/\bar{K}^{*0}$	:	896 *MeV*
ω	:	782 *MeV*	ϕ	:	1020 *MeV*

Plan

Les baryons

Les baryons sont des particules constituées de 3 quarks. On va considérer ici 3 saveurs de quarks u, d et s rangés dans la représentation 3 de SU(3) de saveur. Il nous faut donc commencer par combiner 2 quarks :

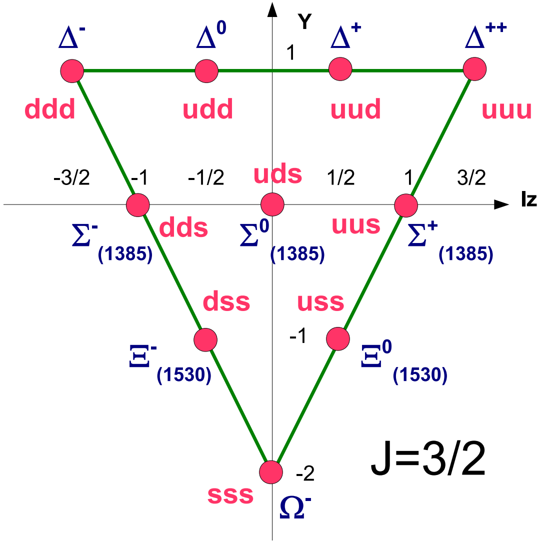
$$3 \quad \otimes \quad 3 \quad = \quad 6 \quad \oplus \quad \bar{3}$$

Et en rajoutant le 3ème quark, on obtient :

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \otimes 3) \oplus (\bar{3} \otimes 3) = 10_S \oplus 8_{M_S} \oplus 8_{M_A} \oplus 1_A$$

- Un décuplet totalement symétrique (S).
  Ex. : $\frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu)$
- Un octet mixte, symétrique sous l'échange des deux 1ers quarks (M_S).
  Ex. : $\frac{1}{\sqrt{6}}(2uud - udu - duu)$
- Un octet mixte, antisymétrique sous l'échange des deux 1ers quarks (M_A).
  Ex. : $\frac{1}{\sqrt{2}}(udu - duu)$
- Un singlet totalement antisymétrique (A).
  $\frac{1}{\sqrt{6}}(uds - usd + dsu - dus + sud - sdu)$

Le décuplet des baryons



$M(\Delta) = 1232$ MeV

$M(\Sigma) = 1318$ MeV

$M(\Xi) = 1530$ MeV

$M(\Omega) = 1672$ MeV

Le spin des baryons

Il nous faut maintenant traiter le spin de ces baryons formés de 3 quarks de spin 1/2 en utilisant exactement le même formalisme mathématique. En combinant tout d'abord 2 spins 1/2 :

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & \otimes & 2 & = & 3 & \oplus & 1 \\ q & & q & & \textit{triplet} & & \textit{singlet} \end{array}$$

On obtient un triplet et un singlet, comme lors de la combinaison $2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1$ (propriétés de SU(2) : la 2 est équivalente à la $\bar{2}$)
En rajoutant le 3ème quark de spin 1/2, on obtient :

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = (3 \oplus 1) \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2$$

Pour la partie spin de la fonction d'onde des baryons, on obtient donc :

$$\left.\begin{array}{lcl} |3/2, +3/2> & = & \uparrow\uparrow\uparrow \\ |3/2, +1/2> & = & \sqrt{\frac{1}{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow) \\ |3/2, -1/2> & = & \sqrt{\frac{1}{3}}(\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow) \\ |3/2, -3/2> & = & \downarrow\downarrow\downarrow \end{array}\right\} \quad S$$

$$\left.\begin{array}{lcl} |1/2, +1/2> & = & -\sqrt{\frac{1}{6}}(2\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\ |1/2, -1/2> & = & \sqrt{\frac{1}{6}}(2\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \end{array}\right\} \quad M_S$$

$$\left.\begin{array}{lcl} |1/2, +1/2> & = & \sqrt{\frac{1}{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\ |1/2, -1/2> & = & \sqrt{\frac{1}{2}}(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \end{array}\right\} \quad M_A$$

La fonction d'onde des baryons

Les baryons sont des fermions : la fonction d'onde doit donc être antisymétrique.
C'est le principe d'exclusion de Pauli.
La fonction d'onde des baryons peut être décomposée de la manière suivante :

$$\psi = \phi_{saveur} \chi_{spin} \xi_{couleur} \eta_{espace}$$

Pour les baryons avec un moment orbital $L = 0$:

- la fonction d'onde d'espace est symétrique : $(-1)^L$
- la fonction d'onde de couleur (attendre fin de ce cours) est antisymétrique
- donc, $\phi_{saveur} \chi_{spin}$ doit être symétrique

Pour remplir cette condition, il y a 2 possibilités :

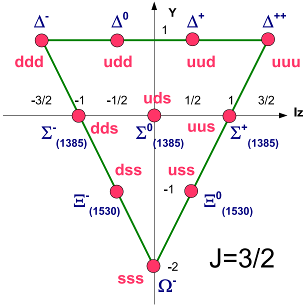
- utiliser les parties totalement symétriques $\phi(S)\chi(S)$. C'est le cas du décuplet de baryons qui ont donc forcément un spin 3/2.
- combiner $\phi(M_S)\chi(M_S)$ et $\phi(M_A)\chi(M_A)$. La combinaison suivante est en effet totalement symétrique :

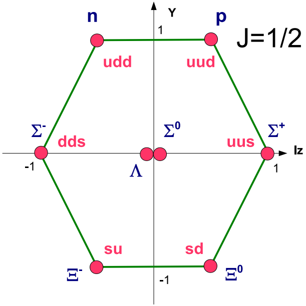
$$\sqrt{\frac{1}{2}}\phi(M_S)\chi(M_S) + \sqrt{\frac{1}{2}}\phi(M_A)\chi(M_A)$$

pour les échanges de quarks $1 \leftrightarrow 2$, $1 \leftrightarrow 3$ et $2 \leftrightarrow 3$

Le décuplet et l'octet des baryons

Pour $L = 0$, on a donc construit un décuplet et un octet de baryons correspondant aux baryons observés expérimentalement.





- $M(\Delta) =$1232 MeV
- $M(\Sigma) =$1318 MeV
- $M(\Xi) =$1530 MeV
- $M(\Omega) =$1672 MeV

- $M(p) =$938 MeV
- $M(\Sigma) =$1193 MeV
- $M(\Lambda) =$1116 MeV
- $M(\Xi) =$1318 MeV

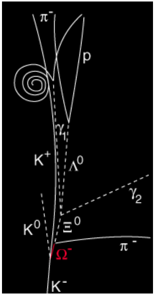
La fonction d'onde du proton et le Δ^{++}

Le proton est un baryon de spin 1/2 et d'isospin 1/2 dans l'octet des baryons.
La fonction d'onde du proton est donc :

$$|p\uparrow> = \frac{1}{6\sqrt{2}}(2uud - udu - duu)(2\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + \frac{3}{2\sqrt{2}}(udu - duu)(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)$$

$$\begin{aligned} |p\uparrow> = 1/\sqrt{18}(\quad & 2u\uparrow u\uparrow d\downarrow - u\uparrow u\downarrow d\uparrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow \quad + \\ & 2u\uparrow d\downarrow u\uparrow - u\uparrow d\uparrow u\downarrow - u\downarrow d\uparrow u\uparrow \quad + \\ & 2d\downarrow u\uparrow u\uparrow - d\uparrow u\downarrow u\uparrow - d\uparrow u\uparrow u\uparrow \quad) \end{aligned}$$

Le Ω^- est un baryon composé de 3 quarks s. Sa découverte en 1964 à Brookhaven, après sa prédiction par Gell-Mann et Ne'eman, a fortement contribué au succès du modèle des quarks.



Le Δ^{++} est un baryon composé de 3 quarks up connu depuis 1952 :
$|\Delta^{++}> = u\uparrow u\uparrow u\uparrow$

Ces 2 baryons avec 3 quarks identiques de même spin violent le principe d'exclusion de Pauli. Ceci conduit à définir un nouveau nombre quantique : la couleur.

Plan

SU(3) de couleur

SU(3) de couleur est une symétrie exacte (contrairement à SU(3) de saveur) :

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et chaque quark possède une charge de couleur. On a donc 3 couleurs pour les quarks (dans la représentation 3) et 3 anti-couleurs pour les anti-quarks (dans la $\bar{3}$). Et on postule que tous les hadrons sont "sans couleurs" : ils appartiennent à un singlet de SU(3) de couleur. Cette propriété est à la base du confinement des quarks dans les hadrons.

- Pour les baryons le singlet de couleur totalement antisymétrique est :

$$\sqrt{\frac{1}{6}}(RGB - RBG + BRG - BGR + GBR - GRB)$$

- Pour les mésons, le seul singlet invariant sous toutes les transformations de SU(3) est :

$$\sqrt{\frac{1}{3}}(R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B})$$

SU(3) de couleur

Quels types de hadrons peuvent être singlet de couleur ?

$$
\begin{array}{lcll}
q & : & 3 & \\
\bar{q} & : & \bar{3} & \\
q\bar{q} & : & 3 \otimes \bar{3} & = 1 \oplus 8 \\
qq & : & 3 \otimes 3 & = \bar{3} \oplus 6 \\
qq\bar{q} & : & 3 \otimes 3 \otimes \bar{3} & = 3 \oplus 3 \oplus \bar{6} \oplus 15 \\
qqq & : & 3 \otimes 3 \otimes 3 & = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \\
qqqq & : & 3 \otimes 3 \otimes 3 \otimes 3 & = 3 \oplus 3 \oplus 3 \oplus \bar{6} \oplus \bar{6} \oplus 15 \oplus 15 \oplus 15 \oplus 15
\end{array}
$$

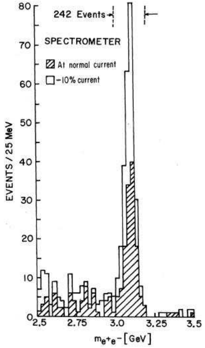
Les seuls hadrons possibles sont les mésons $q\bar{q}$ et les baryons qqq.

Question : pentaquark ?

Plan

Découvertes des quarks c, b et t

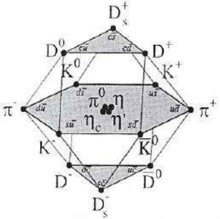
- En 1974, le J/ψ, état lié $c\bar{c}$, est découvert à Brookhaven et à Stanford.
  Sa masse vaut 3.1 GeV.
  Extension du modèle des quarks à 4 saveurs de quark avec SU(4) de saveur et $Y = N_B + S + C$
- Puis découverte du quark b en 1977 à Fermilab :
  SU(5) de saveur avec
  $Y = N_B + S + C + B$



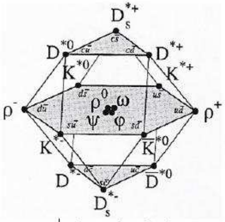
Du fait de la masse élevée des quarks c et b ($\sim$1.3 et $\sim$4.2 GeV), ces symétries SU(4) et SU(5) sont fortement brisées.

En 1995, découverte du 6ème quark, le quark top avec une masse de 173 GeV. Cependant, le quark top se désintègre en bW avant d'avoir le temps de s'hadroniser.

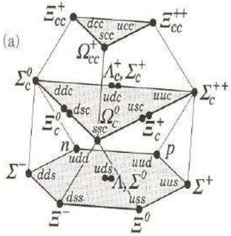
Découvertes des quarks c et b



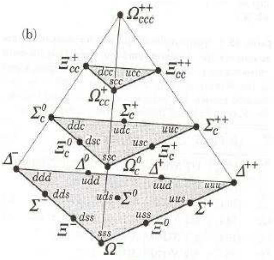
mésons de spin (moment cinétique total) 0



mésons de spin 1



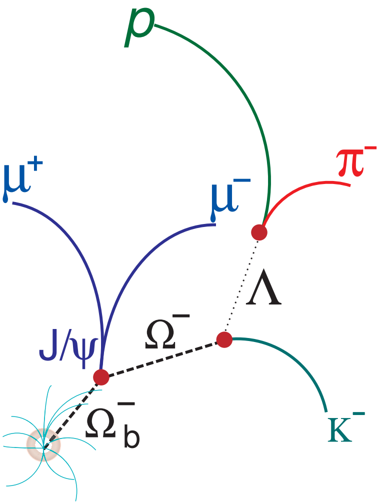
baryons de spin 1/2



baryons de spin 3/2

Encore des découvertes

En 2010 à Fermilab : $\Omega_b^- = bss$, $J^P = 1/2^+$, $M \simeq 6.17 GeV$



Plan

Loi de conservation

Supposons qu'un système soit invariant selon une transformation $\hat{U}$:

$$\psi \quad \rightarrow \quad \psi' = \hat{U}\psi$$

On doit avoir :

$$< \psi|\psi > = < \psi'|\psi' > = < \psi|\hat{U}^\dagger \hat{U}|\psi >$$

et donc, $\hat{U}^\dagger \hat{U}$=1 : $\hat{U}$ doit être unitaire.

Pour que les lois de physique restent inchangées sous cette transformation :

$$< \psi|\hat{H}|\psi > = < \psi'|\hat{H}|\psi' > = < \psi|\hat{U}^\dagger \hat{H}\hat{U}|\psi >$$

On a $\hat{U}^\dagger \hat{H}\hat{U} = \hat{H}$. En multipliant par $\hat{U}$, on obtient, $\hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{H}$ et donc :

$$[\hat{H}, \hat{U}] \quad = \quad 0$$

$\hat{U}$ commute avec le hamiltonien.

Symétrie d'isospin et masse

Si l'isospin était une symétrie parfaite, on devrait avoir :

$$[\hat{H}, \hat{I}] = 0$$

Considérons maintenant un quark isolé. La masse du quark au repos est :

$$< q|H_0|q >= m_q$$

Et effectuons une rotation d'angle ϵ dans l'espace d'isospin :

$$\begin{aligned}
|q' >= U|q > &\sim (1 - i\hat{I} \cdot \hat{n}\epsilon)|q > \\
< q'|H|q' > &\sim < q|(1 + i\hat{I} \cdot \hat{n}\epsilon)H(1 - i\hat{I} \cdot \hat{n}\epsilon)|q > \\
(1 + x)H(1 - x) &= H + xH - Hx + O(x^2) \\
< q'|H|q' > &= < q|H|q > + < q|[H, I]|q > +O(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

Et donc, si $[H_0, I] = 0$, on en déduit que :

$$< q'|H_0|q' >= m_{q'} =< q|H_0|q >= m_q$$

De la même manière, on montre que pour un système composé de quarks au repos, $H = H_0$ fournit le terme de masse du système, et que tout les hadrons du même multiplet d'isospin ont la même masse. Par exemple, on prédit ainsi que :

$$m_{\pi^+} = m_{\pi^0} = m_{\pi^-}$$

Brisure de la symétrie d'isospin

Considérons maintenant l'opérateur de charge électrique Q tel que :

$$Q|\pi^+>=+1|\pi^+> \quad Q|\pi^0>=0|\pi^0> \quad Q|\pi^->=-1|\pi^->$$

ce qui revient à dire que $[Q,I]\neq 0$. Donc si un Hamiltonien contient la charge électrique, il ne sera sans doute pas invariant sous les transformations d'isospin. Exemple avec $H_{EM}\propto Q_1Q_2$:

$$\begin{aligned} H &= H_{forte}+H_{EM} \\ [H,I] &= [H_{forte},I]+[H_{EM},I] \end{aligned}$$

Le terme $[H_{EM},I]\neq 0$: la symétrie d'isospin est brisée par l'interaction électromagnétique. Dans le cas des pions :

$$m_{\pi^+}=m_{\pi^+}=139.6\,MeV, \quad m_{\pi^0}=135.0\,MeV, \quad m_{\pi^\pm}-m_{\pi^0}=4.6\,MeV$$

Cette différence peut provenir de :

- La différence de masse entre le quark u et d : non !
- l'interaction électrostatique : $\propto Q_1Q_2/<r>$
- l'interaction magnétique : $\propto Q_1Q_2/m_1m_2$

Ces 2 dernières contributions peuvent être englobées dans un terme effectif $\propto Q_1Q_2$.

Plan

Moments magnétiques

Pour une particule de spin 1/2 de charge Q_i, et de masse m_i (e=1), le moment magnétique est :

$$\mu_i = \frac{Q_i}{2m_i}$$

Pour $L = 0$, le vecteur moment magnétique d'un hadron est la somme des vecteurs moments magnétiques des quarks qui le constituent :

$$\mu_H = \sum_i \mu_i (\sigma_3)_i$$

On peut donc écrire le moment magnétique du proton :

$$\begin{aligned}
\mu_p &= \sum_{i=1}^{3} < p \uparrow |\mu_i (\sigma_3)_i| p \uparrow > \\
&= 1/18\,\{4(2\mu_u - \mu_d) + (\mu_u - \mu_u + \mu_d) + (-\mu_u + \mu_u + \mu_d)\} \\
&= 1/3(4\mu_u - \mu_d)
\end{aligned}$$

De la même manière, on montre que :

$$\mu_n = 1/3(4\mu_d - \mu_u)$$

Avec $\mu_u = -2\mu_d$ ($m_u = m_d$), la prédiction du modèle des quarks est donc :

$$\mu_n/\mu_p = -2/3$$

Accord raisonable avec la mesure expérimentale de -0.684979...

Masse des hadrons

Revenons à la symétrie SU(4) de saveur avec 4 quarks u, d, s et c. Si cette symétrie était exacte, tous les hadrons d'un même multiplet devrait avoir la même masse. Or, ce n'est pas le cas. Exemple des mésons du multiplet 1^- :

$$\begin{array}{rclcrcl} m_\omega \approx m_\rho(u\bar{u}) & = & 0.78\ GeV & \quad & m_{D^*}(c\bar{u}) & = & 2.0\ GeV \\ m_\phi(d\bar{s}) & = & 1.02\ GeV & & m_{D_s}(c\bar{s}) & = & 2.7\ GeV \\ m_{K^*}(s\bar{u}) & = & 0.89\ GeV & & m_{J/\psi}(c\bar{c}) & = & 3.1\ GeV \end{array}$$

Les mésons d'un multiplet de SU(2) ont à peu près la même masse, mais on observe des différences de l'ordre de $\sim$ 100 MeV pour des mésons dans un même multiplet de SU(3) et de $\sim$ 1 GeV pour SU(4).

La masse d'un hadron ne peut être simplement la somme des quarks qui le constituent m_u et m_d valent quelques MeV et m_s environ 100 MeV. Le modèle des quarks se montrent cependant très prédictif pour déterminer des modes de désintégrations, des rapports de section efficace et pour calculer des différences de masse entre les hadrons.