Travaux dirigés de Méthodes Mathématiques

Automne 2010

Fiche 5 : Sturm–Liouville, etc.

Matrices symétriques et hermitiennes Diagonaliser

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

et retrouver le résultat par une rotation en partant de la diagonalisation de σ_z.
Diagonaliser

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} ,$$

en se ramenant au préalable par changement d'échelle à une matrice symétrique.

Polynômes de Legendre On considère l'équation différentielle

$$(1 - x^2)\, y''(x) - 2\,x\,y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 .$$

Montrer qu'elle est du type de Sturm–Liouville.
Montrer qu'on peut chercher des solutions paires ou impaires.
On cherche une solution paire $y(x) = a_0 + \cdots + a_n\, x^{2\,n} + \cdots$. Établir une relation de récurrence entre les coefficients. Montrer qu'en général, le rayon de convergence de la série est 1, et que donc la fonction $y(x)$ risque d'avoir une singularité en $x = \pm 1$.
Montrer que pour $\lambda = 2\,n\,(2\,n + 1)$ on obtient une solution polynomiale.
Reprendre cette étude pour une solution impaire.

Potentiel de Pöschl–Teller On considère le potentiel

$$U(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)} ,$$

et l'équation de Schrödinger associée.

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\varphi''(x) - \frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}\,\varphi(x) = E\,\varphi(x) .$$

Tracer l'allure de ce potentiel.
Montrer qu'on peut sans perte de généralité résoudre le problème quantique en étudiant l'équation

$$H_g(y(x)) \equiv -y''(x) - \frac{g(g+1)}{\cosh^2 x}\, y(x) = \lambda\, y(x) .$$

Que peut-on dire de la parité des solutions ?

On introduit les opérateurs ($D = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$)

$$A_\pm(g) = \pm D + g\,\tanh(x)$$

Montrer que

$$A_+(g)\,A_-(g) = H_{g-1} + g^2\,, \quad A_-(g)\,A_+(g) = H_g + g^2$$

En déduire, par annulation de $A_+(g)$, une valeur propre et un état propre de H_g. Montrer que la structure nodale suggère un état fondamental.
Montrer que, si ϕ est état propre de H_g avec la valeur propre $\lambda(g)$, alors $A_-(g-1)\phi$ est soit nul soit vecteur propre de H_g avec la valeur propre $\lambda(g-1)$.
Récapituler le spectre de H_g.