# Mecanique Quantique:

FARIA
Jimmy:

exercice 4

Montrons que $Y_\ell^m(\theta, \varphi) \propto e^{im\varphi}$.

on sait que $Y_\ell^m$ est fonction propre de $L^2$ et $L_z$
on applique $L_z$ sur $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$

$$\langle \theta, \varphi | L_z | \ell m \rangle = m\hbar\, Y_\ell^m(\theta, \varphi) = i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_\ell^m(\theta, \varphi).$$

$$\Rightarrow \quad m\, Y_\ell^m(\theta, \varphi) = i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad Y_\ell^m(\theta, \varphi) = C_\ell(\theta)\, e^{im\varphi} \qquad \text{avec } -\ell < m < \ell.$$

Montrons pour $\ell > 0$ $Y_\ell^m(\theta, \varphi) \propto \cancel{e^{im\varphi}}$. $\sin^{|m|}\theta$

$$y = A\theta^n + B\theta^{n+1}$$

On raisonne par analogie avec l'equation radiale
car on sait que $-u'' + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u + r u = E u$
quand $r \to 0$
$u(r) \propto r^{\ell+1}$ $\cancel{f = g e^{im\varphi}}$ ou $u(r) \propto r^{-\ell}$, mais seul $r^{\ell+1}$ est acceptable

si $\theta \ll 1$

on a $\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\theta \frac{\partial f}{\partial\theta}\right) - \frac{m^2}{\theta^2} g$

$$\theta \frac{\partial y}{\partial\theta} = n A \theta^n + \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\theta \frac{\partial y}{\partial\theta}\right) = n^2 A \theta^{n-2}$$

$$n^2 A\theta^{n-2} - \frac{m^2}{\theta^2} A\theta^n + l(l+1) A\theta^2 = 0$$

$\Rightarrow$ $n^2 = m^2$ donc $n = |m|$ avec $l \leq n$ $\Rightarrow$ $l = |m|$.