FONTAINE
Jean-Philippe

TD3 : Relations 1

Exercice 5

On démontre la relation : $[L_a, x_b] = i\hbar \varepsilon_{abc} x_c$

Pour démontrer cette relation, il faut se rappeler la définition du symbole de Levi-Civita : $\varepsilon_{abc} = \begin{cases} 1 & \text{pour une permutation paire } (abc, cab, bca) \\ -1 & \text{——— impaire } (cba, bac, acb) \\ 0 & \text{si } a=b \text{ ou } a=c \text{ ou } b=c \text{ ou } a=b=c \end{cases}$

On sait que $\vec{L_a} = \vec{r_a} \wedge \vec{p_a}$

On a : $\vec{L} = \begin{pmatrix} L_a \\ L_b \\ L_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p_a \\ p_b \\ p_c \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x_b p_c - x_c p_b \\ x_c p_a - x_a p_c \\ x_a p_b - x_b p_a \end{pmatrix}$$

On a fait l'hypothèse que $\vec{L} = \begin{pmatrix} L_a \\ L_b \\ L_c \end{pmatrix}$ mais on aurait tout aussi bien pu choisir :

$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_b \\ L_a \\ L_c \end{pmatrix}$ ou $\vec{L} = \begin{pmatrix} L_a \\ L_a \\ L_c \end{pmatrix}$ cas que l'on traitera plus loin.

$$[L_a, x_b] = [x_b p_c - x_c p_b, x_b]$$
$$= -x_c [p_b, x_b] \quad \text{car } [AB, C] = A[B,C] + [A,C]B$$
$$= i\hbar x_c$$
$$= i\hbar \varepsilon_{abc} x_c \quad \text{pour } a,b,c \text{ permutation paire } (\varepsilon_{abc} = 1)$$

Si maintenant : $\vec{L} = \begin{pmatrix} L_b \\ L_a \\ L_c \end{pmatrix}$ alors :

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} x_b \\ x_a \\ x_c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p_b \\ p_a \\ p_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a p_c - x_c p_a \\ x_c p_b - x_b p_c \\ x_b p_a - x_a p_b \end{pmatrix}$$

Donc : $[L_a, x_b] = [x_c p_b - x_b p_c, x_b]$

$$= x_c [p_b, x_b] + [x_c, x_b] p_b - [x_b, x_b] p_c - x_b [p_c, x_b]$$

$$= x_c [p_b, x_b]$$ car les opérateurs de position commutent entre eux tout comme l'opérateur impulsion en une variable avec l'opérateur position en une variable différente.

Donc $[L_a, x_b] = -i\hbar x_c$

$= i\hbar \varepsilon_{abc} x_c$ pour une permutation impaire ($\varepsilon_{abc} = -1$)

Le dernier cas à traiter :

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_a \\ L_a \\ L_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_A \\ x_c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p_A \\ p_A \\ p_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A p_c - x_c p_A \\ x_c p_A - x_A p_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[L_a, x_b] = \frac{1}{2}\left[x_A p_c - x_c p_A + x_c p_A - x_A p_c \, , x_b\right]$$
$$= \frac{1}{2}[0, x_b]$$
$$= 0$$
$$= i\hbar \varepsilon_{abc} x_c \text{ pour le cas } a = b \ (\varepsilon_{abc} = 0).$$

Donc : $\boxed{[L_a, x_b] = i\hbar \varepsilon_{abc} x_c}$

On peut maintenant démontrer : $[L_a, p_b] = i\hbar \varepsilon_{abc} p_c$

* Cas de permutation paire : $a \to b \to c$

$$[L_a, p_b] = [x_b p_c - x_c p_b \, , p_b]$$
$$= [x_b, p_b] p_c$$
$$= i\hbar p_c$$
$$= i\hbar \varepsilon_{abc} p_c$$

* Cas de permutation impaire :

$$[L_a, p_b] = [x_c p_b - x_b p_c \, , p_b]$$
$$= -[x_b, p_b] p_c$$
$$= -i\hbar p_c$$
$$= i\hbar \varepsilon_{abc} p_c$$

* Cas d'égalité de composantes :

$$[L_a, p_b] = [0, p_b] = 0 = i\hbar \varepsilon_{abc} p_c$$

Donc : $\boxed{[L_a, p_b] = i\hbar \varepsilon_{abc} p_c}$

Un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\varepsilon_{abc}\,O_c$ est appelé opérateur vectoriel.

<u>NB</u> : pour se ramener à ce qui a été fait en TD, si l'on pose :

- $a = z = b$ à on trouve bien comme attendu : $[L_z, z] = [L_z, p_z] = 0$

Ceci est facilement vérifiable car $L_z = x p_y - y p_x$ donc :

. $[L_z, z] = [x p_y - y p_x, z] = 0$ car x, p_y, y, p_x commutent avec z.

- $a = z$ et $b = x$ alors comme ~~on a~~ une permutation circulaire paire $(z \to x \to y)$:

$[L_z, x] = i\hbar y$

En effet, on peut vérifier : $[L_z, x] = [x p_y - y p_x, x]$

$= -y\,[p_x, x]$

$= i\hbar y$

Exercice 6

On sait que l'opérateur L^2 a pour valeur propre : $l(l+1)\hbar^2$. Ici on se place dans le cas où $l = 1$ donc L^2 a pour valeur propre $2\hbar^2$.

Comme $l = 1$ et que l'on sait que le nombre quantique m_l (qui correspond à la projection de $\vec{L}$ sur un axe, classiquement Oz) est compris entre $-l$ et l ; on a donc : $m_l = [\![-1, 1]\!]$. Ici les $[\![\ ]\!]$ désignent un intervalle d'entiers relatifs (éléments de $\mathbb{Z}$).

Chaque m_l correspond à un vecteur propre ; il y a donc dans notre cas 3 vecteurs propres.

Cela signifie donc que la dimension totale de l'espace vectoriel est de 3 et que donc les matrices L_x, L_y, L_z cherchées sont de dimension $n^2 = 9$ (3×3).

La matrice la plus simple à trouver est L_z puisque l'on sait que :

$L_z |\varphi\rangle = m\hbar |\varphi\rangle$ si ce ket est normé

Ici $m = [-1, 1]$ donc on a 3 valeurs propres possibles : $+\hbar$, 0, $-\hbar$.

Donc :

$$L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ dans la base des vecteurs propres.

Pour trouver les expressions de L_x et L_y, on introduit les opérateurs :

- $L_+ = L_x + iL_y$
- $L_- = L_x - iL_y$

On a : $L_x = \dfrac{L_+ + L_-}{2}$ et $L_y = \dfrac{L_+ - L_-}{2i}$

L'intérêt d'introduire ces 2 opérateurs est que nous connaissons leurs valeurs propres :

$L_+ |l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\ |l, m+1\rangle$

$L_- |l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\ |l, m-1\rangle$

L_+ et L_- se comportent comme des opérateurs d'incrémentation. Ils permettent de passer d'un état quantique donné à un état quantique d'énergie inférieur (par L_-) ou supérieur (par L_+).

On a :
$$L_+|1,1\rangle = 0 \times |1,2\rangle$$
$$L_+|1,0\rangle = \sqrt{2}\,\hbar\,|1,1\rangle$$
$$L_+|1,-1\rangle = \sqrt{2}\,\hbar\,|1,0\rangle$$
$$L_-|1,1\rangle = \sqrt{2}\,\hbar\,|1,0\rangle$$
$$L_-|1,0\rangle = \sqrt{2}\,\hbar\,|1,-1\rangle$$
$$L_-|1,-1\rangle = 0\ |1,-2\rangle$$

Les kets $|1,2\rangle$ et $|1,-2\rangle$ n'existent pas dans le système considéré ($l=1$) donc pour ne pas pouvoir incrémenter ou décrémenter à l'infini, on stipule que :

$L_+|l, m_{max}\rangle = L_-|l, m_{min}\rangle = 0$.

Donc on en déduit la représentation matricielle :

FONTAINE
Jean-Philippe

$$L_+ = \begin{array}{c|ccc} & |1,1\rangle & |1,0\rangle & |1,-1\rangle \\ \hline \langle 1,1| & 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \\ \langle 1,0| & 0 & 0 & \sqrt{2}\hbar \\ \langle 1,-1| & 0 & 0 & 0 \end{array} = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_- = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit alors les matrices de L_x et L_y car :

- $L_x = \dfrac{L_+ + L_-}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2}\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $L_y = \dfrac{\sqrt{2}\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Et : $L_x = \dfrac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}i} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>NB</u> : si l'on change de positions les vecteurs de la base, on aura des matrices pour chaque opérateur $\{L_x, L_y, L_z, L_+, L_-\}$ différentes.

En effet ; dans la base $\{|1,-1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle\}$:

$$L_z = \begin{array}{ccc} |1,-1\rangle & |1,0\rangle & |1,1\rangle \\ \end{array}$$
$$L_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\hbar & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_- = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}i} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

On considère les matrices dites de Pauli suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les matrices de Pauli sont utilisées pour exprimer les opérateurs de spin.

On a en effet : $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ pour un spin $\frac{1}{2}$, i.e le spin de l'électron ou de tout autre fermion (comme le neutrino).

D'où $S_1 = \frac{\hbar}{2}\sigma_1$, $S_2 = \frac{\hbar}{2}\sigma_2$, $S_3 = \frac{\hbar}{3}\sigma_3$.

On souhaite démontrer la relation : $\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i\,\varepsilon_{abc}\sigma_c$.

δ_{ab} est le symbole de Kronecker, c'est un tenseur d'ordre 2 vérifiant :

- si $a = b$, $\delta_{ab} = 1$
- si $a \neq b$, $\delta_{ab} = 0$

On rappelle que ε_{abc} est le symbole de Lévi-Civita : $\varepsilon_{abc} = \begin{cases} 1 \text{ si permutation paire} \\ 0 \text{ si égalité de 2 indices} \\ -1 \text{ si permutation impaire} \end{cases}$

Par conséquent on doit vérifier $\begin{cases} \sigma_a^2 = I_2 = \sigma_b^2 = \sigma_c^2. \\ \sigma_a \sigma_b = i\sigma_c \text{ si permutation paire} \\ \sigma_a \sigma_b = -i\sigma_c \text{ si permutation impaire} \end{cases}$

$$\sigma_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\sigma_a^2 = I_2 = \delta_{aa} + i\,\varepsilon_{aac}\sigma_c$

Pour démontrer que $\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i\,\varepsilon_{abc}\sigma_c$ on va considérer les produits matriciels suivants :

- $\sigma_1 \sigma_2$
- $\sigma_3 \sigma_1$

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3$$

Donc $\sigma_1\sigma_2 = \delta_{12} + i\,\varepsilon_{123}\sigma_3$

$$\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{i}\sigma_2 = -i\sigma_2$$

Donc : $\sigma_1\sigma_3 = \delta_{13} + i\,\varepsilon_{132}\sigma_2$

D'où $\boxed{\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i\,\varepsilon_{abc}\sigma_c}$

On a : $\vec{\sigma}\cdot\vec{A} = A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3$

Et : $(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = (A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3)(B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3)$

$$= \left(A_1B_1 + A_1B_2\, i\sigma_3 - A_1B_3\, i\sigma_2 - iA_2B_1\sigma_3 + A_2B_2 + iA_2B_3\sigma_1 + iA_3B_1\sigma_2 - iA_3B_2\sigma_1 + A_3B_3 \right)$$

$$= (A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)I_2 + i(A_1B_2 - A_2B_1)\sigma_3 + i(A_2B_3 - A_3B_2)\sigma_1 + i(A_3B_1 - A_1B_3)\sigma_2$$

$$= (\vec{A}\cdot\vec{B})I_2 + i(\vec{A}\times\vec{B})_3\sigma_3 + i(\vec{A}\times\vec{B})_1\sigma_1 + i(\vec{A}\times\vec{B})_2\sigma_2$$

$$= (\vec{A}\cdot\vec{B})I_2 + i(\vec{A}\times\vec{B})\sigma$$

un peu long

Notations : $(\vec{A}\times\vec{B})_3$ représente la troisième composante du vecteur issu du produit vectoriel $\vec{A}$ par $\vec{B}$.

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 \\ A_1B_2 - A_2B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A\times B)_1 \\ (A\times B)_2 \\ (A\times B)_3 \end{pmatrix}$$

On se propose maintenant, à partir de ce que l'on a démontré, de simplifier les expressions de :

- $\exp(\alpha\sigma_x)$
- $\exp(i\theta\,\vec{\sigma}\cdot\hat{n})$ où $\hat{n}$ vecteur unitaire quelconque

Si x est suffisamment petit on peut écrire : $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ où $x \in \mathbb{C}$.

Ici si on suppose α petit devant 1 tout comme θ (petit angle) :

$$\exp(\alpha\sigma_x) = 1 + \frac{\alpha\sigma_x}{1!} + \frac{\alpha^2\sigma_x^2}{2!} + \dots \frac{\alpha^n\sigma_x^n}{n!} + \dots$$

$$= \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots\right)I_2 + \left(\alpha + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!}\right)\sigma_x$$

$$= ch(\alpha)I_2 + sh(\alpha)\sigma_x$$

En effet $\sigma_x^{2m} = I$ et $\sigma_x^{2m+1} = \sigma_x^{2m}\sigma_x = \sigma_x$ où $m \in \mathbb{Z}$

FONTAINE
Jean-Philippe

$$\exp(i\theta\,\vec{\sigma}.\hat{n}) = 1 + \frac{i\theta\sigma_n}{1!} + \frac{i^2\theta^2\sigma_n^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3\sigma_n^3}{3!} + \dots + \frac{i^n\theta^n\sigma_n^n}{n!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta\sigma_n - \frac{\theta^2\sigma_n^2}{2!} - i\frac{\theta^3\sigma_n^3}{3!} + \dots + \frac{i^n\theta^n\sigma_n^n}{n!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + (-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots\right) I_2 + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots + (-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right)\sigma_n i$$

$$= \cos\theta\, I_2 + i\sin\theta\,\sigma_n$$

$$\boxed{= \cos\theta\, I_2 + i\sin\theta\,\vec{\sigma}.\vec{n}}$$

Exercice 6 : complément

On a démontré que : $L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}i}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $L_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On sait que tout opérateur en mécanique quantique doit être hermitien, i.e vérifier :

$A = A^\dagger$.

Ici on voit bien que $L_x \in \mathbb{R}$ et $L_x = L_x^\dagger$.

On a $L_y^\dagger = L_y^{*t}$

$$L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_y^* = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_y^{*t} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = L_y$$

Et L_y est hermitique.

$L_z \in \mathbb{R}$ et $L_z = L_z^*$, $L_z^t = \begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix} = L_z$ donc L_z est hermitique.

1

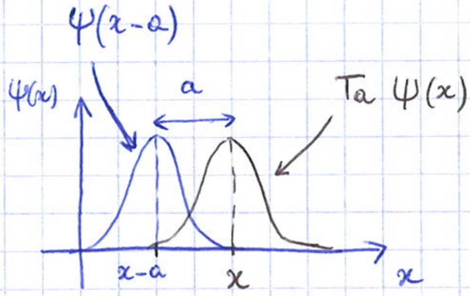
Benjamin CONDON

TD3 : Rotations

Exercice 1

(1) Translation de a appliquée à $\psi(x)$:

$$T_a\, \psi(x) = \psi(x-a)$$



(2) $$\psi(x-a) = \psi(x) - a\,\psi'(x) + \frac{a^2}{2}\psi''(x) \cdots + (-1)^n \frac{a^n}{n!}\psi^{(n)}(x) + \cdots$$

$$= \left[1 - a\frac{d}{dx} + \frac{a^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} \cdots + (-1)^n \frac{a^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n} + \cdots\right]\psi(x)$$

$$= \exp\left[-a\frac{d}{dx}\right]\psi(x)$$

L'opérateur qui fait intervenir $\frac{d}{dx}$ est l'opérateur d'impulsion : p

$$p = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{i}{\hbar}p$$

d'où $\psi(x-a) = \exp\left[-i\frac{ap}{\hbar}\right]\psi(x) = T_a\,\psi(x)$

On peut donc écrire :

$$T_a = \exp\left[-i\frac{ap}{\hbar}\right]$$

Exercice 2

$\psi(t) = U(t-t_0)\,\psi(t_0)$ avec $U(t-t_0)$ l'opérateur d'évolution temporelle

On peut décomposer $\psi(t)$ tel que :

$$\psi(t) = \psi(t_0) + (t-t_0)\,\psi'(t_0) + \cdots$$

$$= \left[1 + (t-t_0)\frac{\partial}{\partial t} + \cdots\right]\psi(t_0)$$

donc $U(t-t_0) = 1 + (t-t_0)\frac{\partial}{\partial t} + \cdots = \exp\left[(t-t_0)\frac{\partial}{\partial t}\right]$

L'opérateur qui fait intervenir $\frac{\partial}{\partial t}$ est l'hamiltonien : $H = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}H$

d'où $U(t-t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H\right]$

On peut alors écrire : $U(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}tH\right]$

Exercice 3

On considère une rotation d'angle φ_0 autour de l'axe z à laquelle on associe l'opérateur de rotation R_{φ_0}.

$$R_{\varphi_0}\, \psi(r,\theta,\varphi) = \psi(r,\theta,\varphi-\varphi_0)$$

On peut écrire R_{φ_0} sous la forme :

$$R_{\varphi_0} = \exp\left[-\varphi_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}\right]$$

L'opérateur qui fait intervenir $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ est : $L_z = \alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}$. On va déterminer le coefficient α.

L'opérateur $\vec{\nabla}$ en coordonnées sphériques est donné par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi}$$

donc $\vec{L} = \vec{r}\wedge\vec{p} = \vec{r}\wedge\frac{\hbar}{i}\left[\frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi}\right]$

$$= \frac{\hbar}{i}\left[\vec{r}\wedge\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e_\theta} + \vec{r}\wedge\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e_\varphi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e_\theta}\right]$$

On en déduit l'expression de L_z :

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\left[-\frac{1}{\sin\theta}(-\sin\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \Rightarrow L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{i}{\hbar}L_z$$

d'où $\quad R_{\varphi_0} = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\varphi_0 L_z\right]$

Exercice 4

Soit un opérateur A qui commute avec J_x et J_y. On veut montrer qu'il commute également avec J_z. Connaissant la propriété d'un moment cinétique, on peut écrire :

$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \quad$ donc $\quad [A, J_z] = \left[A, -\frac{i}{\hbar}[J_x, J_y]\right]$

Benjamin CONDON

$\boxed{2}$ $$[A, J_z] = -\frac{i}{\hbar}\left(A[J_x, J_y] - [J_x, J_y]A\right)$$
$$= -\frac{i}{\hbar}\left(A(J_xJ_y - J_yJ_x) - (J_xJ_y - J_yJ_x)A\right)$$
$$= -\frac{i}{\hbar}\left(AJ_xJ_y - AJ_yJ_x - J_xJ_yA + J_yJ_xA\right)$$

Mais A commute avec J_x et J_y, d'où :

$$[A, J_z] = -\frac{i}{\hbar}\left(AJ_xJ_y - AJ_yJ_x - AJ_xJ_y + AJ_yJ_x\right) = 0$$

un peu long

Donc A commute bien avec J_z.

A est un opérateur <u>scalaire</u> (invariant par rotation).

<u>Exercice 5</u>

Opérateur de moment cinétique orbital : $L = r \wedge p$

* ∘ $[L_z, z] = L_z.z - zL_z = (xp_y - yp_x)z - z(xp_y - yp_x)$
$= xp_yz - yp_xz - zxp_y + zyp_x$

Comme z commute avec x, y, p_x et p_y, on a :

$$[L_z, z] = xzp_y - yzp_x - xzp_y + yzp_x = 0$$

∘ $[L_z, x] = L_z.x - xL_z = (xp_y - yp_x)x - x(xp_y - yp_x)$
$= xp_yx - yp_xx - xxp_y + xyp_x$

Comme x commute avec x, y, p_y mais pas avec p_x, on a :

$$[L_z, x] = y(xp_x - p_xx) = i\hbar y \qquad \text{car } [x, p_x] = i\hbar$$

D'une manière générale, on a : $[L_i, j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk}\, k$

* On montre de la même manière que : $[L_i, p_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk}\, p_k$

Les opérateurs O_1, O_2, O_3 qui vérifie la relation $[L_i, O_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} O_k$ sont appelés opérateurs <u>vectoriels</u>.

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $l=1$ qui correspond à la valeur propre $2\hbar^2$ de l'opérateur L^2.

$2l+1=3 \Rightarrow$ espace à 3 dimensions

On souhaite représenter les opérateurs L_x, L_y et L_z par leurs matrices 3×3 correspondantes.

valeurs propres de L_z : $m\hbar$ et $-l \leq m \leq +l \rightarrow m=\{-1;0;1\}$

Les valeurs propres de L_z sont donc : $\{\hbar, 0, -\hbar\}$

$$\hookrightarrow \quad L_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer L_x et L_y, on passe par les opérateurs L_+ et L_- :

$$\begin{cases} L_+ = L_x + iL_y \\ L_- = L_x - iL_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_x = \dfrac{L_+ + L_-}{2} \\ L_y = \dfrac{L_+ - L_-}{2i} \end{cases}$$

équations aux valeurs propres de L_+ et L_- :

$L_\pm |l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)}\,|l, m\pm1\rangle$ avec $l=1$ et $-l\leq m\leq +l$

Les valeurs propres de L_+ et L_- sont donc : $\hbar\sqrt{2}$ (dégénérée)

d'où les matrices : $(L_+) = \hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(L_-) = \hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On en déduit alors L_x et L_y :

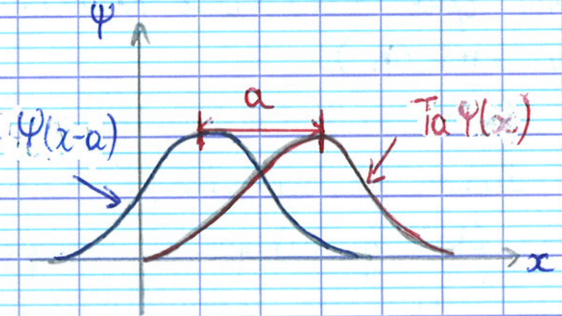
$$(L_x) = \hbar\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (L_y) = \hbar\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

NOM ?

Ex 1

On doit montrer que $T_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$

On se propose de le faire par graphe



pour $a > 0$

$$\Rightarrow \boxed{T_a\,\psi(x) = \psi(x-a)}$$

On a $T_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$

On fait un développement limité pour $a \ll x$

ou un développement en série. Distinguer $a \to 0$ et $n \to \infty$!

$$\psi(x-a) = \psi(x) - a\,\psi'(x) + \frac{a^2}{2}\psi''(x) + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\psi^{(n)} + \dots$$

$$\psi(x-a) = \psi(x)\left[1 - a\frac{d}{dx} + \frac{a^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}a^n\frac{d^n}{dx^n} + \dots\right]$$

De plus on sait que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

d'où $\psi(x-a) = \exp\left(-a\frac{d}{dx}\right)\psi(x)$

et que $p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ car dans notre cas la fonction $\psi(x)$ ne dépend que d'une seule variable

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{ip}{\hbar}$$

On a alors $\psi(x-a) = \exp\left(-\frac{iap}{\hbar}\right)\psi(x) = T_a\,\psi(x)$

donc $\boxed{T_a = \exp\left(\frac{-iap}{\hbar}\right)}$

Ex 2

On doit montrer que $\psi(t) = U(t-t_0)\psi(t_0)$ et que $U(t) = \exp(-iHt/\hbar)$

l'équation d'évolution de Schrödinger donne la modification instantanée d'un état quantique à chaque instant

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\hat{H}|\psi(t)\rangle$$

où $\hat{H}$ est le générateur. Étant donné un état initial $|\psi(t_0)\rangle$ à l'instant $t = t_0$, son état $|\psi(t)\rangle$ à un autre instant t est donné par

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t-t_0)|\psi(t_0)\rangle$$
$$\Rightarrow \psi(t) = U(t-t_0)\psi(t_0)$$

où $\hat{U}(t)$ est l'opérateur d'évolution et est solution de l'équation :

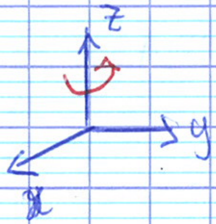
$$\frac{d\hat{U}(t)}{dt} = \left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right)\hat{U}(t)$$

De plus si $\hat{H}(t)$ est indépendant du temps, on a :

$\boxed{\hat{U}(t) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right)}$ comme unique solution

Exercice 3.

En utilisant les mêmes propriétés que le precedent exercice on arrive à $\underline{|R_z(\varphi_0)\psi(r,\theta,\varphi)} = \psi(r,\theta,\varphi-\varphi_0)$



$$\forall \varphi \quad \hat{R}_z(\varphi_0) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\varphi_0 \hat{L}_z\right)$$

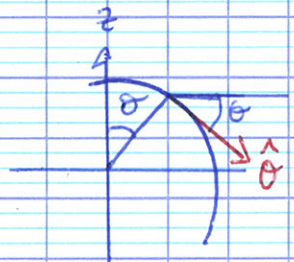
On définit l'operateur $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$
où $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$

En coordonnées spheriques :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$$

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{i}\left[\vec{r}\times\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta} + \vec{r}\times\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right]$$

d'où $\hat{r} = \frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\varphi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\theta}$



et $\hat{z}\times\hat{\theta} = -\sin\theta$
$\hat{z}\times\hat{\varphi} = 0$ car $\hat{\varphi}$ est un vecteur ~~horizontale~~ horizontal par rapport à l'axe Z.

On a alors $L_z = -\frac{1}{\sin\theta}(-\sin\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}$

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\Rightarrow \underline{|R(O_z,\varphi_0)} = \exp\left[\frac{-i}{\hbar}\varphi_0\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$$

Exercice 4.

Par définition on a : $[J_\alpha, J_\beta] = i\hbar\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma$

si $[A, J_x] = 0 \Rightarrow A J_x = J_x A$
et $[A, J_y] = 0 \Rightarrow A J_y = J_y A$

Montrons que $[A, J_z] = 0$

$[J_x, J_y] = i\hbar J_z$
$J_z = \frac{[J_x, J_y]}{i\hbar} = (J_x J_y - J_y J_x)\frac{1}{i\hbar}$

donc $[A, J_z] = \frac{A}{i\hbar}(J_x J_y - J_y J_x) - \frac{1}{i\hbar}(J_x J_y - J_y J_x)A$
$= \frac{A}{i\hbar}(J_x J_y - J_y J_x - J_x J_y + J_y J_x)$

car $A J_x = J_x A$ et $A J_y = J_y A$

d'où $\boxed{[A, J_z] = 0}$