BRUNI Jérémie
REBOUL Benjamin
BARNES Loïc
CADOT Pauline
WEISSERT Aurore

TD 2 : Exercice 3

1) La fonction d'onde dans l'espace des impulsions est :

$$\tilde{\Psi}(p) = (\pi \sigma^2 \hbar^2)^{-1/4} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}}$$

On va utiliser cette fonction pour calculer Δp avec $(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2$

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}^*(p)\, p^2\, \tilde{\Psi}(p)\, dp$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}^*(p)\, p\, \tilde{\Psi}(p)\, dp$$

- $$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\pi \sigma^2 \hbar^2)^{-1/2}\, p^2\, e^{-\frac{(p-p_0)^2}{\sigma^2\hbar^2}}\, dp$$

$$= (\pi \sigma^2 \hbar^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 e^{-\frac{(p-p_0)^2}{\sigma^2\hbar^2}}\, dp$$

On effectue le changement de variables : $p' = p - p_0$; $dp' = dp$
Les bornes de l'intégrale ne changent pas

$$\langle p^2 \rangle = (\pi \sigma^2 \hbar^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (p'+p_0)^2 e^{-\frac{p'^2}{\sigma^2\hbar^2}}\, dp'$$

on distribue le carré

$$\langle p^2 \rangle = (\pi \sigma^2 \hbar^2)^{-1/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p'^2 e^{-\frac{p'^2}{\sigma^2\hbar^2}} dp' + \int_{-\infty}^{+\infty} 2p'p_0 e^{-\frac{p'^2}{\sigma^2\hbar^2}} dp' + \int_{-\infty}^{+\infty} p_0^2 e^{-\frac{p'^2}{\sigma^2\hbar^2}} dp' \right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2p'p_0 e^{-\frac{p'^2}{\sigma^2\hbar^2}} dp' = 0$$ puisqu'on intègre une fonction impaire sur $]-\infty, +\infty[$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p'^2 e^{-\frac{p'^2}{\sigma^2\hbar^2}} dp' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\sigma^2\hbar^2)^{3/2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_0^2 e^{-\frac{p'^2}{\sigma^2\hbar^2}} dp' = p_0^2 \sqrt{\pi\sigma^2\hbar^2}$$

$$\langle p^2\rangle = \left(\pi\sigma^2\hbar^2\right)^{-1/2}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\sigma^2\hbar^2\right)^{3/2} + p_0^2\sqrt{\pi\sigma^2\hbar^2}\right] = \left[\frac{1}{2}\sigma^2\hbar^2 + p_0^2\right]$$

- $$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\pi\sigma^2\hbar^2\right)^{-1/2} p\, e^{-\frac{(p-p_0)^2}{\sigma^2\hbar^2}}\, dp$$

on effectue le même changement de variables
on obtient :

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\pi\sigma^2\hbar^2\right)^{-1/2}\left(p'+p_0\right) e^{-\frac{p'^2}{\sigma^2\hbar^2}}\, dp'$$

$$\langle p\rangle = \left(\pi\sigma^2\hbar^2\right)^{-1/2}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p'\, e^{-\frac{p'^2}{\sigma^2\hbar^2}}\, dp'}_{\substack{=0 \\ \text{intégrale d'une} \\ \text{fonction impaire}}} + \int_{-\infty}^{+\infty} p_0\, e^{-\frac{p'^2}{\sigma^2\hbar^2}}\, dp'\right]$$

$$\langle p\rangle = \left(\pi\sigma^2\hbar^2\right)^{-1/2} p_0\sqrt{\pi\sigma^2\hbar^2} = p_0$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{1}{2}\sigma^2\hbar^2 + \cancel{p_0^2} - \cancel{p_0^2}$$

$$\Delta p = \frac{\sigma\hbar}{\sqrt{2}}$$

On utilise à présent la transformée de Fourier pour déterminer la fonction $\Psi(x)$ qui nous permettra de calculer Δx.

$$\Psi(x) = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}}\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}\, dp$$ avec C la constante de normalisation.

On effectue le changement de variables $p' = p - p_0$

$$\Psi(x) = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p'^2}{2\sigma^2\hbar^2}}\, e^{\frac{i(p'+p_0)x}{\hbar}}\, dp'$$

$$\Psi(x) = C e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p'^2}{2\sigma^2\hbar^2} + \frac{ip'x}{\hbar}}\, dp'$$

On remarque le début d'un carré dans l'exponentielle.
Ainsi on cherche à le déterminer pour retomber sur une gaussienne

$$-\frac{p'^2}{2\sigma^2\hbar^2}+\frac{ip'x}{\hbar}=-\left(\frac{p'^2}{2\sigma^2\hbar^2}-\frac{ip'x}{\hbar}\right)=-\left[\left(\frac{p'}{\sqrt{2}\sigma\hbar}-\frac{ix\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{x^2\sigma^2}{2}\right]$$

$$\Psi(x)=C\,e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p'}{\sigma\hbar}-ix\sigma\right)^2}e^{-\frac{x^2\sigma^2}{2}}dp'$$

$$\Psi(x)=C\,e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}e^{-\frac{x^2\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p'}{\sigma\hbar}-ix\sigma\right)^2}dp'$$

On pose $X=\frac{p'}{\sigma\hbar}-ix\sigma$, $dX=\frac{dp'}{\sigma\hbar}\Rightarrow dp'=\sigma\hbar\,dX$

On obtient : $\Psi(x)=C\sigma\hbar\,e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}e^{-\frac{x^2\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{X^2}{2}}dX$

$$\Psi(x)=C\sigma\hbar\,e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}e^{-\frac{x^2\sigma^2}{2}}\sqrt{2\pi}$$

On normalise la fonction

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x)|^2dx=(C\sigma\hbar)^2\times 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2\sigma^2}dx=1$$

$$(C\sigma\hbar)^2\times 2\pi\sqrt{\frac{\pi}{\sigma^2}}=1$$

$$C^2=\sqrt{\frac{\sigma^2}{\pi}}\,\frac{1}{(\sigma\hbar)^2\,2\pi}$$

$$\Psi(x)=D\,e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}e^{-\frac{x^2\sigma^2}{2}}\quad\text{avec } D=C\sigma\hbar\sqrt{2\pi}=\left(\frac{\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4}$$

On utilise l'expression de $\Psi(x)$ pour calculer
$(\Delta x)^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2$

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, |\psi(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sigma^2}{\pi}\right)^{1/2} x^2 e^{-x^2\sigma^2} \, dx$$

$$\langle x^2\rangle = \left(\frac{\sigma^2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\sigma^2)^{-3/2}$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{2\sigma^2}$$

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sigma^2}{\pi}\right)^{1/2} x e^{-x^2\sigma^2} \, dx = 0$$

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$$

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle$$

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$$

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$$

$$\Rightarrow \Delta x \Delta p = \frac{\sigma\hbar}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{\hbar}{2}$$

2) On avait $\tilde{\psi}(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2) e^{-\frac{p^2}{2\sigma^2\hbar^2}}$ à $t=0$

$$\tilde{\psi}(p) = e^{-\frac{ip^2 t}{2m\hbar}} (\pi\sigma^2\hbar^2) e^{-\frac{p^2}{2\sigma^2\hbar^2}} \quad \text{à } t \neq 0$$

Il faut calculer la transformée de Fourier de $\tilde{\psi}(p)$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C e^{\frac{ip^2 t}{2m\hbar}} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}} e^{\frac{ipx}{\hbar}} dp$$

$$p' = p - p_0$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C e^{\frac{i(p'+p_0)^2 t}{2m\hbar}} e^{-\frac{p'^2}{2\sigma^2\hbar^2}} e^{\frac{i(p'+p_0)x}{\hbar}} dp'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} C e^{\frac{ip_0 x}{\hbar}} e^{\frac{ip'^2 t}{2m\hbar}} e^{\frac{i2p'p_0 t}{2m\hbar}} e^{\frac{ip_0^2 t}{2m\hbar}} e^{-\frac{p'^2}{2\sigma^2\hbar^2}} e^{\frac{ip'x}{\hbar}} dp'$$

On souhaite retomber sur une gaussienne

$$\frac{ip'^2 t}{2m\hbar} + \frac{i2p'p_0 t}{2m\hbar} + \frac{ip'x}{\hbar} - \frac{p'^2}{2\sigma^2\hbar^2}$$

$$-\left(\frac{1}{2\sigma^2\hbar^2}-\frac{it}{2m\hbar}\right)p'^2+p'\left(\frac{2i\beta t}{2m\hbar}+\frac{ix}{\hbar}\right)$$

$$-\left[\left(\frac{1}{2\sigma^2\hbar^2}-\frac{it}{2m\hbar}\right)p'^2-p'\left(\frac{i\beta t}{m\hbar}+\frac{ix}{\hbar}\right)\right]$$

$$-\left[\alpha p'-\gamma\right]^2+\gamma^2=-\left(\alpha^2p'^2-2\alpha\gamma p'+\gamma^2\right)+\gamma^2$$

$$\alpha^2=\frac{1}{2\sigma^2\hbar^2}-\frac{i}{2m\hbar}$$

$$2\alpha\gamma=\frac{i\beta t}{m\hbar}+\frac{ix}{\hbar}=\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\beta t}{m}+x\right)$$

$$\gamma=\frac{i}{2\hbar}\frac{\left(\frac{\beta t}{m}+x\right)}{\left(\frac{1}{2\sigma^2\hbar^2}-\frac{it}{2m\hbar}\right)^{1/2}}$$

$$\gamma^2=-\frac{1}{4\hbar^2}\frac{\left(\frac{\beta t}{m}+x\right)^2}{\left(\frac{1}{2\sigma^2\hbar^2}-\frac{it}{2m\hbar}\right)}=-\frac{1}{2\hbar^2}\frac{\left(\frac{\beta t}{m}+x\right)^2}{\frac{1}{\sigma^4\hbar^4}+\frac{t^2}{m^2\hbar^2}}\left(\frac{1}{\sigma^2\hbar^2}+\frac{it}{m\hbar}\right)$$

$$\psi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}C\,e^{\frac{i\beta x}{\hbar}+\frac{i\beta^2 t}{2m\hbar}}\,e^{-\left[\alpha p'-\gamma\right]^2}\,e^{\gamma^2}\,dp'=C\sqrt{\pi}\,e^{i\left(\frac{\beta x}{\hbar}+\frac{\beta^2 t}{2m\hbar}\right)}\,e^{\gamma^2}$$

$$e^{\gamma^2}=e^{A+iB}=\exp\left(-\frac{1}{2\hbar^2}\frac{\left(\frac{\beta t}{m}+x\right)^2}{\frac{1}{\sigma^4\hbar^4}+\frac{t^2}{m^2\hbar^2}}\left(\frac{1}{\sigma^2\hbar^2}+\frac{it}{m\hbar}\right)\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}C^2\pi\,e^{2A}\,dx$$ les exponentielles complexes se simplifient

$$=C^2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2A}\,dx$$

$$=C^2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\left(\frac{\beta t}{m}+x\right)^2}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{\sigma^2\hbar^2t^2}{m^2}}}\,dx$$

$X=\frac{\beta t}{m}+x$

$dX=dx$

$$=C^2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha X^2}\,dX$$

$$=C^2\pi\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}=1$$

$$\alpha=\frac{1}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{\sigma^2\hbar^2t^2}{m^2}}$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \, x \, dx$$ les exponentielles complexes se simplifient

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (C\sqrt{\pi})^2 \, x \, e^{-\alpha_1\left(\frac{p_0 t}{m} + x\right)^2} dx$$

$$\langle x \rangle = C^2\pi \int x \, e^{-\alpha_1\left(\frac{p_0 t}{m} + x\right)^2} dx \qquad X = \frac{p_0 t}{m} + x$$

$$= C^2\pi \int \left(X - \frac{p_0 t}{m}\right) e^{-\alpha_1 X^2} dX$$

$$= C^2\pi \int -\frac{p_0 t}{m} e^{-\alpha_1 X^2} dX + C^2\pi \int \cancel{X e^{-\alpha_1 X^2} dX}^{\,0}$$

$$= -\frac{p_0 t}{m}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \, C^2\pi = -\frac{p_0 t}{m}$$

$$\langle x^2 \rangle = C^2\pi \int \left(X - \frac{p_0 t}{m}\right)^2 e^{-\alpha_1 X^2} dX$$ on effectue le même changement de variable

$$\langle x^2 \rangle = C^2\pi\left(\int X^2 e^{-\alpha_1 X^2} dX - 2\frac{p_0 t}{m}\int \cancel{X e^{-\alpha_1 X^2}}^{\,0} dX + \left(\frac{p_0 t}{m}\right)^2 \int e^{-\alpha_1 X^2} dX\right)$$

$$\langle x^2 \rangle = C^2\pi \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha_1^{-3/2} + \left(\frac{p_0 t}{m}\right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}} \, C^2\pi$$

$$(\Delta x(t))^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$= C^2\pi \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha_1^{-3/2} + \cancel{\left(\frac{p_0 t}{m}\right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}}} - \cancel{\left(\frac{p_0 t}{m}\right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}}}$$

$$(\Delta x(t))^2 = \frac{1}{2\alpha_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right)$$

$$* \; \boxed{C^2\pi \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}} \frac{1}{2\alpha_1}$$

$$= 1$$