TD 3

BRUNI
REBOUL
BARNES
WEISSERT
CADOT

Attention au mot "perturbation"

Ex 2

1)

$|2\rangle$ ———— E_2

On a deux niveaux d'énergie $|1\rangle$ et $|2\rangle$

$|1\rangle$ ———— E_1

avec $E_1 < E_2$

L'hamiltonien est : $H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$

On cherche les états propres et leur énergie.

On pose : * $E_1 = E_0 - A$ $\quad A > 0$
* $E_2 = E_0 + A$
* $A = (A^2+b^2)^{1/2} \cos(2\theta)$
* $b = (A^2+b^2)^{1/2} \sin(2\theta)$

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A & b \\ b & A \end{pmatrix}$$

$$= E_0 \mathbb{1} + \underbrace{\sqrt{A^2+b^2} \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}}_{X = \text{perturbation}}$$

Les valeurs propres du terme de perturbation X sont $\pm (A^2+b^2)^{1/2}$

On a

$$\begin{cases} E_\alpha = E_0 - (A^2+b^2)^{1/2} \\ E_\beta = E_0 + (A^2+b^2)^{1/2} \end{cases}$$

Vecteur propre : $(-\cos 2\theta - 1)x + \sin 2\theta\, y = 0$

$$-2\cos^2\theta\, x + 2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos\theta \\ x = \sin\theta \end{cases}$$

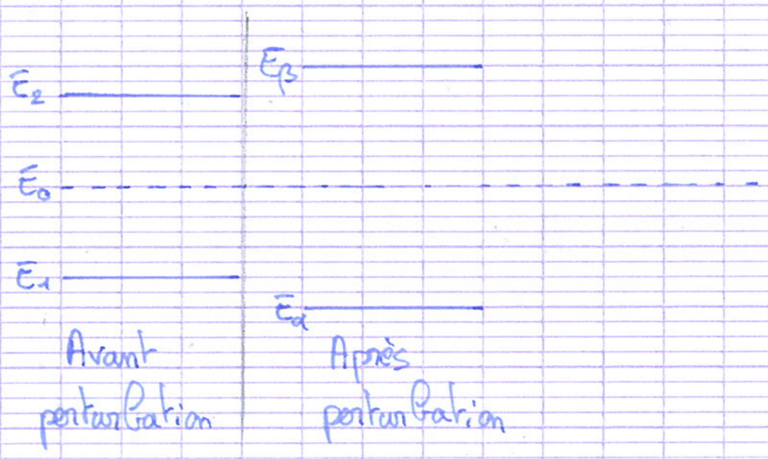
On obtient par le calcul

$$\begin{cases} |\alpha\rangle = \cos\theta\,|x\rangle - \sin\theta\,|y\rangle \\ |\beta\rangle = \sin\theta\,|x\rangle + \cos\theta\,|y\rangle \end{cases}$$

2) On avait les énergies $E_1 = E_0 - A$
$E_2 = E_0 + A$

Après perturbation, on a $E_\alpha = E_0 - \sqrt{A^2+b^2}$
$E_\beta = E_0 + \sqrt{A^2+b^2}$

On remarque que $\sqrt{A^2+b^2} > A$
L'écart entre les énergies est donc amplifié par la perturbation.
Ceci se voit aisément sur un schéma d'énergies.



On peut écrire $E_\alpha < E_n$ avec E_n les énergies propres de l'Hamiltonien non perturbé.

$E_\alpha = \mathrm{Min}\ \langle\Psi|H|\Psi\rangle$

$\Leftrightarrow E_\alpha \leq \langle\Psi|H|\Psi\rangle$

$\Leftrightarrow E_\alpha \leq E_1$

De la même manière, on peut écrire $E_\beta = \mathrm{Max}\ \langle\Psi|H|\Psi\rangle$

$\Leftrightarrow E_\beta \geq \langle \Psi | H | \Psi \rangle$

$\Leftrightarrow E_\beta \geq E_2$

On peut donc généraliser ce résultat pour une perturbation de terme perturbateur b_m qui apportera un écart d'énergie de $\pm\sqrt{A^2+b_m^2}$. Ainsi plus b_m sera important, plus l'écart en énergie sera amplifié.

3) On veut calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

$$\begin{cases} |1\rangle = |\alpha\rangle \cos\theta + \sin\theta |\beta\rangle \\ |2\rangle = -\sin\theta |\alpha\rangle + \cos\theta |\beta\rangle \end{cases}$$

On a $\Psi(0) = |1\rangle = \cos\theta |\alpha\rangle + \sin\theta |\beta\rangle$

$$\Psi(t) = \cos\theta \, e^{-\frac{iE_\alpha t}{\hbar}} |\alpha\rangle + \sin\theta \, e^{-\frac{iE_\beta t}{\hbar}} |\beta\rangle$$

$$= A_1 |1\rangle + A_2 |2\rangle$$

$$A_2 = -\sin\theta\cos\theta \, e^{-\frac{iE_\alpha t}{\hbar}} + \cos\theta\sin\theta \, e^{-\frac{iE_\beta t}{\hbar}}$$

~~La probabilité est :~~

$$\cancel{P_2(t) = |A_2|^2 = \sin^2(2\theta)}$$

On pose $E_\alpha = E_0 - \omega\hbar$ $\quad \omega\hbar = (A^2+b^2)^{1/2}$

$E_\beta = E_0 + \omega\hbar$

$$A_2 = \sin\theta\cos\theta \, e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} \underbrace{\left(-e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)}_{-2i\sin(\omega t)}$$

La probabilité est :

$$P_2(t) = |A_2|^2 = \sin^2(2\theta)\sin^2(\omega t)$$

4) On a

$$H = \begin{array}{cc} |1\rangle & |2\rangle \\ \end{array}$$
$$H = \begin{pmatrix} a & be^{i\omega t} \\ be^{-i\omega t} & c \end{pmatrix}$$

$$\Psi(t) = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$$

On a : $i\hbar \dfrac{d\psi}{dt} = H\psi$

$$i\hbar\left[\dot{x}|1\rangle + \dot{y}|2\rangle\right] = (ax + be^{i\omega t}y)|1\rangle$$
$$+ (be^{-i\omega t}x + cy)|2\rangle$$

$$\begin{cases} i\hbar\dot{x} = ax + be^{i\omega t}y \\ i\hbar\dot{y} = be^{-i\omega t}x + cy \end{cases}$$

$$|\Psi(t)|^2 = \sin^2(2\theta)\sin^2(\omega_0 t)$$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\hbar}(A^2 + B^2)^{1/2}$

$$\begin{cases} E_1 = E_0 - A \\ E_2 = E_0 + A \end{cases}$$

On fait un changement de fonction

$$\begin{cases} x = X e^{i\omega t/2} \\ y = Y e^{-i\omega t/2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\hbar\left(\dot{X} + \frac{i\omega}{2} X\right) \cancel{e^{\frac{i\omega t}{2}}} = aX \cancel{e^{\frac{i\omega t}{2}}} + bY e^{i\omega t/2} \\ i\hbar\left(\dot{Y} - \frac{i\omega}{2} Y\right) \cancel{e^{-i\omega t/2}} = bX \cancel{e^{-i\omega t/2}} + cY \cancel{e^{-i\omega t/2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\hbar \dot{X} = \left(a - \frac{\omega\hbar}{2}\right) X + bY \\ i\hbar \dot{Y} = bX + \left(c - \frac{\omega\hbar}{2}\right) Y \end{cases}$$

On a comme conditions initiales:

$$X(0) = 1 \ ; \ Y(0) = 0$$

$$|Y(t)|^2 = |X(t)|^2$$

La probabilité est :

$$P_2 = \underbrace{\frac{4b^2\left(\frac{c-a}{2} - \frac{\omega\hbar}{2}\right)^2}{\left(\frac{c-a}{2} - \frac{\omega\hbar}{2}\right)^2 + b^2}}_{\sin^2 2\theta} \sin^2\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{c-a}{2} - \frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 + b^2}\, t}{\hbar}\right)$$

$$P_2 = \frac{4b^2(\omega_0 - \omega^2)/4\hbar}{\left(\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right)^2 \hbar^2 + b^2\right)^2} \sin\left[\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{b^2}{\hbar^2}}\, t\right]$$

On remarque que quand P_2 est max, $\omega \to \omega_0$.