YANG YANG
HUANG KUNQIANG

Ex.2 États liés coulombiens

1) Pour un potentiel central, on peut chercher une solution de la forme

$$\psi(r) = \frac{u_\ell(r)}{r} Y_\ell^m(\vec{r})$$

où $\frac{u_\ell(r)}{r}$ ne dépend que de r et $Y_\ell^m(\vec{r})$ représente la dépendance angulaire

2) la condition de normalisation :

$$\int_0^{+\infty} dr\, r^2 \cdot \frac{u_\ell^2(r)}{r^2} = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} u_\ell^2(r)\, dr = 1$$

3) si $r = ax$, $u''(r) = v''(x)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 = \frac{v''(x)}{a^2}$

avec $v(x) = u(r)$

donc $-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{v''(x)}{a^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{a^2x^2}v(x)\right] - \frac{g\,v(x)}{ax} = E\,v(x)$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{v''(x)}{a^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\ell(\ell+1)}{a^2x^2}v(x) - \frac{g\,v(x)}{ax} = E\,v(x)$$

si $\frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{g}{a} \Rightarrow a = \frac{\hbar^2}{2mg}$

on aura : $-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}v(x) - \frac{v(x)}{x} = \mathcal{E}v(x) = -k^2 v(x)$ ①

ici $\mathcal{E} = -k^2$

$$\frac{aE}{g} = -k^2 \Rightarrow a = \frac{-gk^2}{E}$$

4) quand $x \sim 0$, on a $v(x) = x^\beta$

à partir de la relation ①, on obtient

$-\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + \ell(\ell+1)x^{\beta-2} - x^{\beta-1} = -k^2 x^\beta$

$[\ell(\ell+1) - \beta(\beta-1)]x^{\beta-2} + o(x^{\beta-2}) = 0$

$\Rightarrow l(l+1) - \beta(\beta-1) = 0 \Rightarrow \beta = l+1$ ou $\beta = -l$

on a $V(0) = 0 \Rightarrow V(x) \sim x^{l+1}$

quand $x \to \infty$, $-V''(x) = -k^2 V(x)$

$\Rightarrow V \sim e^{\pm kx}$

$x \to \infty$, $V(x) \to 0$ on a $V(x) \sim e^{-kx}$

5) $V(x) = w(x) \cdot e^{-kx}$

$V''(x) = [w''(x) + 2kw'(x) + k^2 w(x)] e^{-kx}$

on a la relation: $-V''(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} V(x) - \frac{V(x)}{x} = -k^2 V(x)$

$\Rightarrow w''(x) + 2kw'(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} w(x) - \frac{w(x)}{x} = 0$

6) $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{l+1+n}$

$w'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (l+1+n) \cdot x^{l+n}$

$w''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (l+1+n)(l+n) x^{l+n-1}$

$\Rightarrow -\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (l+2+n)(l+n+1) x^{l+n} + 2k \sum_{n=0}^{\infty} a_n (l+1+n) x^{l+n}$
$+ l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{l+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{l+n} = 0$

$\Rightarrow a_{n+1} [-(l+2+n)(l+n+1) + l(l+1)] + a_n [2k(l+n+1) - 1] = 0$

7) $n \to \infty$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2k(l+n+1) - 1}{l(l+1) + (l+n+1)(l+n+2)} \sim \frac{2k}{n}$

8) $e^{2kx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2kx)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2k)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\Rightarrow n \to \infty$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2k}{n+1} \to \frac{2k}{n}$

donc $w(x) \propto e^{2kx}$

$V(x) = w(x) e^{-kx} \propto e^{kx}$

$V(x)$ diverge, c'est pas normalisable.

9). sauf si $2k(l+1+n) - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2(l+n+1)}$

10) $E_N = -\frac{2mg^2}{\hbar^2}k^2 = -\frac{2mg^2}{\hbar^2}\frac{1}{4(l+n+1)^2}$

$$= -\frac{1}{2}\mu c^2 \left(\frac{g}{\hbar c}\right)^2 \frac{1}{N^2}$$

où $N = 2(l+n+1)$

11) $N = 2(l+n+1) \Rightarrow l = \frac{N}{2} - n - 1$

donc la dégénérescence entre états de l différents

$$g_{\cancel{N}} = \frac{N}{2} - 1$$

12) $g = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$ donc $E_N \propto g^2 \propto Z^2$

donc $E_{He} = 4 E_H = 4 \times 13.6\,eV = 54.4\,eV$.