Bastien TRAVERSE

TD de mécanique quantique n°1

Exercice n°1 : Modèle en couche du noyau atomique

1)- En posant $r = a.\rho$ et avec la normalisation :

$$\int_0^{+\infty} U^2(r).\,dr = 1 = \int_0^{+\infty} a\,.\,u^2(\rho).\,d\rho \quad \text{car } dr = a.d\rho$$

Ainsi $u(\rho) = a^{-1/2}.\,U(r)$

On a : $$\frac{\hbar^2}{2M}.\left[\frac{-\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right] U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}.U(r) = E.U(r) \quad (1)$$

Qui devient : $$\underbrace{\frac{\hbar^2}{2Ma^2}}_{=\alpha}.\left(-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}.u(\rho)\right) + \underbrace{\frac{M\omega^2 a^2}{2}}_{=\beta}\rho^2.\,u(\rho) = \mathcal{E}.\,u(\rho)$$

En faisant $\alpha = \beta$: $$\frac{\hbar^2}{2Ma^2} = \frac{M\omega^2 a^2}{2}$$

$$\Longrightarrow a = \left[\frac{\hbar^2}{M^2.\omega^2}\right]^{1/4}$$

Ainsi $$\frac{M\omega^2 a^2}{2} = \frac{M\omega^2}{2}.\sqrt{\frac{\hbar^2}{M^2.\omega^2}} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

D'où $\mathcal{E} = \dfrac{E}{\frac{\hbar\omega}{2}} = \dfrac{2E}{\hbar\omega}$

On obtient donc bien l'équation :

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \cdot u(\rho) + \rho^2 \cdot u(\rho) = \mathcal{E} \cdot u(\rho) \quad (2)$$

Limites :

* $\rho \to 0$: On pose $u(\rho) = \rho^s$

$$(2) \Rightarrow s(s-1) \cdot \rho^{s-2} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \cdot \rho^s = 0$$

$$\Leftrightarrow s(s-1) = l(l+1)$$

Solution évidente : $s = l+1$.

* $\rho \to +\infty$: On pose $u(\rho) = e^{-\rho^2/2}$

$$(2) \Rightarrow -\rho^2 \cdot e^{-\rho^2/2} + \rho^2 \cdot e^{-\rho^2/2} = 0$$

2)- On a $u(\rho) = f(\rho) \cdot e^{-\rho^2/2}$

D'où $u''(\rho) = \left[f''(\rho) - 2\rho \cdot f'(\rho) + (\rho^2 - 1) \cdot f(\rho)\right] \cdot e^{-\rho^2/2}$

Avec (2), on trouve que $f(\rho)$ vérifie :

$$-f''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \cdot f(\rho) + 2\rho \cdot f'(\rho) + (1-\mathcal{E}) \cdot f(\rho) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -f''(\rho) + 2\rho \cdot f'(\rho) + \left[\frac{l(l+1)}{2} + (1-\varepsilon)\right] \cdot f(\rho) = 0 \quad (3)$$

3.1)- Cf "1)- Limites" pour $s = l+1$

Termes de faible puissance :

$$f(\rho) = \rho^{s} \cdot (C_0 + \underbrace{C_1 \cdot \rho}_{p=1})$$

$$\Leftrightarrow \quad u(\rho) \cdot e^{\rho^2/2} = \rho^{s}(C_0 + C_1 \cdot \rho)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{\rho^{s}} \cdot e^{\rho^2/2} = \cancel{\rho^{s}} \cdot (C_0 + C_1 \cdot \rho)$$

$$\Leftrightarrow \quad C_0 + C_1 \cdot \rho = e^{\rho^2/2}$$

Or $\rho^2/2$ proche de 0. On fait un développement limité : $C_0 + C_1 \cdot \rho = 1 \left(+ \frac{\rho^2}{2} \right)$

C_1 étant une constante indépendante de ρ, nécessairement $C_1 = 0$.

3.2)- On a $f(\rho) = \rho^{s} \cdot \sum_{p=0}^{+\infty} C_p \cdot \rho^{p}$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} C_m \cdot \rho^{l+1+2m}$$

car (3) invariante par changement de ρ en $-\rho$.

D'où (3) $\Longrightarrow$

$$C_{m+1}\cdot\left[-(l+1+2m)(l+2m)+l(l+1)\right]+C_m\cdot\underbrace{\left[2(l+1+2m)+1-\varepsilon\right]}_{\gamma}=0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{C_{m+1}}{C_m}=\frac{2(l+1+2m)+1-\varepsilon}{(l+1+2m)(l+2m)-l(l+1)}$$

$$\underset{m\to+\infty}{\sim}\frac{m}{m^2}=\frac{1}{m}$$

$$\Longleftrightarrow C_{m+1}=\frac{C_m}{m}=\frac{C_{m-1}}{m.(m-1)}=\frac{C_{m-2}}{m(m-1)(m-2)}=\frac{C_0}{m!}$$

Et $f(\rho)=\sum_{m=0}^{+\infty}C_{m+1}\cdot\rho^{l+1+2(m+1)}$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{C_0}{m!}\cdot\rho^{l+1}\cdot\rho^2\cdot\rho^{2m}$$

$$=C_0\cdot\rho^{l+1}\cdot\rho^2\cdot\underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\rho^2)^m}{m!}}_{=e^{\rho^2}}$$

$$=C_0\cdot\rho^{l+1}\cdot\rho^2\cdot e^{\rho^2}$$

D'où $f(\rho)\propto\rho^2\cdot e^{\rho^2}$ ce qui est $u(\rho)\propto e^{+\rho^2/2}$

Impossible car on a montré que $u(\rho)\propto e^{-\rho^2/2}$

Ceci devient possible si $\gamma=0 \Longleftrightarrow \varepsilon=3+2l+4m$

Ce qui est $E = \frac{\hbar\omega}{2} \cdot (3 + 2l + 4m)$

3.3)- Les états d'énergie du nucléon sont donc :

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} \cdot (3 + 2l + 4m) \quad ; \quad l = 0; 1; 2 \ldots \quad m = 0; 1; 2 \ldots$$

4)- Dégénérescence des états s : $\cancel{N = l + 2m = 1}$

$2l+1 = 1$

Dégénérescence des états p : $\cancel{N = 1 + 2 \times 1} = 3$

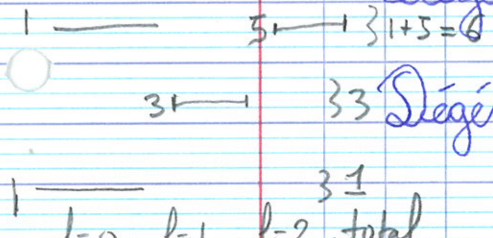
$2l+1 = 3$

Dégénérescence des états d : $\cancel{N = 2 + 2 \times 2} = 6$

$2l+1 = 5$

Dégénérescence des états f : $\cancel{N = 4 + 2 \times 3} = 10$

$2l+1 = 7$



Au total, Dégénérescence N=0 1
N=1 3
N=2 1(s)+5(D) = 6
etc...

Calcul en coordonnées cartésiennes :

On a $H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} M\omega^2 R^2$

$$= \underbrace{\frac{P_x^2}{2M} + \frac{1}{2} M\omega^2 R_x^2}_{H_x} + \underbrace{\frac{P_y^2}{2M} + \frac{1}{2} M\omega^2 R_y^2}_{H_y}$$

$$+ \underbrace{\frac{P_z^2}{2M} + \frac{1}{2} M\omega^2 R_z^2}_{H_z}$$

$$= H_x + H_y + H_z$$

Or $[H_x ; H_y] = [H_x ; H_z] = [H_y ; H_z] = 0$ et $H\varphi = e\varphi$

$\Rightarrow H(\varphi_x ; \varphi_y ; \varphi_z) = (e_x + e_y + e_z)(\varphi_x ; \varphi_y ; \varphi_z)$

Avec $e_x = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$

D'où $E = (\underbrace{n_x + n_y + n_z}_{N} + 3/2) \hbar\omega$

$= (N + 3/2) \hbar\omega$

On retrouve :

$N = 0 \longrightarrow n_x = n_y = n_z = 0$ 1 dégénérescence

$N = 1 \longrightarrow n_x = 100 \quad n_y = 010 \quad n_z = 001$

3 dégénérescences

$N = 2 \longrightarrow n_x = 110 \quad n_y = 101 \quad n_z = 011$

$\qquad\qquad\qquad 200 \qquad\quad 020 \qquad\quad 002$

6 dégénérescences

$N = 3 \longrightarrow n_x = 1223 \quad n_y = 1100 \quad n_z = 1010$

$\qquad\qquad\qquad 0000 \qquad 2130 \qquad 1203$

$\qquad\qquad\qquad 11 \qquad\quad 20 \qquad\quad 02$

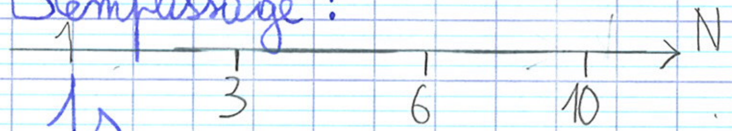
10 dégénérescences

5)- On peut mettre 2 neutrons par dégénérescence.

$\left.\begin{array}{l}\text{Niveau 0 : 2 neutrons} \\ \text{Niveau 1 : 6 neutrons}\end{array}\right\}$ Total = 8

Niveau 2 : 12 neutrons + 8 neutrons précédents
= 20 neutrons au total

Remplissage :



1s — 2 neutrons

2s 2p — $2+2\times3 = 8$ neutrons

3s 3p 3d — $2+2\times3+2\times6 = 20$ neutrons

4s 4p 4d 4f

Exercice n°2 : Etats liés coulombiens

1)-