

# Équations algébriques et différentielles, circuits électriques, collisions

Jean-Marc Richard

27 septembre 2010

## Résumé

Ces notes de cours servent de support pour la Licence Pro. Elles contiennent des rappels sur les équations du second degré, les équations différentielles, les circuits électriques et les chocs.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Équation du second degré</b>	<b>3</b>
1.1	Résolution . . . . .	3
1.2	Propriétés des racines . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Équations différentielles</b>	<b>4</b>
2.1	Rappels sur la dérivée . . . . .	4
2.2	Primitives et intégrales . . . . .	6
2.3	Équations différentielles du premier ordre . . . . .	7
2.3.1	Considérations qualitatives . . . . .	7
2.3.2	Équations du premier ordre se ramenant à une intégration . . . . .	8
2.3.3	Équations du premier ordre linéaires . . . . .	8
2.3.4	Équation du premier ordre linéaire à coefficient constant . . . . .	8
2.3.5	Équation linéaire avec second membre . . . . .	9
2.4	Équation différentielles du second ordre . . . . .	10
2.4.1	Équations homogènes . . . . .	10
2.4.2	Excitation sinusoïdale, résonance . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Circuits électriques</b>	<b>14</b>
3.1	Dipôles de base . . . . .	14
3.1.1	Résistance . . . . .	14
3.1.2	Condensateur . . . . .	14
3.1.3	Bobine d'autoinduction . . . . .	15
3.2	Circuits élémentaires . . . . .	15

3.2.1	Extinction du courant . . . . .	15
3.2.2	Établissement du courant . . . . .	16
3.2.3	Décharge d'une condensateur . . . . .	16
3.2.4	Charge du condensateur . . . . .	17
3.3	Circuit <i>RLC</i> . . . . .	17
3.3.1	Oscillations libres . . . . .	17
3.3.2	Circuit <i>RLC</i> soumis à une tension sinusoïdale . . . . .	19
3.3.3	Résonance . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Désintégrations et chocs</b>	<b>23</b>
4.1	Généralités . . . . .	23
4.1.1	Définitions . . . . .	23
4.1.2	Précautions . . . . .	23
4.1.3	Conservation de l'énergie . . . . .	23
4.1.4	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	24
4.1.5	Théorème de König et son interprétation . . . . .	24
4.1.6	Choix du référentiel . . . . .	24
4.2	Désintégrations . . . . .	24
4.2.1	Désintégration à l'arrêt en deux corps . . . . .	24
4.2.2	Désintégration binaire en vol . . . . .	25
4.2.3	Désintégration en trois corps . . . . .	26
4.3	Chocs binaires élastiques . . . . .	26
4.3.1	Chocs colinéaires . . . . .	26
4.3.2	Chocs non colinéaires . . . . .	28
4.3.3	Exemples de détermination de l'angle de diffusion . . . . .	30
4.3.4	Angles et énergies pour un choc élastique . . . . .	31
4.3.5	Effet Compton . . . . .	32
4.4	Collisions inélastiques . . . . .	33
4.4.1	Cas classique et cas microscopique . . . . .	33
4.4.2	$Q$ d'une réaction . . . . .	34
4.4.3	Seuil d'une réaction . . . . .	34
4.4.4	Distribution angulaire des produits d'une collision inélastique . . . . .	35

# 1 Équation du second degré

## 1.1 Résolution

Il s'agit de

$$a x^2 + b x + c = 0, \quad (1)$$

dont les coefficients sont supposés réels. Nous aurons à utiliser cette équation pour des problèmes de cinématique de collisions. Nous nous contenterons de brefs rappels.

Si  $a = 0$  on est ramené à une équation du premier degré qui a une solution et une seule si  $b \neq 0$ .

Si  $a \neq 0$ , on peut réécrire l'équation comme

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, \quad (2)$$

qui est du genre  $X^2 = A$  qui a deux solutions réelles  $X = \pm\sqrt{A}$  si  $A > 0$ . L'équation originale a donc deux racines réelles  $x_1$  et  $x_2$  si  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ . Si  $\Delta = 0$  les deux racines sont confondues, sinon elles sont différentes. Leur expression est

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3)$$

## 1.2 Propriétés des racines

Souvent on n'a pas besoin des solutions explicites, mais seulement de leur somme et de leur produit que l'on peut obtenir directement en identifiant

$$a x^2 + b x + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \quad (4)$$

### Exercices

1. À quelle condition (1) a-t-elle une racine double ?
2. À quelle condition  $x = 1$  est-il solution de (1) ?
3. Vérifier que  $x = 2$  est solution de  $x^2 + x - 6 = 0$ . En déduire l'autre racine.
4. Quelle est la somme des racines de (1) si elles existent ? et la produit ?
5. Montrer, de préférence sans calcul, que les racines de  $x^2 + 7x + 10 = 0$  sont forcément négatives.
6. Montrer que si  $\lambda < 0$ ,  $x^2 + x + \lambda = 0$  a deux racines.
7. Quel lien existe-t-il entre (1) et  $c x^2 + b x + a = 0$  ?
8. Résoudre  $(x - 1)^2 - 3 = 0$

## 2 Équations différentielles

### 2.1 Rappels sur la dérivée

Si une fonction  $f(x)$  est suffisamment régulière, elle peut être approchée au voisinage d'un point  $\{x_0, f(x_0)\}$  par la droite

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) , \quad (5)$$

et  $f'(x_0)$ , la pente de la droite, est appelée la *dérivée* de la fonction en  $x_0$ . Voir figure 1.

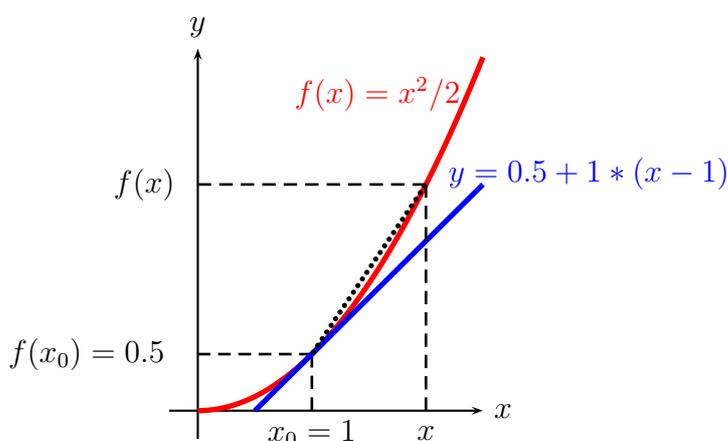


FIGURE 1 – Au point  $x_0 = 1$ , la fonction  $f(x) = x^2/2$  a une dérivée  $f'(x_0) = 1$ , et la courbe représentative est approchée par la droite de pente 1 qui passe par le point  $\{x_0, f(x_0)\} = \{1, 0.5\}$ .

La dérivée est la limite de la pente de la corde tendue entre les points  $\{x, f(x)\}$  et  $\{x_0, f(x_0)\}$  quand  $x$  se rapproche de  $x_0$ , soit

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} , \quad (6)$$

Cette propriété est à l'origine de la notation différentielle pour la dérivée

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} . \quad (7)$$

Les exceptions à la dérivabilité sont les points anguleux (par exemple  $f(x) = |x|$  en  $x = 0$ ) ou les fonctions discontinues, pour lesquelles on ne peut définir de dérivée.

Le calcul des dérivées est assez systématique. On apprend quelques dérivées de base et on utilise des règles de combinaison. Quelques dérivées courantes sont rappelées dans la table 1.

TABLE 1 – Quelques dérivées courantes.

$f(x)$	$x^n$	$\ln x$	$\exp(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$f'(x)$	$nx^{n-1}$	$1/x$	$\exp(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Par ailleurs, on démontre les règles de dérivation des sommes, différences, produits et quotients et aussi des fonctions de fonction,

$$\begin{aligned} (u+v)' &= u' + v' , & (u-v)' &= u' - v' , \\ (uv)' &= u'v + uv' , & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} , \\ \left(\frac{1}{v}\right)' &= -\frac{v'}{v^2} & f[g(x)]' &= f'g' , \end{aligned} \quad (8)$$

où  $g' = g'(x)$  est la dérivée de  $g$  au point  $x$  et  $f' = f'(y)$  est la dérivée de  $f$  au point  $y = g(x)$ . En particulier, si  $g$  n'est qu'une fonction linéaire,  $dg(ax)/dx = ag'(ax)$ . Par exemple, la dérivée de  $\cos(2x)$  est  $-2\sin(2x)$ .

On utilisera souvent la propriété de l'exponentielle d'être sa propre dérivée, et plus généralement, pour  $\exp(ax)$  d'avoir une dérivée qui ne diffère que du facteur  $a$ ,

$$\frac{d \exp(ax)}{dx} = a \exp(ax) , \quad (9)$$

Autres propriétés utiles pour la suite : que dire de deux fonctions qui ont même dérivée? elles sont égales à une constante additive près. Que dire de deux fonctions qui ont même *dérivée logarithmique*, définie comme le rapport  $f'/f$ ? elles sont égales à un facteur multiplicatif près.

$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + C^{\text{te}} , \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} \Rightarrow f(x) = C^{\text{te}} g(x) . \quad (10)$$

On peut aussi remarquer que les dérivées de deux fonctions *réciproques* (on dit parfois inverses pour simplifier) sont inverses l'une de l'autre; Si  $y(x)$  est monotone et continue sur un intervalle, on peut définir la fonction réciproque  $x(y)$  et le résultat est

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} , \quad (11)$$

ce qui est plus intuitif dans la notation différentielle,  $dx/dy = 1/(dy/dx)$ .

En dérivant la dérivée, on obtient la *dérivée seconde*,  $f''(x)$ , dont le signe est lié à la concavité locale de la courbe. On généralise facilement à la dérivée d'ordre  $n$  notée  $f^{(n)}$ .

## Exercices

9. Calculer la dérivée de  $\tan(x)$  et celle de  $\tan(x/2)$ .
10. Calculer la dérivée de  $\ln((x+2)/(x+1))$ .
11. Calculer la dérivée de  $\exp(x^2)$ .
12. Quelles sont toutes les fonctions dont la dérivée logarithmique est  $f'(x)/f(x) = 2x$ ?
13. Rappeler le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction.
14. Généraliser les règles ci-dessus pour la dérivée  $(uvw)'$  et pour  $(u^n)'$  où  $n$  est un exposant constant.

## 2.2 Primitives et intégrales

La démarche inverse du calcul de la dérivée est celui d'une primitive, définie à une constante additive près. On note parfois

$$F(x) = \int^x f(x) dx \Rightarrow F'(x) = f(x) . \quad (12)$$

Par exemple, si  $f(x) = \sin(x)$ ,  $F(x) = 2 - \cos(x)$  est un choix possible. Si, par exemple, on recherche la primitive de  $\sin(x)$  qui vaut  $F(0) = 3$  pour  $x = 0$ , alors la réponse est  $F(x) = 4 - \cos(x)$ .

Noter qu'alors que le calcul des dérivées est assez systématique et fait intervenir les mêmes fonctions de base (puissances, exponentielles, fractions, ...) que la fonction de départ, il arrive souvent qu'on ne puisse écrire une primitive avec les fonctions élémentaires. Il a fallu par exemple inventer la fonction logarithme pour trouver une primitive à une fonction aussi simple que  $1/x$ .

### Exercices

15. Trouver une primitive de  $\sin(3x)$ .
16. Trouver la primitive de  $\exp(-3x)$  qui s'annule pour  $x = 0$ .
17. Une particule de masse  $m = 1$  est soumise à une force  $f(t) = \alpha t$  avec  $\alpha = 2$  dans le système d'unités utilisé. On suppose qu'au départ,  $t = 0$ , la vitesse est  $v(0) = 1$  et la position  $x = 0$ . Trouver la vitesse  $v(t)$  en fonction du temps, puis la loi horaire  $x(t)$ .

Si la primitive  $F(x)$  d'une fonction  $f(x)$  est définie à une constante additive près, la différence entre la valeur en deux points,  $F(b) - F(a)$ , fait disparaître la constante arbitraire et correspond donc à une propriété intrinsèque de la fonction  $f(x)$ . On la note

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx , \quad (13)$$

et son interprétation géométrique est la surface comprise entre la courbe et l'axe  $x$ . Voir Fig. 2. La convention de signe est que cette aire est positive si  $f(x) > 0$  et  $a < b$ , avec changement de signe chaque fois que l'une de ces conditions est inversée.

Très proche est la *valeur moyenne d'une fonction* entre  $a$  et  $b$ ,

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx , \quad (14)$$

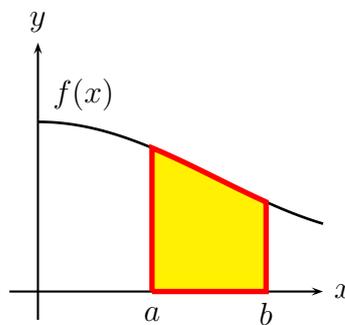


FIGURE 2 – L'intégrale entre  $a$  et  $b$  correspond à l'aire entre la courbe et l'axe  $x$ .

## Exercices

18. Calculer  $\int_0^2 \exp(-2x) dx$ .
19. Un courant alternatif a une valeur  $I(t) = I_m \cos(\omega t)$  avec  $I_m = 1$  A et  $\omega = 2\pi\nu$  et  $\nu = 50$  Hz. Montrer que pour alimenter un radiateur électrique de chauffage sur un nombre entier de périodes, ce courant se comporte comme un courant continu  $I_e$ . Trouver la relation entre  $I_m$  et  $I_e$ .

## 2.3 Équations différentielles du premier ordre

Une équation différentielle est une relation entre une fonction, sa variable et ses dérivées. Complétée par une nombre suffisant de *conditions limites*, elle permet de déduire la fonction.

Nous avons déjà vu l'exemple  $\{f'(x) = \sin(x), f(0) = 3\}$  dont la solution est  $f(x) = 4 - \cos(x)$ . Le mouvement d'une masse au bout d'un ressort, en mécanique, est gouverné par  $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$ , où  $\omega^2 = k/m$  est une constante liée à la raideur du ressort et à l'inertie de la masse ; on peut résoudre cette équation si on connaît  $y(0)$  et  $y'(0)$ .

En général, les équations différentielles ne peuvent être résolues analytiquement et requièrent des procédés numériques. Mais les équations les plus simples, en particulier, les équations linéaires à coefficients constants, peuvent être traitées exactement.

### 2.3.1 Considérations qualitatives

Une équation du premier ordre implique une constante arbitraire et donc une condition limite. Une équation du second ordre exige deux conditions limites, etc.

Prenons l'exemple de l'équation  $y'(x) + y(x)^3 = 0$ , avec, disons,  $y(0) = 1$ , et intéressons nous au comportement près du départ. Imaginons que l'on vous propose trois solutions, celles qui sont tracées sur la Fig. 3. La courbe rouge pleine est raisonnable : si  $y > 0$ , alors  $y' < 0$  d'après l'équation différentielle. Celle en bleu pointillé, ne convient pas (on a artificiellement remplacé  $y^3$  par  $-y^3$  dans le logiciel), car on ne peut avoir  $y > 0$  et  $y' > 0$  au même point. La courbe verte avec des points, semble convenir au début. Mais le changement de signe est inadmissible. S'il existe un point  $x_0$  où  $y(x_0) = 0$ , alors  $y'(x_0) = 0$ , ce qui n'est visiblement pas le cas (on a artificiellement multiplié la bonne solution par un facteur faux  $\cos(4x)$ ).

Les considérations de ce genre permettent de détecter bien des erreurs de calcul !

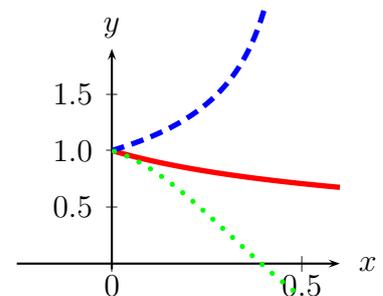


FIGURE 3 – Trois propositions pour l'équation différentielle  $y' + y^3 = 0$  avec  $y(0) = 1$ . Trouver les deux intruses.

### 2.3.2 Équations du premier ordre se ramenant à une intégration

Le cas le plus simple est  $y' = f(x)$  avec  $y(x_0) = y_0$  comme condition limite. Alors, on obtient  $y(x)$  par simple intégration, soit

$$\{y' = f(x), y(x_0) = y_0\} \Rightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x) dx, \quad (15)$$

Malheureusement, la physique produit plutôt des équations différentielles du genre  $y'(t) = g(y)$ , où la dérivée est exprimée à partir de la *fonction* inconnue  $y$  et non de la variable  $t$ . Prenons la vitesse d'une masse lancée et subissant un frottement visqueux : la loi de Newton donne  $m dv(t)/dt = -\lambda v(t)$ . Un exemple similaire est la radioactivité : la population  $N(t)$  évolue selon  $dN(t)/dt = -\lambda N(t)$ .

La méthode générale (qu'il faudra vite oublier !) est de se souvenir du résultat (11) sur les fonctions réciproques. La relation  $y'(t) = g(y)$  peut se réécrire  $t'(y) = 1/g(y) \equiv h(y)$ . On est donc ramené au cas précédent. Mais dans les exemples les plus courants, les équations différentielles sont linéaires, et on peut les résoudre directement, sans passer par la fonction réciproque.

### 2.3.3 Équations du premier ordre linéaires

Nous recherchons une fonction  $y(t)$  qui satisfait

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0, \quad y(0) = y_0. \quad (16)$$

Nous avons déjà remarqué que si  $a(t) > 0$ , la fonction  $y(t)$  décroîtra vers 0 si  $y_0 > 0$ , et croîtra vers 0 si  $y_0 < 0$ . On a les caractéristiques d'une modération. Ce sera la cas inverse si  $a(t) < 0$ .

Mais la caractéristique la plus importante est la *linéarité*. Si  $y(t)$  est solution,  $\alpha y(t)$  est aussi solution, quelque soit la constante  $\alpha$ . Il suffit donc de résoudre une seule fois l'équation différentielle. Si la valeur initiale change de  $y_0$  à  $y_1$ , il suffit de modifier la solution par un facteur  $y_1/y_0$ .

### 2.3.4 Équation du premier ordre linéaire à coefficient constant

Il s'agit de  $y'(t) + a y(t) = 0$  où  $a$  est constant. D'après les calculs de dérivées, on constate immédiatement que  $\exp(-at)$  est solution. Toutes les solutions sont donc proportionnelles à cette exponentielle. En résumé

$$\{y'(t) + a y(t) = 0, y(0) = y_0\} \Rightarrow y(t) = y_0 \exp(-at). \quad (17)$$

### Exercices

20. Donner la solution de cette même équation avec la condition limite  $y(t_0) = y_0$ .
21. Si  $t$  est un temps, et que  $a = 2,2 \text{ s}^{-1}$ , au bout de combien de temps  $y(t)$  ne vaut-il plus que 1% de sa valeur initiale ?

### 2.3.5 Équation linéaire avec second membre

Si une particule tombe avec frottement visqueux, elle est soumise à un frottement  $-\lambda v(t)$  et son poids  $mg$ , si l'axe est orienté vers la bas. la loi de Newton, pour la vitesse, prend la forme  $m dv/dt + \lambda v = m g$ . On verra au chapitre suivant l'évolution de la tension aux bornes d'un condensateur  $C$  chargé à travers une résistance  $R$  par une pile de f.e.m.  $e$ , régie par l'équation  $dU/dt + RC U(t) = RC e$ .

Considérons donc l'équation non plus linéaire mais affine,

$$y'(t) + a(t) y(t) = f(t) , \quad (18)$$

dite encore « équation linéaire avec second membre », dont les exemples ci-dessus sont des réalisations avec  $a(t)$  et  $f(t)$  constants. Supposons que nous connaissions une solution particulière  $y_1(t)$ , soit

$$y_1'(t) + a(t) y_1(t) = f(t) . \quad (19)$$

On voit en retranchant membre à membre que la différence  $u(t) = y(t) - y_1(t)$  satisfait l'équation homogène (sans second membre)

$$u'(t) + a(t) u(t) = 0 . \quad (20)$$

D'où le résultat : la solution la plus générale de (18) est la somme d'une solution particulière et de la solution la plus générale de l'équation homogène associée.

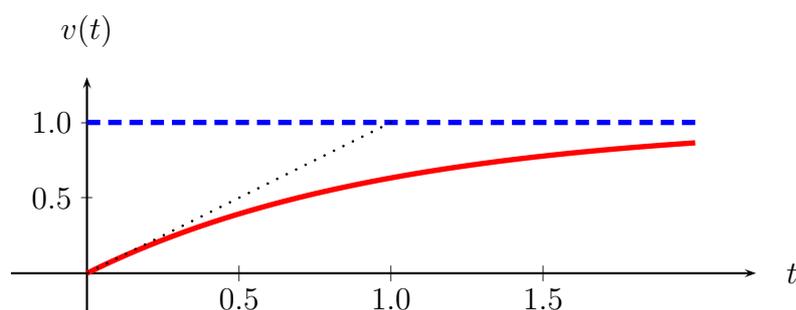


FIGURE 4 – Montée en régime de la vitesse lors d'une chute libre avec freinage visqueux.

Prenons le cas de la chute libre, soit  $m \dot{v} + \lambda v = m g$ . La notation  $\dot{v}$ ,  $\ddot{v}$  est souvent utilisée en mécanique pour indiquer les dérivées par rapport au temps. On connaît physiquement une solution particulière,  $v_1 = g/\lambda$ . C'est la vitesse limite. Elle correspond à une neutralisation entre le poids  $m g$  et la résistance de l'air  $\lambda v$ . On a donc

$$\begin{aligned} m \dot{v} + \lambda v &= m g , \\ \lambda v_1 &= m g , \end{aligned} \quad (21)$$

et donc par soustraction, pour  $u(t) = v(t) - v_1$ , l'équation homogène

$$m \dot{u} + \lambda u(t) = 0 , \quad (22)$$

dont la solution est  $u(t) = u(0) \exp[-(\lambda/m)t]$ , avec  $u(0) = v(0) - v_1$ . Au total,

$$v(t) = \frac{g}{\lambda} + \left[ v(0) - \frac{g}{\lambda} \right] \exp[-(\lambda/m)t] , \quad (23)$$

représentée dans la figure, en supposant que  $v(0) = 0$  et  $g/\lambda = \lambda/m = 1$ . On voit la montée exponentielle vers la vitesse limite, que nous retrouverons pour la charge d'un condensateur.

## Exercices

22. Au bout de combien de temps, dans l'exemple ci-dessus, atteint-on la vitesse limite à 1% près ?
23. Montrer que la tangente à l'origine coupe l'asymptote au temps  $t = m/\lambda$ .
24. Tracer l'analogie de la courbe ci-dessus avec une vitesse initiale vers le haut égale à  $v(0) = -1$ .
25. Idem avec une vitesse initiale égale à  $+2$ .

## 2.4 Équation différentielles du second ordre

Le passage du premier au second ordre ne pose pas de difficulté de principe, mais les calculs sont souvent plus compliqués. En particulier, il faut deux conditions limites pour fixer complètement la solution.

### 2.4.1 Équations homogènes

On se bornera ici au cas des équations linéaires à coefficients constants. Les exemples les plus connus sont ceux d'un oscillateur amorti et d'un circuit  $RLC$ ,

$$m \ddot{y}(t) + \lambda \dot{y}(t) + k y(t) = 0, \quad L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (24)$$

Le caractère *positif* des coefficients est remarquable, et on doit se poser des questions si on tombe un jour sur un coefficient négatif (c'est possible, on fabrique en électronique des résistances négatives, mais il faut vérifier qu'il s'agit bien d'une vraie propriété du montage, et non pas d'une erreur de calcul).

Supposons qu'en un point, disons  $t_0$ , on ait  $y(t_0) > 0$  et  $y'(t_0) > 0$ , soit une vélocité de croissance. On voit que  $y''(t_0) < 0$ , ce qui signifie un infléchissement de cette croissance : l'équation différentielle a des propriétés modératrices. Une solution qui explose comme  $y(t) \propto \exp(3t)$  serait impossible pour une telle équation.

L'autre propriété remarquable, c'est la linéarité, qui fait qu'à partir de deux solutions,  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ , on construit toutes les autres par combinaisons linéaires,

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t). \quad (25)$$

et les deux constantes sont déterminées par les deux conditions limites, le plus souvent  $y(0)$  et  $y'(0)$ . Pour les équations à coefficients constants, on cherche les solutions de base comme des exponentielles ou des fonctions sinus ou cosinus.

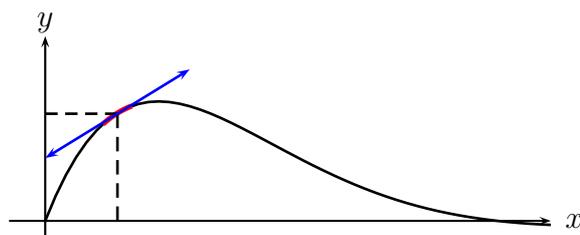


FIGURE 5 – Une solution de  $y'' + ay' + by = 0$  avec  $a > 0$  et  $b > 0$  est amortie.

**Cas sans amortissement** Il s'agit par exemple d'un circuit  $RL$  ou d'un ressort sans frottement visqueux, avec une équation différentielle

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0 , \quad (26)$$

qui a pour solutions particulières  $y_1(t) = \cos(\omega_0 t)$  et  $y_2(t) = \sin(\omega_0 t)$ , et donc la solution générale (25), que l'on peut aussi réécrire

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) , \quad (27)$$

pour faire apparaître l'amplitude et la phase.

**Explosion** Noter que si on change le signe du coefficient relatif de  $y''$  et  $y$ , le comportement est tout à fait différent :

$$y''(t) - \chi^2 y(t) = 0 , \quad \Rightarrow \quad y(t) = \alpha_1 \exp(-\chi t) + \alpha_2 \exp(\chi t) . \quad (28)$$

**Exemple avec amortissement fort** Considérons :

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0 , \quad y(0) = y_0 , \quad y'(0) = y'_0 , \quad (29)$$

solution, car en partant de  $\exp(rt)$ , on obtient  $r \exp(rt)$ ,  $r^2 \exp(rt)$ , etc., pour les dérivées successives, et il n'y a qu'à déterminer  $r$  pour que ça marche. l'équation algébrique particulières  $y_1(t) = \exp(-t)$  et  $y_2(t) = \exp(-3t)$ , et donc la solution générale différentielle (on et utilisons la relation  $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$  qui généralise le résultat  $(uv)' = u'v + uv'$  pour la dérivée première d'un produit. En posant  $y(t) = \exp(-2t)u(t)$  et en simplifiant on obtient pour  $u(t)$

$$u''(t) - u(t) = 0 , \quad u(0) = y_0 , \quad u'(0) = y'_0 - 2y_0 , \quad (30)$$

qui montre que  $u(t)$  est une combinaison linéaire des solutions particulières  $u_1(t) = \exp(-t)$  et  $u_2(t) = \exp(+t)$ , soit, en ajustant les conditions initiales,

$$u(t) = \frac{3y_0 + y'_0}{2} \exp(+t) - \frac{y_0 + y'_0}{2} \exp(-t) , \quad (31)$$

et finalement

$$y(t) = \frac{3y_0 + y'_0}{2} \exp(-t) - \frac{y_0 + y'_0}{2} \exp(-3t) . \quad (32)$$

**Exemple avec amortissement faible** Considérons

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 0 , \quad y(0) = y_0 , \quad y'(0) = y'_0 . \quad (33)$$

La même manipulation montre que si on pose  $y(t) = \exp(-t)u(t)$ , alors

$$u''(t) + 2u(t) = 0 , \quad (34)$$

qui est une équation d'oscillation de pulsation  $\sqrt{2}$ , si bien que la solution générale peut s'écrire (on donne ici deux manières possibles),

$$y(t) = \exp(-t) \left[ \alpha_1 \cos(t\sqrt{2}) + \alpha_2 \sin(t\sqrt{2}) \right] = A \exp(-t) \cos(t\sqrt{2} + \varphi) , \quad (35)$$

où les constantes d'intégration,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , ou  $A$  et  $\varphi$  selon la formule choisie, peuvent être exprimées en fonction des conditions initiales.

### 2.4.2 Excitation sinusoïdale, résonance

Il s'agit d'un oscillateur électrique ou mécanique amorti soumis à une tension ou force supplémentaire proportionnelle à  $\cos(\omega t)$ . L'équation est donc

$$x''(t) + 2\alpha x'(t) + \omega_0^2 x(t) = \gamma \cos(\omega t) . \quad (36)$$

La solution la plus générale est faite d'une solution particulière, et d'une solution quelconque de l'équation homogène associée. Cette dernière varie d'un cas à l'autre, selon les conditions initiales, mais elle décroît exponentiellement, avec ou sans oscillations, et ne contribue donc qu'à ce qu'on appelle le *régime transitoire*.

Le régime transitoire est très intéressant dans nombres d'applications, mais on a aussi souvent à examiner le *régime permanent* d'un système soumis à une excitation périodique : circuit *RLC* alimenté par un générateur BF, pont soumis à un piétinement régulier, oscillateur excité par un électro-aimant, etc. On cherche donc souvent *la* solution particulière sinusoïdale, soit  $x(t) = x_m \cos(\omega t - \phi)$ .

**Méthode algébrique** Un calcul algébrique un peu fastidieux donne une solution

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} , \\ \cos \phi &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} , \quad \sin \phi = \frac{2\alpha\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} . \end{aligned} \quad (37)$$

**Diagramme de Fresnel** En fait, on peut représenter *géométriquement* le problème et le résoudre plus simplement. La quantité  $x(t) = x_m \cos(\omega t - \phi)$ ,  $x_m > 0$  est la projection horizontale d'un vecteur tournant de longueur  $a$  et d'angle  $\omega t - \phi$  par rapport à l'horizontale.

Il faut remarquer que  $x'(t)$  a une longueur multipliée par  $\omega$  et une phase augmentée de  $\pi/2$ , car

$$[\cos(\omega t)]' = \omega \cos(\omega t + \pi/2) , \quad (38)$$

Autrement dit, la dérivée première est représentée par un vecteur directement perpendiculaire et de longueur multipliée par  $\omega$ , la dérivée seconde par un vecteur opposé et de longueur multipliée par  $\omega^2$ , etc.

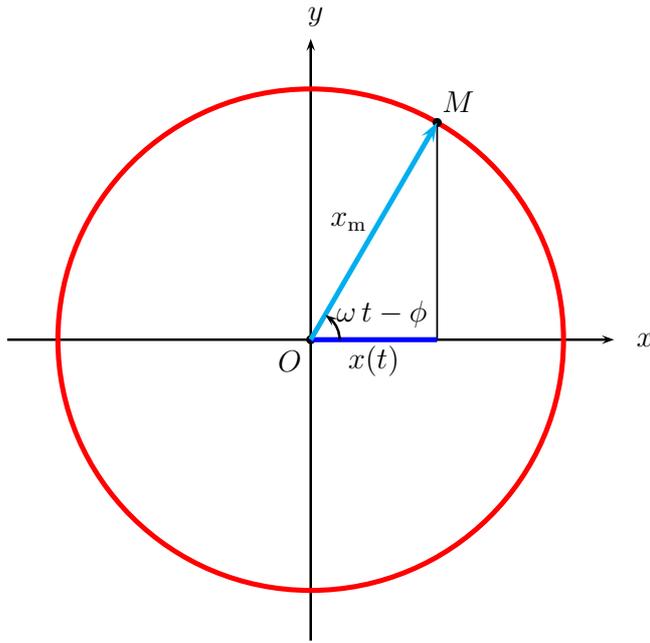


FIGURE 6 – Si le vecteur  $OM$ , de longueur  $x_m$  tourne à vitesse angulaire constante, avec un angle au centre  $\omega t - \phi$ , la projection horizontale a une mesure algébrique sinusoïdale  $x(t) = x_m \cos(\omega t - \phi)$ .

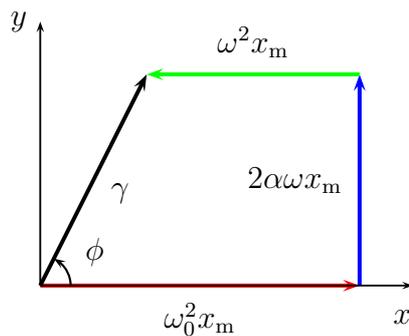


FIGURE 7 – Diagramme de Fresnel pour un oscillateur excité par une force sinusoïdale

L'équation (36) a l'interprétation géométrique suivante, si on recherche la solution sinusoïdale  $x(t) = x_m \cos(\omega t - \phi)$ . On prend  $\omega t - \phi$  comme référence des phases, et on trace  $\omega_0^2 x_m$ , horizontal, on le prolonge par  $2\alpha\omega x_m$  vertical, et on complète par  $\omega^2 x_m$ , horizontal vers l'arrière. Le tout, d'après (36) doit donner un vecteur de longueur  $\gamma$  et de phase  $+\phi$  par rapport à la référence. Il devient alors un simple exercice sur les triangles rectangles de déduire la solution (37).

Nous verrons dans le chapitre suivant qu'en électricité, on caractérise la solution non pas par  $y(t)$  (qui serait la charge du condensateur dans un circuit  $RLC$ ), mais par sa dérivée  $y'(t)$ , qui correspond à l'intensité. Alors, il y a un facteur supplémentaire  $\omega$  dans l'amplitude et un décalage de  $\pi/2$  dans le déphasage.

Nous verrons aussi que si le terme d'amortissement  $\alpha$  est petit, la réponse du système dépend de façon assez sensible de la pulsation d'attaque  $\omega$ , surtout quand celle-ci est proche de la pulsation intrinsèque du système,  $\omega_0$ .

## Exercices

26. Démontrer (31).
27. Montrer que  $\exp(-t)$  et  $t \exp(-t)$  sont deux solutions indépendantes pour  $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$ .

28. Si une horloge comtoise est un peu rouillée, quel est son défaut dominant : elle retarde ou elle nécessite un remontage plus fréquent ? Aide : considérer  $y''(t) + 2\alpha y(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$  pour  $\alpha$  petit.

### 3 Circuits électriques

Les régimes variables seront l'occasion de mettre en œuvre les méthodes développées pour les équations différentielles linéaires.

#### 3.1 Dipôles de base

##### 3.1.1 Résistance

Une résistance pure  $R$  est régie par la loi d'Ohm et la tension  $U$  aux bornes et l'intensité  $i$  qui la traverse sont reliées par

$$U = Ri, \quad P = Ui = \frac{U^2}{R} = Ri^2, \quad (39)$$

d'où on déduit les différentes expressions pour la puissance dissipée  $P$ . Noter la convention utilisée pour représenter  $U = U(A) - U(B)$ , avec  $U > 0$  si  $i > 0$ . Si on définit  $U = U(B) - U(A)$ , la flèche sera en sens inverse.

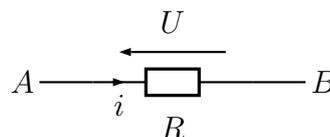


FIGURE 8 – Dipôle  $R$

##### 3.1.2 Condensateur

Un condensateur parfait  $C$  porte des charges opposées sur ces armatures. Convenons qu'il s'agit de  $+q$  à gauche et  $-q$  à droite. Avec cette convention,  $i = dq/dt$  (un courant  $i$  pendant un temps  $dt$  apporte une charge  $dq = idt$  sur l'armature gauche). La tension est  $U = U(A) - U(B) = q/C$ . L'énergie stockée dans le condensateur est

$$W = \frac{1}{2}qU = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2. \quad (40)$$

Cette énergie est portée par le champ électrique entre les deux armatures. D'où vient ce facteur  $1/2$ ? Imaginons que la charge soit apportée progressivement. On passe de  $xq$  à  $(x+dx)q$ , et  $x$  augmente régulièrement de  $x = 0$  à  $x = 1$ . À l'étape intermédiaire de charge  $xq$ , la tension est  $xq/C$ , donc le travail fourni pour apporter la charge supplémentaire  $qdx$  est le produit de la charge par le potentiel, soit  $(q^2/C)x^2 dx$ . L'énergie stockée dans le condensateur est la somme de ces travaux, soit

$$W = \frac{q^2}{C} \int_0^1 x^2 dx, \quad (41)$$

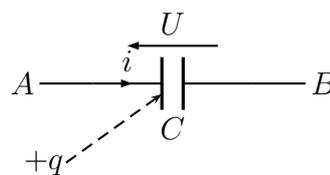


FIGURE 9 – Dipôle  $C$

ce qui permet de retrouver le résultat. C'est exactement l'analogie électrique de l'énergie potentielle mécanique d'un ressort étiré,  $k y^2/2$ .

### 3.1.3 Bobine d'autoinduction

Une bobine  $L$ , parcourue par un courant  $i$ , crée dans la zone intérieure un champ magnétique proportionnelle à  $i$ , qui correspond à un flux propre  $\Phi = L i$ . Quand le courant varie, la bobine est le siège d'une *force électromagnétique d'induction* donnée par la loi de Faraday  $e = -d\Phi/dt$ , soit ici

$$U = U(A) - U(B) = L \frac{di}{dt} . \quad (42)$$

L'énergie stockée dans la bobine est

$$W = \frac{1}{2} L i^2 . \quad (43)$$

Cette énergie est portée par le champ *magnétique* à l'intérieur de la bobine. D'où vient ce facteur 1/2? C'est comme pour le condensateur, l'opposition à l'apport d'énergie croît progressivement. Pour charger une pile sous tension constante  $U$ , l'énergie est  $U \int i dt$ . Ici, si le courant est  $j$  (qui variera de 0 à  $i$ ) et si on le fait passer pendant un temps  $dt$ , on apporte une charge  $j dt$  sous une tension  $L dj/dt$ , ce qui correspond à une énergie  $dW = L j dj$ , et par intégration

$$\int_0^i L j dj = \frac{1}{2} L i^2 . \quad (44)$$

## 3.2 Circuits élémentaires

### 3.2.1 Extinction du courant

Imaginons un courant  $i_0$  établi dans une résistance (grâce au générateur, avec l'interrupteur basculé à droite), et ce courant se dissipant par une self. Le bilan de tension dans le circuit, lorsque l'interrupteur est basculé à droite est

$$L \frac{di}{dt} + R i(t) = 0 , \quad i(0) = i_0 , \quad (45)$$

qui est une équation linéaire homogène du premier ordre. On a vu que la solution est exponentielle,

$$i(t) = i_0 \exp(-Rt/L) = i_0 \exp(-t/\tau) , \quad (46)$$

si on définit une constante de temps  $\tau = L/R$ . Si  $L \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow 0$ , ce qui signifie que le courant cesse instantanément. Le signe relatif des deux termes dans (45) est crucial. Une erreur, et le courant explose!

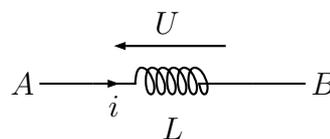


FIGURE 10 – Dipôle  $L$

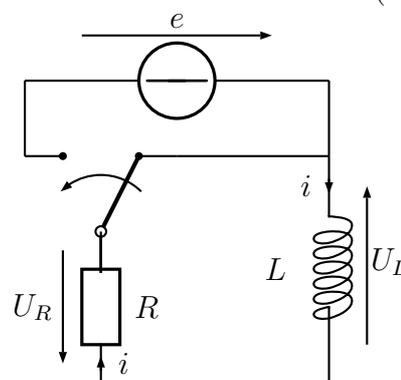


FIGURE 11 – Circuit  $RL$

On peut retrouver l'équation obtenue par addition des tensions en faisant un bilan d'énergie. L'opposé de la variation pendant  $dt$  de l'énergie stockée dans la bobine est égale à la chaleur dissipée par effet Joule, soit

$$d \left[ \frac{1}{2} L i(t)^2 \right] = -R i(t)^2 dt . \quad (47)$$

### 3.2.2 Établissement du courant

Reprenons le dispositif précédent, avec le courant nul et basculons l'interrupteur vers la gauche. L'état final est évident : un courant constant  $i_0 = e/R$ , où  $e$  est la f.e.m. du générateur, car en régime stabilisé, la self ne joue plus aucun rôle.

Pendant la période transitoire, le bilan de tension est

$$L \frac{di}{dt} + R i = e , \quad (48)$$

et d'après la théorie vue au chapitre précédent, la solution est du type

$$i(t) = i_0 + A \exp(-t/\tau) , \quad i_0 = \frac{e}{R} , \quad \tau = L/R , \quad (49)$$

où  $A$  est une constante qui est fixée par la condition initiale. Si c'est  $i(0) = 0$ , alors  $A = -i_0$  et donc

$$i(t) = i_0 [1 - \exp(-t/\tau)] , \quad (50)$$

exactement comme dans l'exemple de chute avec frottement, voir Fig. 4. L'allure de  $i(t)$  est donnée sur la Fig. 12.

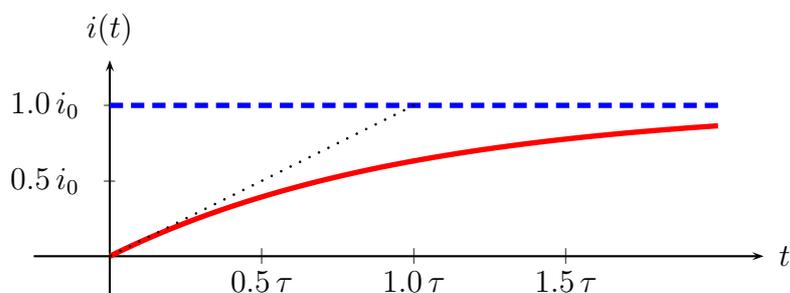
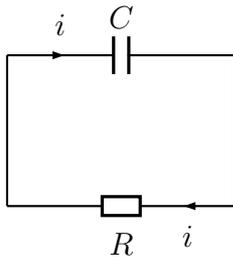


FIGURE 12 – Montée en régime du courant pour une résistance alimentée via une bobine d'autoinduction.

### Exercices

29. Vérifier la dimension de  $\tau = R/L$ .
30. Montrer que (47) redonne (45).
31. Retrouver (48) par bilan d'énergie.

### 3.2.3 Décharge d'une condensateur



Nous irons un peu plus vite ici. Le circuit est représenté sur la Fig. 13. Le bilan de tension est

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0, \quad q(0) = q_0, \quad (51)$$

soit

FIGURE 13 – Décharge  $q(t) = q_0 \exp(-t/\tau)$ ,  $\tau = RC$ . (52)  
d'un condensateur.

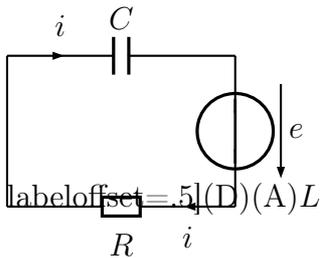
Noter que le bilan d'énergie traduirait que la *perte* d'énergie du condensateur pendant  $dt$  se dissipe en effet Joule, soit

$$-d \left[ \frac{q(t)^2}{2C} \right] = R \left( \frac{dq(t)}{dt} \right)^2 dt, \quad (53)$$

qui permet de retrouver l'équation différentielle obtenue par bilan de tension.

### 3.2.4 Charge du condensateur

Pour la charge, l'équation est, écrite pour la tension  $u(t) = q(t)/C$  aux bornes du condensateur,



$$RC \frac{du}{dt} + u(t) = e, \quad u(0) = 0, \quad (54)$$

on a visiblement la solution particulière  $u_0(t) = e$  qui correspond au régime d'équilibre. la solution est donc

$$u(t) = e [1 - \exp(-t/\tau)] , \quad \tau = RC , \quad (55)$$

FIGURE 14 – Charge d'un condensateur.

qui a exactement la même allure que la Fig. 12, *mutatis mutandis*.

## Exercices

32. Vérifier la dimension de  $\tau = RC$ .
33. Montrer que (53) redonne (51).
34. Retrouver (54) par bilan d'énergie.

## 3.3 Circuit *RLC*

### 3.3.1 Oscillations libres

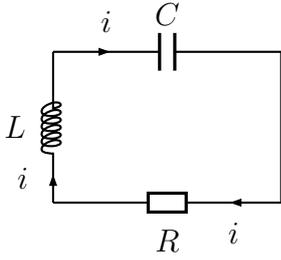


FIGURE 15 – Oscillations soit d'un circuit  $RLC$ .

Le circuit est représenté ci-contre. On imagine que le courant est « lancé » par dépôt d'une charge sur le condensateur (par un générateur branché ou débranché), ou par induction (on approche de  $L$  une bobine alimentée, puis on l'éloigne).

Le bilan de tension donne l'équation (on a toujours  $i(t) = dq(t)/dt$ )

$$L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0, \quad (56)$$

$$q''(t) + 2\alpha q'(t) + \omega_0^2 q(t) = 0, \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (57)$$

Le cas le plus simple (à part ceux vus précédemment) est évidemment celui où  $R = 0$ , soit  $\alpha = 0$ . On a des oscillations perpétuelles, l'énergie électrique du condensateur se transformant en énergie magnétique de la bobine, et *vice versa*. C'est l'analogie d'une oscillateur mécanique, avec transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique puis de nouveau en énergie potentielle, etc.

La charge du condensateur oscille alors en

$$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (58)$$

où  $\omega_0$  est un pulsation donnée par les caractéristiques  $R$  et  $L$  du circuit, tandis que  $q_m$  et  $\phi$  sont donnés par les conditions initiales.

Si  $\alpha > 0$  dans (57), on peut utiliser la méthode vue au chapitre précédent et poser  $q(t) = \exp(-\alpha t) \tilde{q}(t)$ , et obtenir

$$\tilde{q}''(t) + (\omega_0^2 - \alpha^2) \tilde{q}(t) = 0. \quad (59)$$

soit

$$[\exp(\alpha t) q(t)]'' + (\omega_0^2 - \alpha^2) [\exp(\alpha t) q(t)] = 0. \quad (60)$$

**En régime à faible résistance** ,  $\alpha < \omega_0$  ou  $R^2 < 4L/C$ , on retrouve des oscillations, de pulsation

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{4R^2}{L^2}}. \quad (61)$$

non pas pour  $q(t)$  mais pour  $\tilde{q}(t)$ , ce qui signifie que

$$q(t) = A \exp(-\alpha t) \cos(\omega t + \phi), \quad (62)$$

où  $\alpha$  et  $\omega$  sont des caractéristiques du système et  $A$  et  $\phi$  varient selon les conditions initiales.

**En régime à forte résistance** , soit  $\alpha^2 > \omega_0^2$ , on constate que  $\tilde{q}(t)$  est soumis à une équation du type (28) dont les solutions sont des exponentielles. Plus précisément, on aura

$$q(t) = a_1 \exp(-r_1 t) + a_2 \exp(-r_2 t), \quad r_1 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad r_2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad (63)$$

avec de nouveau, la distinction entre  $r_1$  et  $r_2$  qui sont des caractéristiques du système, et  $a_1$  et  $a_2$  qui dépendent des conditions initiales.

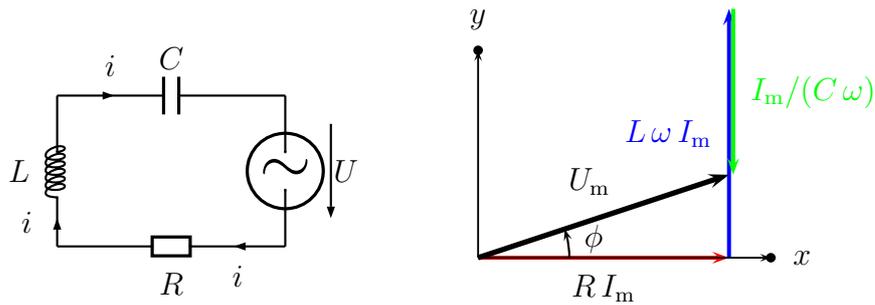


FIGURE 16 – Circuit  $RLC$  alimenté en alternatif, et diagramme de Fresnel correspondant.

### Exercices

35. Quel est le comportement à grand  $t$  de (63).
36. Montrer que (63) s'annule au plus une fois.
37. (Difficile) On fixe  $L$  et  $C$ . On part de  $R = 0$ , le système oscille indéfiniment. On augmente  $R$ , le système a des oscillations amorties. Puis on passe en régime sans oscillations, avec une superposition d'exponentielles décroissantes, voir (63). Est-il vrai qu'il faut mettre la résistance maximale pour que le système soit le mieux amorti? Ceux qui ont déjà réglé des amortisseurs de voiture connaissent sans doute la réponse.

### 3.3.2 Circuit $RLC$ soumis à une tension sinusoïdale

Considérons un circuit  $R, C, L$  comme sur le schéma ci-contre. Le bilan de tension est

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = U(t) = U_m \cos(\omega t), \quad (64)$$

avec  $i = dq/dt$  (un courant  $i$  pendant un temps  $dt$  apporte une charge  $dq = idt$  sur le condensateur, si on prend des conventions de signe cohérentes pour  $i$  et  $q$ ).

On cherche une solution

$$i(t) = i_m \cos(\omega t - \phi), \quad q(t) = \frac{i_m}{\omega} \cos(\omega t - \phi - \pi/2), \quad \frac{di}{dt} = i_m \omega \cos(\omega t - \phi + \pi/2). \quad (65)$$

Noter que le déphasage est défini par  $i(t)$ , et non pas sur  $q(t)$  comme au chapitre précédent. Avec le choix  $-\phi$  dans (65),  $\phi$  est le déphasage de la tension par rapport à l'intensité.

La représentation de Fresnel de ces équations, sur la Fig. 16 fait apparaître successivement le terme  $Ri$  en phase avec  $i$ , le terme  $Ldi/dt$  déphasé de  $+\pi/2$  et d'amplitude  $L\omega I_m$  et le terme  $q/C$ , déphasé de  $-\pi/2$ , donc opposée au précédent, et d'amplitude  $I_m/(C\omega)$ . La somme vectorielle est égale à la tension, d'amplitude  $U_m$  et de déphasage  $\phi$ . On déduit de la figure

$$U_m = I_m \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2}, \quad \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2}}, \quad \sin \phi = \frac{L\omega - 1/(C\omega)}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2}}. \quad (66)$$

alternatif la relation  $U = RI$  du courant continu. On peut noter :  $R$  résistance,  $X = L\omega - 1/(C\omega)$  réactance, et  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$  impédance. C'est encore plus court avec des nombres complexes, en notant<sup>1</sup> d'association qu'aux résistances en continu : montage en série, montage en parallèle, etc. Bien-sûr le choix de prendre  $I_m$  réel et  $I_m$  complexe est arbitraire, ce qui compte c'est la différence de phase entre les deux.

### 3.3.3 Résonance

Regardons comment varie la réponse du circuit  $RLC$  en maintenant ses caractéristiques constantes, ainsi que l'amplitude  $U_m$  du générateur BF. Plus précisément, étudions  $I_m$  et  $\phi$  en fonction de  $\omega$ , ainsi que la puissance moyenne consommée

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \phi = U_e I_e \cos \phi , \quad (67)$$

en introduisant les valeurs dites « efficaces »  $U_e = U_m/\sqrt{2}$  et  $I_e = I_m/\sqrt{2}$  de la tension et de l'intensité. Le tracé des courbes pour différentes valeurs de  $Q$  donne les résultats de la Fig. 17. Comme on ne peut varier tous les paramètres en même temps, le choix est fait que garder  $L$  et  $C$  constants et de varier la résistance  $R$ . Les notations sont :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \text{facteur de qualité} , & I_0 &= U_m \frac{C}{L} , \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \text{puls. propre} , & P_0 &= \frac{U_m I_0}{2} , \end{aligned} \quad (68)$$

On voit que si  $Q$  est grand, c'est à dire si  $R$  est faible, la résonance est très marquée, autrement dit, le circuit est très sélectif. On définit la *bande passante* comme l'intervalle pour lequel le déphasage est moindre que  $\pi/4$  en valeur absolue, ou bien l'intensité diminuée de moins que  $\sqrt{2}$  par rapport à sa valeur optimale, ou bien la puissance réduite de moins de 50%. Ces trois définitions sont strictement équivalentes, comme le montre la Fig. 18. La bande passante n'est pas rigoureusement symétrique par rapport à  $\omega_0$ , mais c'est pratiquement le cas pour de bonnes valeurs du facteur de qualité. On montre que

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} . \quad (69)$$

---

1. On a pris l'habitude en électricité et électronique de noter le complexe  $[1, \pi/2]$   $j$  au lieu de  $i$  en mathématiques.

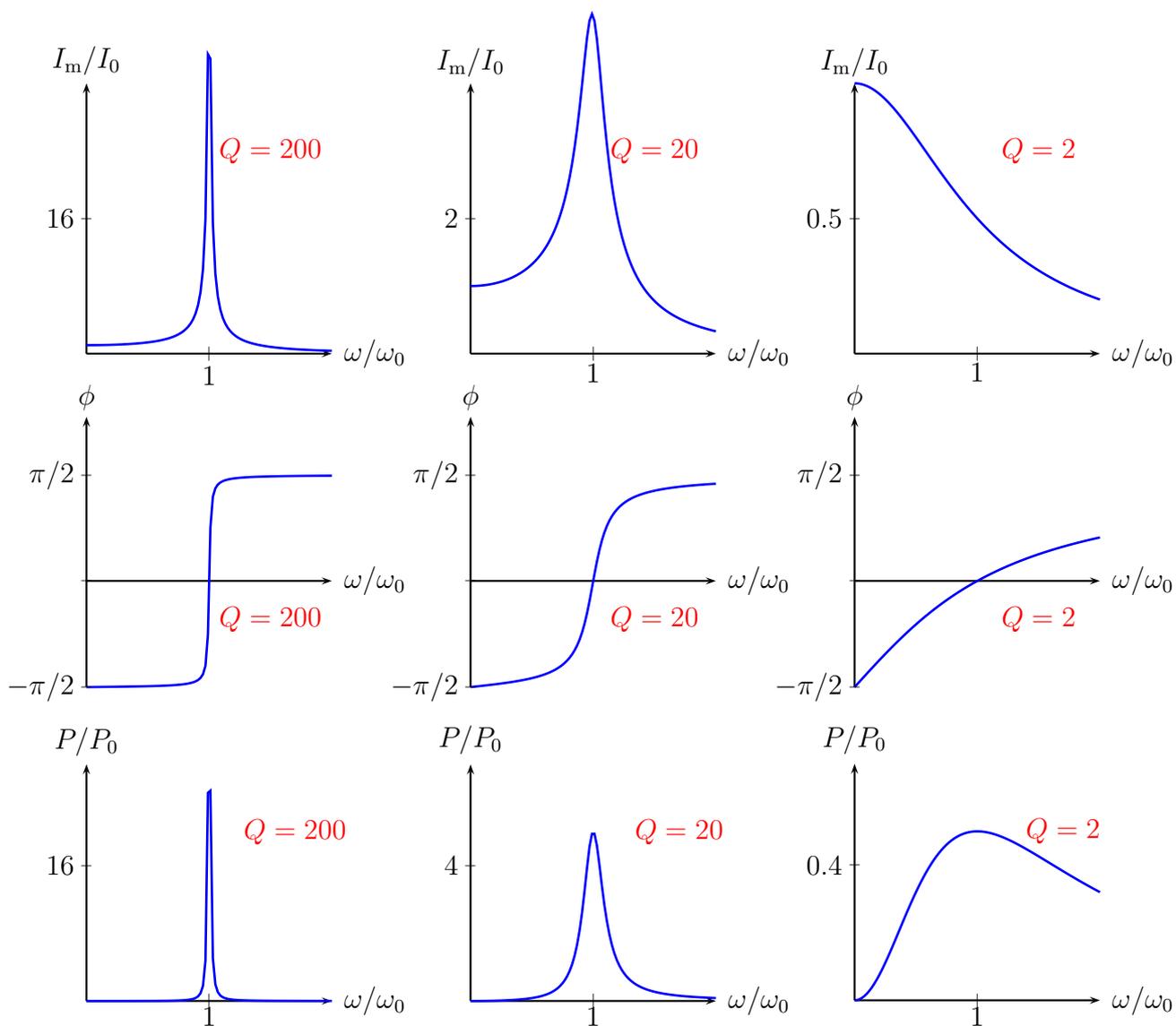


FIGURE 17 – Intensité  $I_m$ , phase du déplacement  $\phi$  et puissance moyenne  $P$  en fonction du rapport  $\omega/\omega_0$  de la pulsation extérieure à la pulsation propre de l'oscillateur, pour différentes valeurs du facteur de qualité.

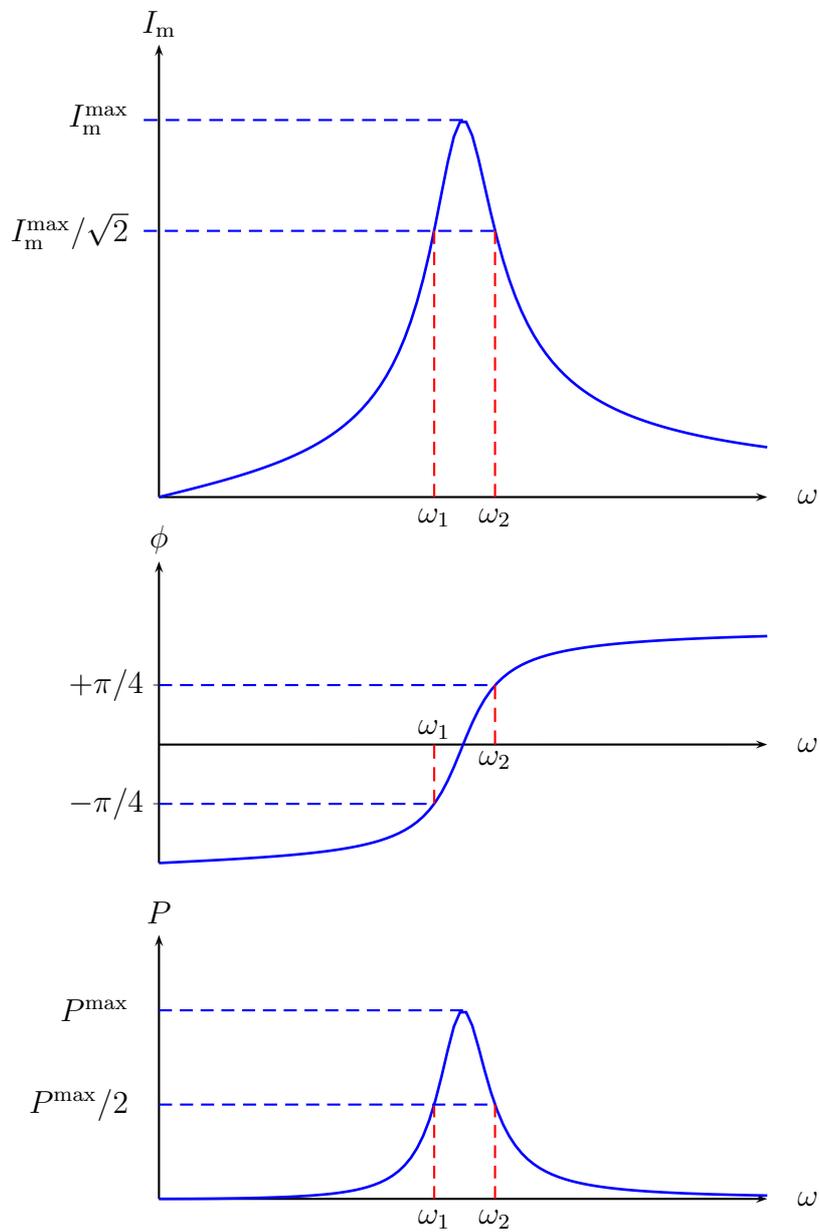


FIGURE 18 – Les extrémités de la bande passante correspondent à une intensité crête  $\sqrt{2}$  fois plus petite qu'à la résonance, à un déphasage égal à  $\mp\pi/4$  ou bien à une puissance moitié de sa valeur à la résonance.

## 4 Désintégrations et chocs

### 4.1 Généralités

#### 4.1.1 Définitions

La *quantité de mouvement* (q.d.m.) mesure la direction de la progression et l'élan acquis. D'après la loi de Newton,  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{f}$ , la q.d.m. enregistre le cumul des efforts de poussée ou de freinage sur l'objet. À la limite non-relativiste,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ .

L'*énergie cinétique* notée  $K$  ou  $E$  mesure le travail fourni pour donner à l'objet son mouvement. Elle peut contenir un terme de rotation. Le terme de translation est  $\mathbf{p}^2/(2m) = m\mathbf{v}^2/2$  à la limite non-relativiste.

À l'opposé, les photons sans masse, et à une très bonne approximation les neutrinos émis dans la radioactivité  $\beta$ , ont une énergie (parfois notée  $h\nu$ ) proportionnelle à leur quantité de mouvement,  $E = |\mathbf{p}|c$ .

Nous allons d'abord considérer la désintégration d'un noyau instable, puis des bilans de chocs. Le point commun, c'est qu'une énergie et une quantité de mouvement doivent se répartir entre les protagonistes de l'état final. La différence, c'est que dans un choc, cette énergie et cette quantité de mouvement résultent du mouvement des particules de l'état initial.

#### 4.1.2 Précautions

**Ce que l'on peut faire :** tirer parti au maximum des contraintes de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement (q.d.m.)

**Ce que l'on ne peut pas faire :** prédire l'état final. Il faut des informations autres que les lois de conservation. Par exemple, le choc est-il de plein fouet, avec des vitesses initiales et finales toutes colinéaires, ou bien le choc est-il latéral, avec des impulsions transverses ?

**Ne pas oublier :** Les lois de conservation sont satisfaites si le projectile rate sa cible, ce qui arrive parfois à la pétanque, surtout après le pastis. Une équation du second ordre est plus simple à résoudre si on connaît déjà l'une des solutions.

#### 4.1.3 Conservation de l'énergie

C'est un principe très général : l'énergie cinétique incidente peut se retrouver répartie en de multiples formes d'énergie : énergie cinétique de translation ou de rotation, énergie d'excitation d'un noyau, émission de lumière. L'énergie incidente est égale à la somme de toutes les énergies de l'état final.

Le cas le plus simple est celui des chocs élastiques, où l'énergie finale est purement cinétique, ce qui signifie que les protagonistes ne sont pas modifiés. C'est encore plus simple si cette énergie cinétique n'est que de translation.

#### 4.1.4 Conservation de la quantité de mouvement

C'est un principe très général pour un système isolé. Ce principe fait qu'en général, on ne peut pas dépenser toute son énergie cinétique. Par exemple une voiture qui heurte de plein fouet une autre identique, freins desserrés, ne pourra, au mieux que transformer 50% de son énergie cinétique en déformation de tôle. L'ensemble des véhicules encastrés aura une vitesse égale à la moitié de la vitesse incidente, de façon à conserver la q.d.m.

#### 4.1.5 Théorème de König et son interprétation

L'identité suivante peut paraître anodine

$$\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2, \quad (70)$$

mais contenu physique est très riche. À gauche, la somme des énergies individuelles. À droite, le premier terme est l'énergie *collective* du barycentre de masse  $m_1 + m_2$  et ce vitesse  $(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)/(m_1 + m_2)$ , qui est conservée vectoriellement pour un système isolé, ce qui fait que ce terme ne peut être aliéné. Le dernier terme est l'énergie *relative*, qui existe si  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ . Il peut être dépensé en tout ou partie lors d'un choc inélastique.

#### 4.1.6 Choix du référentiel

Si on fait un changement de référentiel, les vitesses sont décalées par la loi de Galilée,  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_e$ , où  $\mathbf{v}_e$  est la vitesse d'entraînement. On voit que tous les termes du théorème de König (70) sont modifiés, sauf le dernier. L'énergie relative ou *disponible* est intrinsèque, elle ne dépend pas du référentiel.

Le référentiel le plus simple est évidemment le *référentiel du centre de masse* ou référentiel *barycentrique*, dans lequel toute l'énergie est relative. Dans ce référentiel, les vitesses sont telles que  $m_1\mathbf{v}_1^* + m_2\mathbf{v}_2^* = 0$  et les q.d.m.,  $\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = 0$ . Il s'avère souvent avantageux de faire le bilan des collisions dans le référentiel barycentrique, même si le problème est posé dans un autre référentiel.

## 4.2 Désintégrations

### 4.2.1 Désintégration à l'arrêt en deux corps

L'état initial est par exemple un noyau métastable, qui se désintègre en deux fragments, soit

$$A \rightarrow a_1 + a_2, \quad (71)$$

Avec des notations évidentes, on a

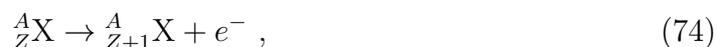
$$E = E_1 + E_2 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}, \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0. \quad (72)$$

D'où

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \sqrt{\frac{2 E m_1 m_2}{m_1 + m_2}}, \quad E_1 = E \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad E_2 = E \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (73)$$

Deux remarques :

- C'est la particule la plus légère qui emporte le plus d'énergie. Par exemple, pour une désintégration  $\alpha$  ( $A = 4$ ) d'un noyau d'Uranium ( $A \simeq 230$ ) la particule  $\alpha$  emporte plus de 50 fois plus d'énergie que le noyau de recul.
- Les particules émises dans une désintégration binaire ont une énergie bien définie dans le référentiel où la source est à l'arrêt. C'est que qui est observé pour les désintégrations  $\alpha$  et  $\gamma$ . Dans la désintégration  $\beta$ , qui a longtemps paru s'écrire



le spectre continu de l'électron a été l'une des raisons pour introduire dans le bilan une particule peu visible, mais très importante,



#### 4.2.2 Désintégration binaire en vol

Si le noyau qui se désintègre est doté d'une vitesse  $\mathbf{V}$ , il faut ajouter cette vitesse à chacune des particules de l'état final, c'est à dire ajouter  $m_i \mathbf{V}$  à leur quantité de mouvement finale  $\mathbf{p}'_i$ .

Si  $\mathbf{V}$  est faible, la distribution est à peine déformée. Si  $\mathbf{V}$  est grand, toutes les particules sont émises vers l'avant.

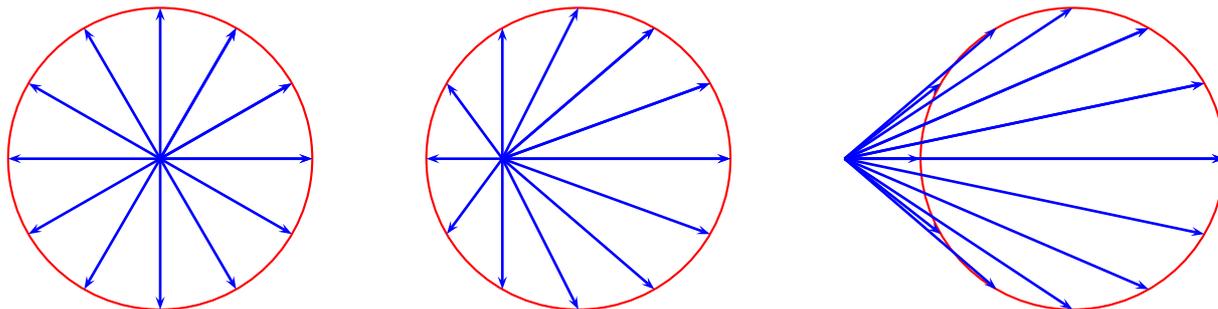


FIGURE 19 – Désintégration binaire à l'arrêt, à faible vitesse et à grande vitesse. Les produits de désintégration sont émis isotropiquement, de préférence à l'avant ou dans un cône limité.

## Exercices

38. Indiquer quels sont les schémas de la Fig. 19 envisageables pour une désintégration  $\alpha$ . Et pour une désintégration  $\gamma$ .

### 4.2.3 Désintégration en trois corps

Nous nous limiterons à une désintégration à l'arrêt avec des masses égales, soit  $A \rightarrow a + a + a$ . Avec des notations évidentes

$$E = E_1 + E_2 + E_3, \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0. \quad (76)$$

Une question est de savoir quelle sont les valeurs extrêmes possibles pour l'énergie de l'une des particules. Le minimum est visiblement  $E_{\min} = 0$ , par exemple pour la particule 1, et alors, les particules 2 et 3 emportent chacune  $E/2$  avec des q.d.m. opposées.

Est-ce que cette valeur  $E/2$  est le maximum ? Autrement dit pour rendre  $E_1$  maximal, faut-il supposer que l'une des deux autres est émise au repos, sans emporter d'énergie ?

Non ! Si 2 et 3 partent du même mouvement, avec  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3$  et donc  $\mathbf{p}_1 = -2\mathbf{p}_2$ , soit une énergie 4 fois plus grande, on aura des énergies  $E_1$ ,  $E_1/4$  et  $E_1/4$ , soit

$$E_1^{\max} = \frac{2E}{3}. \quad (77)$$

Une autre façon de le voir, c'est que le système (2,3) doit balancer la q.d.m. de 1, mais que d'après le théorème de König, son énergie totale sera minimale si le terme d'énergie relative est nulle, c'est à dire si 2 et 3 ont même vitesse.

## Exercices

39. Pour une désintégration en  $n$  fragments identiques  $A \rightarrow a + a + \dots + a$ , avec énergie totale libérée  $E$ , quelle serait l'énergie maximale pour une particule ?
40. Quelle est l'énergie maximale possible pour la particule de masse  $m_1$  lors d'une désintégration à trois corps de masses  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  si l'énergie totale libérée est  $E$ .

## 4.3 Chocs binaires élastiques

On écrira  $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ . Les deux types d'expérience les plus fréquents sont : projectile (1) sur cible fixe (2), et collision symétrique (mais des collisions asymétriques sont aussi possibles).

### 4.3.1 Chocs colinéaires

Dans le référentiel de la cible : en notant  $p_i$  la mesure algébrique des q.d.m., on obtient

$$p_1 = p'_1 + p'_2, \quad \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p'_1{}^2}{2m_1} + \frac{p'_2{}^2}{2m_2}, \quad (78)$$

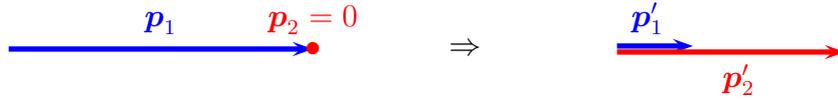


FIGURE 20 – Collision colinéaire dans le référentiel de la cible.

et en éliminant  $p_1'$  on obtient pour  $p_2'$

$$p_2'^2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \frac{2p_2' p_1}{m_1} = 0, \quad (79)$$

avec deux solutions

$$p_2' = \begin{cases} 0 & p_1' = p_1, \\ p_1 \frac{2m_2}{m_1 + m_2}, & p_1' = p_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \end{cases} \quad (80)$$

L'interprétation est (a) le choc n'a pas eu lieu, et (b) le choc a eu lieu, la particule heurtée part vers l'avant, la particule incidente continue vers l'avant si  $m_1 > m_2$  et repart en arrière si  $m_1 < m_2$ . Si  $m_1 = m_2$ , on a  $p_1' = 0$ , c'est le « carreau » de la pétanque où les particules échangent simplement leurs attributs cinématiques.

### Exercice

41. Sur la figure 20, quel est le rapport de masse  $m_1/m_2$  ?

**Dans le référentiel du centre de masse :** le bilan de q.d.m. est

$$p_1^* + p_2^* = 0 = p_1'^* + p_2'^*, \quad (81)$$

ce qui signifie l'égalité des valeurs absolues  $|p_1^*| = |p_2^*|$  et  $|p_1'^*| = |p_2'^*|$ , mais la conservation de l'énergie impose  $|p_1^*| = |p_1'^*| \equiv p^*$ . On a deux solutions, ou bien rien ne se passe, ou bien les deux q.d.m. sont retournées.

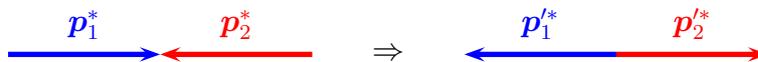


FIGURE 21 – Collision colinéaire dans le référentiel du centre de masse.

### Exercices

42. Sur la figure 20, quel est le rapport de masse  $m_1/m_2$  ?

43. Écrire le bilan d'une collision colinéaire avec  $p_1 = 2 \text{ MeV}/c$ ,  $p_2 = -1 \text{ MeV}/c$  et  $m_2 = 2m_1$ .

### 4.3.2 Chocs non colinéaires

Dans le référentiel de la cible, le bilan est la version vectorielle du précédent, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \\ \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} &= \frac{\mathbf{p}'_1{}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}'_2{}^2}{2m_2}, \end{aligned} \quad (82)$$

et en éliminant  $\mathbf{p}'_1$  on obtient pour  $\mathbf{p}'_2$

$$\mathbf{p}'_2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \frac{2\mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{p}_1}{m_1} = 0, \quad (83)$$

soit

$$\left( \mathbf{p}'_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1 \right) = \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \mathbf{p}_1^2, \quad (84)$$

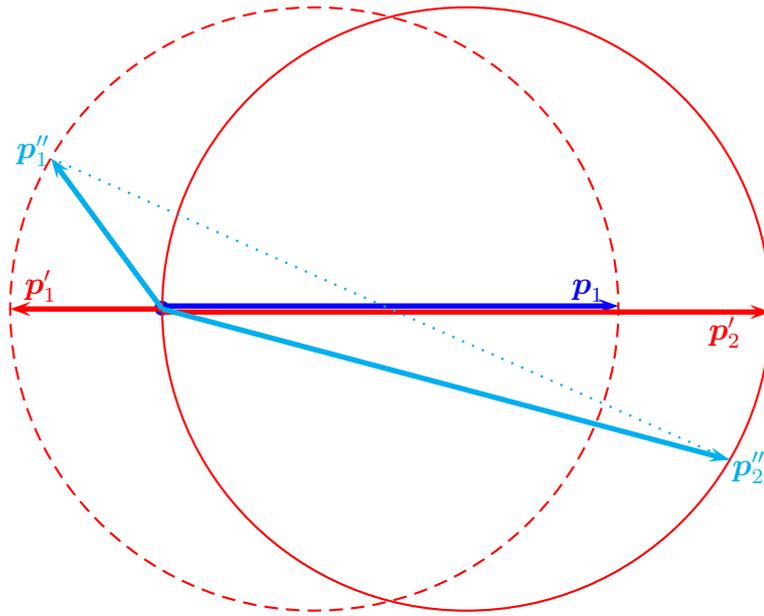


FIGURE 23 – Collision élastique dans le référentiel de la cible, dans le cas où  $m_1 = m_2/2$ . Les solutions colinéaires  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2 = 0$  en bleu, et  $\mathbf{p}'_1$  et  $\mathbf{p}'_2$  en rouge, et une solution non colinéaire  $\mathbf{p}''_1$  et  $\mathbf{p}''_2$  en cyan. Noter que le milieu de  $\{\mathbf{p}''_1, \mathbf{p}''_2\}$  est  $\mathbf{p}_1/2$ .

qui montre que l'extrémité du vecteur  $\mathbf{p}'_2$  décrit un cercle centré en  $m_2 \mathbf{p}_1 / (m_1 + m_2)$ , qui passe par l'origine. En effet, on sait d'avance que  $\mathbf{p}'_2 = 0$  est une solution possible. Comme  $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2$ , l'extrémité du vecteur  $\mathbf{p}'_1$  décrit un cercle de même rayon, mais centré en  $\mathbf{p}_1 m_1 / (m_1 + m_2)$ . On retrouve que si  $m_1 > m_2$  la particule diffusée part plutôt vers l'avant,

mais que si  $m_1 < m_2$  une direction vers l'arrière est envisageable. La figure 23 est faite dans le cas où  $m_2 = 2m_1$ .

Si on recommence avec  $m_2 = m_1/2$ , on voit (Fig. 24) une différence : la particule incidente est diffusée vers l'avant, avec un angle inférieur à  $30^\circ$ . Il y a une autre différence entre les deux cas. Pour  $m_1 < m_2$ , il y a une seule solution correspondant à un angle donné de  $\mathbf{p}_1$ . Pour  $m_1 > m_2$ , il y a deux solutions.

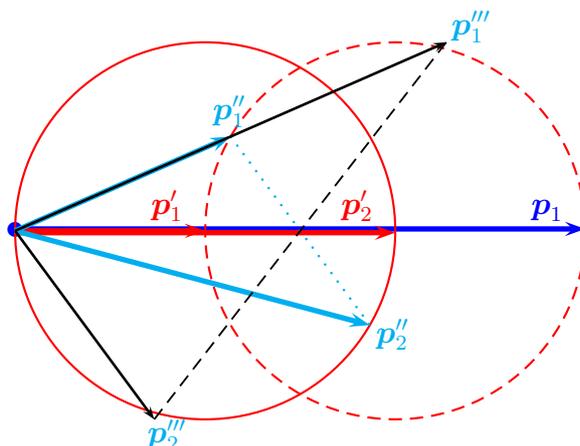


FIGURE 24 – Collision élastique dans le référentiel de la cible, dans le cas où  $m_2 = m_1/2$ . Les solutions colinéaires  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2 = 0$  en bleu, et  $\mathbf{p}'_1$  et  $\mathbf{p}'_2$  en rouge, et une solution non colinéaire  $\mathbf{p}''_1$  et  $\mathbf{p}''_2$  en cyan. En trait noir fin, une solution  $\{\mathbf{p}'''_1, \mathbf{p}'''_2\}$  pour laquelle la particule incidente est diffusée avec le même angle, mais une énergie différente.

### Exercices

44. Quel serait le rapport de masse si la particule #1 était diffusée avec un angle maximal de  $60^\circ$  ?
45. Montrer que si  $m_1 = m_2$ , les q.d.m. finales sont perpendiculaires.

Dans le centre de masse, la quantité de mouvement est conservée en module. Donc les vecteurs  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  décrivent le même cercle, mais sont opposés sur ce cercle.

Par rapport au référentiel de la cible, les vitesses dans le c.d.m. sont décalées vers la gauche de  $\mathbf{p}_1/(m_1 + m_2)$ . En particulier, la cible acquiert dans le c.d.m. une q.d.m. égale à  $-\mathbf{p}^* = -\mathbf{p}_1 m_2/(m_1 + m_2)$ . Ce  $|\mathbf{p}^*|$  est le rayon du cercle des q.d.m. dans le c.d.m. Pour revenir au référentiel de la cible, on décale toutes les vitesses vers la droite de  $\mathbf{p}_1/(m_1 + m_2)$ , donc

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_{1*} + \mathbf{p}_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}'_{2*} + \mathbf{p}_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad (85)$$

ce qui permet de retrouver les résultats obtenus directement dans le référentiel de la cible.

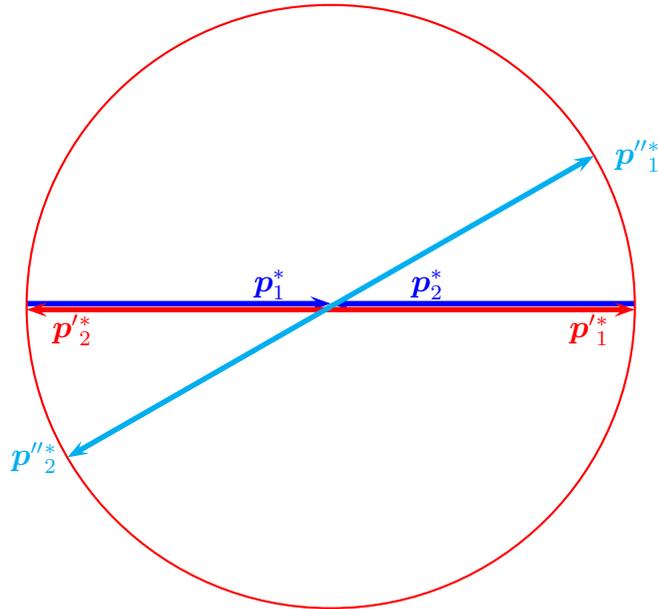


FIGURE 25 – Collision élastique dans le référentiel barycentrique, dans le cas où  $m_2 = m_1/2$ . Les solutions colinéaires  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  en bleu, et  $\mathbf{p}'_1$  et  $\mathbf{p}'_2$  en rouge, et une solution non colinéaire  $\mathbf{p}''_1$  et  $\mathbf{p}''_2$  en cyan.

### 4.3.3 Exemples de détermination de l'angle de diffusion

Comme cela a été rappelé en tête de ce chapitre sur les collisions, les lois de conservation ne permettent pas de prédire l'angle de diffusion. Il faut des informations supplémentaires. Donnons deux exemples.

**Collision de deux sphères dures** On imagine deux sphères dures en pure translation. Le contact est parfait : la force sera purement radiale et ne pourra donc communiquer un effet tangentiel qui provoquerait une rotation. Soit  $R$  le rayon commun, et  $b$  le paramètre d'impact, distance du centre immobile à la ligne de vol de l'autre centre. Au contact, la distance entre les deux centres est  $2R$  avec une composante verticale  $b$  (ce qui requiert  $b \leq 2R$ , sinon, il n'y a pas de choc). La ligne des centres est donc inclinée de  $\vartheta$  avec l'horizontale, avec  $\sin \vartheta = b/(2R)$ . Une force très violente et instantanée s'applique. La boule cible reçoit une impulsion dans la direction  $\vartheta$ . La boule incidente est déviée, dans la direction perpendiculaire.

**Diffusion Rutherford** On imagine deux charges  $q_1$  et  $q_2$ , de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$ . Dans le centre de masse, elles se dirigent l'une vers l'autre, avec des vitesses  $\mathbf{v}_0$  et  $-\mathbf{v}_0$  opposées, portées par des droites distantes de  $b$  (paramètre d'impact). On démontre dans

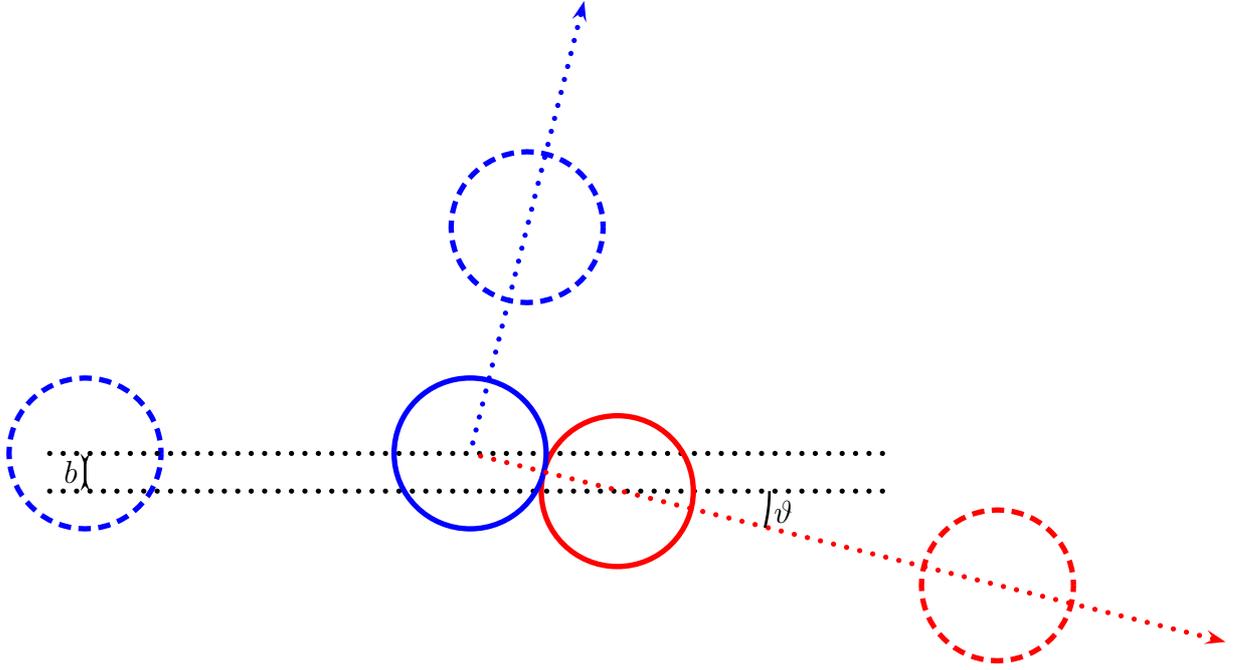


FIGURE 26 – Choc élastique de deux boules dures.

les livres de mécanique que l'angle de diffusion est donné par

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{K}{v_0^2 b}, \quad K = \frac{q_1 q_2 (m_1 + m_2)}{4\pi\epsilon_0 m_1 m_2}, \quad (86)$$

Rutherford, en bombardant de l'or par des particules  $\alpha$ , vérifia cette formule avec  $q_1 = 2e$  et  $q_2 = 79e$ , sans correction de taille finie pour le noyau, ce qui constitua une surprise.

#### 4.3.4 Angles et énergies pour un choc élastique

La question qui peut être intéressante pour l'analyse est de savoir si l'énergie d'une particule issue d'un choc élastique est bien déterminée par son angle par rapport au faisceau.

Dans le référentiel barycentrique, il n'y a pas de problème, car les énergies sont les mêmes dans tous les azimuts.

Dans le référentiel de la cible, il n'y a pas de problème pour le noyau de recul. Sa q.d.m.  $\mathbf{p}'_2$  décrit un cercle (en fait une sphère dans l'espace, mais il y a invariance par rapport à toute rotation autour de l'axe défini par la particule incidente, et on peut raisonner dans le plan de la figure) qui passe par l'origine. Donc toute demi-droite issue de l'origine ne recoupe le cercle qu'une fois. La fonction  $p'_2(\phi)$  est unique.

Pour la particule diffusée, la q.d.m.  $\mathbf{p}'_1$  décrit également un cercle. Si  $m_1 \leq m_2$  l'origine est intérieure ou sur le cercle. Donc  $p_1(\theta)$  est unique. Mais si  $m_1 > m_2$ , le cercle est à droite de l'origine, et il y a deux valeurs de  $p_1$  pour un angle donné  $\theta$ .

Vérifions par le calcul. Pour le noyau de recul, on a d'après (83)

$$p_2'(\phi) = 2p_1 \cos \phi \frac{m_2}{m_1 + m_2} . \quad (87)$$

De même, en éliminant  $\mathbf{p}'_2$  dans (82), on obtient

$$p_1'^2 - 2p_1' p_1 \cos \theta \frac{m_1}{m_1 + m_2} + p_1^2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0 , \quad (88)$$

avec les propriétés suivantes pour cette équation du second degré en  $p_1' = |\mathbf{p}'_1|$  :

- si  $m_1 < m_2$ , il y a une racine positive et une racine négative non physique,
- si  $m_1 = m_2$ ,  $p_1' = p_1 \cos \theta$ ,
- si  $m_1 > m_2$ , il y a 0 ou 2 racines positives acceptables. Le discriminant est

$$\Delta = \left( \frac{2p_1}{m_1 + m_2} \right)^2 [m_1^2 \cos^2 \theta - m_1^2 + m_2^2] , \quad (89)$$

ce qui montre que l'angle limite correspond à

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2} , \quad (90)$$

#### 4.3.5 Effet Compton

Il s'agit de la diffusion d'un photon sur un électron. Elle a eu historiquement une grande importance pour montrer que dans certaines circonstances, la lumière se comporte comme faite de corpuscules qui interagissent individuellement avec les constituants élémentaires de la matière.

Le photon se déplace avec une vitesse  $c \simeq 300\,000$  km/s quelque soit son énergie  $E$ , qui est reliée à la q.d.m. par  $E = |\mathbf{p}| c$ .

Considérons la collision

$$\gamma_1 + e \rightarrow \gamma_1' + e' , \quad (91)$$

sur un électron initialement au repos. Il est en principe légitime de traiter l'électron à l'approximation non-relativiste pour écrire

$$\left. \begin{array}{l} p_1 c = p_1' c + \frac{p_2'^2}{2m} , \\ \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 , \end{array} \right\} p_1'^2 + p_1'(2m c - 2p_1 \cos \theta) + p_1^2 - 2m c p_1 = 0 , \quad (92)$$

qui permet de calculer l'énergie finale  $E_1' = p_1' c$  en fonction de l'angle de diffusion  $\theta$  du photon.

En fait, et paradoxalement, on obtient un résultat plus simple si on traite l'électron de manière relativiste, en écrivant la conservation de l'énergie

$$p_1 c + m c^2 = p_1' c + (m c^2 + K_2') , \quad (93)$$

et en éliminant l'énergie totale (masse et cinétique)  $(m c^2 + K'_2)$  et la q.d.m. de l'électron de recul au moyen de la relation

$$(m c^2 + K'_2)^2 = m^2 c^4 + p_2'^2 c^2, \quad (94)$$

(qui redonnerait bien  $p_2'^2 = 2 m K'_2$  au premier ordre en l'énergie cinétique, c'est à dire à l'approximation non relativiste) pour obtenir

$$E'_1 = \frac{E_1}{1 + E_1(1 - \cos \theta)/(m c^2)}. \quad (95)$$

On vérifie qu'à l'avant  $E'_1 = E_1$ .

## 4.4 Collisions inélastiques

### 4.4.1 Cas classique et cas microscopique

Dans le cas d'objets macroscopiques, on envisage qu'un certain pourcentage de l'énergie disponible est transformée en chaleur ou en déformations irréversibles. Par exemple, deux ballons identiques se heurtent de plein fouet, symétriquement. On néglige la gravitation. Le *coefficient de restitution*  $e$  est le rapport entre les vitesses relatives finales, avec  $0 \leq e \leq 1$ . Si bien que l'énergie disponible (le dernier terme du théorème de König) est réduite par un facteur  $e^2$ . Pour une balle qui rebondit sur le sol, lâchée d'une hauteur  $h$ , elle remonte à la hauteur  $e^2 h$ , puis  $e^4 h$ , etc.

### Exercice

46. Une balle est lâchée de  $h = 1$  m avec une coefficient de restitution  $e = 0,8$ . Quelle distance parcourt-elle avant de s'immobiliser sur le sol? Combien de temps dure l'opération, si  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>. Le résultat dépend-il de la masse de la balle?

Pour des objets microscopiques, l'énergie est libérée ou absorbée par quantités bien définies, qui correspondent à des niveaux d'excitation ou énergies de liaison bien précis. Par exemple,  $p + t \rightarrow d + d$  est endo-énergétique. En physique nucléaire, on utilise souvent l'*unité de masse atomique*

$$1u = 931,494\,028 \text{ MeV}/c^2, \quad (96)$$

calculée comme étant exactement le 12<sup>ème</sup> de la masse de <sup>12</sup>C. On mesure par ailleurs l'excès algébrique de masse de chaque atome de façon très précise par rapport à  $A \times u$ . Dans un bilan de réaction nucléaire, les masses des électrons se compensent exactement et les énergies de liaison électroniques approximativement, si bien que les bilans de masse entre atomes sont aussi des bilans de masse entre noyaux. Une valeur positive dénote un noyau moins lié (par nucléon) que <sup>12</sup>C, une valeur négative, un noyau plus lié. On utilise la relation d'Einstein<sup>2</sup>  $E = m c^2$  pour interpréter des différences minimes de masse comme

2. Albert Einstein, physicien, cousin du célèbre musicologue Alfred Einstein, spécialiste de Mozart et de la musique romantique.

de l'énergie absorbée ou libérée. Dans notre cas,

$$\begin{aligned} H &= 7288.97050, \quad T = 14949.80600, \quad D = 13135.72158, \\ 2d - (p + t) &\simeq 2D - (H + T) = 4032.66666 \text{ keV}, \end{aligned} \quad (97)$$

et faute de fournir cette énergie, la réaction ne pourra se produire (en fait il faut beaucoup plus pour vaincre la barrière coulombienne). Ce genre de bilan réserve des surprises, par exemple

$$p = 7288.97050, \quad {}^{16}\text{O} = -4737.00141, \quad {}^{18}\text{Ne} = 5317.166, \quad 2p + {}^{16}\text{O} - {}^{18}\text{Ne} \simeq 4524. \quad (98)$$

ce qui fait que la réaction  $p + p + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{18}\text{Ne} + \gamma$  est énergiquement possible, ce qui rend l'eau potentiellement très dangereuse !

#### 4.4.2 $Q$ d'une réaction

Soit une réaction

$$a_1 + a_2 \rightarrow A_1 + A_2 + \dots, \quad (99)$$

avec des masses  $m_1, m_2, M_1, M_2$ , etc., on définit

$$Q = (m_1 + m_2 - M_1 - M_2 - \dots) c^2, \quad (100)$$

si bien que le bilan d'énergie cinétique s'écrit

$$Q + k_1 + k_2 = K_1 + K_2 + \dots, \quad (101)$$

en complément de la conservation de la q.d.m.

#### 4.4.3 Seuil d'une réaction

**L'erreur à ne pas commettre :** ce serait d'affirmer que l'énergie cinétique incidente,  $k_1 = p_1^2/(2m_1)$  dans le référentiel de la cible ( $k_2 = 0$ ) sert entièrement à fournir l'énergie de la réaction, soit  $k_1 = -Q$  et donc  $p_1 = \sqrt{-2m_1 Q}$ . En effet on aurait  $K_1 = K_2 = 0$ , donc des q.d.m. finales  $P_1 = P_2 = 0$  et la conservation de la q.d.m. serait évidemment violée.

**Raisonnement direct :** L'énergie de l'état final sera minimale si les vitesses sont égales, car le deuxième terme du théorème de König s'annulera, mais le premier terme est contraint par la quantité de mouvement. Au seuil,

$$P_1 + P_2 = p_1, \quad \frac{P_1}{M_1} = \frac{P_2}{M_2}, \quad (102)$$

soit

$$P_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} p_1, \quad P_2 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} p_1, \quad (103)$$

et le bilan d'énergie devient

$$Q + \frac{p_1^2}{2m_1} = p_1^2 \frac{M_1}{2(M_1 + M_2)^2} + p_1^2 \frac{M_2}{2(M_1 + M_2)^2}, \quad (104)$$

soit

$$Q + k_1 \left(1 - \frac{m_1}{M_1 + M_2}\right) = 0, \quad (105)$$

$$k_1 = -Q \frac{M_1 + M_2}{M_1 + M_2 - m_1}, \quad (106)$$

**Via le centre de masse :** Au seuil, les particules finales sont produites à l'arrêt dans le référentiel du centre de masse. La quantité de mouvement incidente,  $p^*$  est donc donnée par

$$p^{*2} \left[ \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right] = -Q, \quad (107)$$

soit

$$p^* = \sqrt{-Q \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}}, \quad (108)$$

Le centre de masse a l'opposé de la vitesse de la particule 2, soit  $p^*/m_2$  si bien qu'en composant les vitesses, cette particule 2 se retrouve à l'arrêt, tandis que la particule 1 acquiert une vitesse  $p^*/m_1 + p^*/m_2$ , ce qui correspond à une énergie

$$k_1 = -Q \frac{m_1 + m_2}{m_2}. \quad (109)$$

On peut se demander pourquoi les expressions (106) et (109) ne sont pas identiques. En fait, si dans la définition (100) de  $Q$ , on considère que  $m_1 + m_2$  ne diffère que très peu de  $M_1 + M_2$ , c'est à dire que  $Q$  est petit devant les énergies de masse  $m_i c^2$  ou  $M_i c^2$ , alors, en comparant les deux expressions, au numérateur  $m_1 + m_2 \simeq M_1 + M_2$ , et au dénominateur  $M_1 + M_2 - m_1 \simeq m_2$ . En fait aucune de ces expressions n'est vraiment exacte. Il faut la relativité restreinte pour traiter ce problème rigoureusement, et dans ce cadre, on démontre que

$$k_1 = \frac{(M_1 + M_2)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2} c^2. \quad (110)$$

#### 4.4.4 Distribution angulaire des produits d'une collision inélastique

Considérons encore cette réaction (99) pour nous intéresser aux angles d'émission des produits.

Dans le centre de masse, chacun des produits peut être émis dans n'importe quelle direction. Si deux particules sont émises, elles partent dos à dos, avec des q.d.m. opposées.

Dans le référentiel de la cible, on peut reprendre, comme on l'a fait dans le cas élastique, le bilan

$$\frac{\mathbf{P}_1^2}{2M_1} + \frac{\mathbf{P}_2^2}{2M_2} = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1}, \quad \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{p}_1, \quad (111)$$

et l'élimination de  $\mathbf{P}_2$ , par exemple, donne l'équation du second degré suivante pour le module de  $\mathbf{P}_1$  en fonction de son angle d'émission par rapport à  $\mathbf{p}_1$

$$P_1^2 \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) - \frac{2}{M_2} P_1 p_1 \cos \theta_1 + p_1^2 \left( \frac{1}{M_2} - \frac{1}{m_1} \right) = 0. \quad (112)$$

Il est dès lors possible, dans chaque cas de discuter de l'existence et du nombre de racines, en fonction des masses. Parmi les possibilités :

- Si  $M_2 > m_1$ , le terme constant est négatif, et l'équation a une racine positive et une seule,
- Si  $M_2 = m_1$ , le terme constant disparaît.

Il reste  $P_1 = 0$  (carreau) et  $P_1 = 2M_1 \cos \theta_1 / (M_1 + M_2)$ .

- Si  $M_2 < m_1$ , ça se corse un peu. Ou bien on n'a pas de solution, ou bien on a deux racines positives, donc acceptables, selon les valeurs de  $\theta_1$ . Si  $\Delta$  est le discriminant, on a en effet

$$\frac{\Delta}{4p_1^2} = \frac{\cos^2 \theta_1}{M_2^2} - \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \left( \frac{1}{M_2} - \frac{1}{m_1} \right), \quad (113)$$

qui montre que la direction transverse ( $\cos \theta_1 = 0$ ) est interdite, car elle correspond à  $\Delta < 0$ . Le cas limite correspond à

$$\cos^2 \theta_1 = \left( 1 + \frac{M_2}{M_1} \right) \left( 1 - \frac{M_2}{m_1} \right). \quad (114)$$

Une solution alternative consiste à calculer paramétriquement la quantité de mouvement et l'angle de diffusion dans le référentiel de la cible en fonction de l'angle dans le référentiel barycentrique.

## Exercice

46. Dans le référentiel du tritium, quelle est l'énergie minimale du proton pour que la réaction  $p + t \rightarrow d + d$  puisse se produire. Utiliser les données de (97).
47. Même question dans le référentiel du proton.
48. Calculer l'énergie du photon pour la réaction  $\gamma + \text{H} \rightarrow p + e^-$ . On rappelle : masse de l'électron  $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ , masse du proton  $m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2$ , énergie de l'hydrogène  $\epsilon = -13,6 \text{ eV}$  (ou si l'on veut, énergie de liaison  $E_B = +13,6 \text{ eV}$ ).



