Master de Physique, Année 2012-13, MQ, TD 8 : Perturbations stationnaires

Exercice 1
On considère un puits infini de largeur R, soit $V(x) = 0$ pour $0 \leq x \leq R$, et $V = \infty$ ailleurs. La masse de la particule est m.
1) Déterminer l'énergie du premier niveau et la fonction d'onde normalisée correspondante.
2) On ajoute un potentiel $V = \lambda\, x$. Calculer la correction d'énergie au premier ordre.

Exercice 2
Calculer la correction d'énergie au premier et deuxième ordre, et la fonction d'onde au premier ordre pour les niveaux de $H = p^2 + x^2 + \lambda\, x^2$, et comparer au résultat exact.

Exercice 3
Même question pour $H = p^2 + x^2 + \lambda\, x$

Exercice 4
On considère plus généralement l'hamiltonien à une dimension $H = H_0 + \lambda\, V$, où H_0 est pair et $V(x)$ est impair. Montrer que l'énergie E de l'état le plus bas de H est inférieure à l'énergie la plus basse, E_0, de l'hamiltonien H_0.

Exercice 5
Calculer au premier ordre en perturbation la correction à l'énergie de l'état fondamental d'un atome hydrogénoïde due à la taille finie du noyau. On suppose que la charge du noyau est répartie uniformément dans un volume sphérique de rayon R, où R est beaucoup plus petit que le rayon de Bohr.
Quel est le sens de l'approximation par rapport à ce que serait un calcul exact ?
Cette correction est-elle plus grande ou plus petite pour les atomes muoniques, où un électron est remplacé par un muon environ 200 fois plus lourd.

Exercice 6
Calculer au premier ordre en perturbation le déplacement des niveaux d'énergie d'un atome hydrogénoïde produit par l'augmentation d'une unité de la charge nucléaire (émission d'un β^-). On rappelle que la valeur moyenne de $1/r$ sur un état n de l'atome d'hydrogène est $1/(n^2 a_0)$ où a_0 est le rayon de Bohr.

Exercice 7 (*)
Un système de masse réduite μ interagit au moyen du potentiel

$$V(r) = -a/r + br^2 \ ,$$

où a et b sont deux constantes positives. Il pourrait s'agir d'un modèle pour les mésons composés d'un quark et d'un antiquark. On se demande lequel des deux termes pourrait être traité comme une perturbation par rapport à l'autre, pour évaluer l'énergie de l'état fondamental.
1) Si vous avez fait les deux calculs, lequel choisissez-vous ?
2) Quelle approximation sera la meilleure selon que μ est très grand ou très petit ?
3) Faire le calcul explicitement.

Exercice 8 (*)
Soit $H_0 = -\Delta - 1/r$, dont on perturbe le fondamental avec $V = 1/r$ ou bien $V = 1/r^2$. Montrer que dans le premier cas, on a

$$E_n = -1/4, 1/2, -1/4, \ldots$$

et dans le second

$$E_n = -1/4, 1/2, -5/4, \ldots$$

Or si on calcule E_2 par la formule

$$E_2 = \sum_{n>0} \frac{|\langle n|V|0\rangle|^2}{E_0^{(0)} - E_0^{(n)}} \ ,$$

dont tous les ingrédients sont connus, somme étendue à tous les états $n\,S$, d'énergie $E_0^{(n)} = -1/(4\,n^2)$, on trouve pour la correction au deuxième ordre respectivement $-0.133\ldots$ et $-0.0569\ldots$ très différents des résultats exacts ci-dessus. Comment expliquer la différence ?

Exercice 9 (*)
Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. Pour obtenir l'énergie à l'ordre n, il *suffit* d'avoir la fonction d'onde à l'ordre $n-1$,
2. Pour obtenir l'énergie à l'ordre n, il *faut* avoir la fonction d'onde à l'ordre $n-1$.

Pour alimenter la réflexion, on pourra considérer le développement de

$$\frac{\langle\psi_0 + \lambda\,\psi_1|H|\psi_0 + \lambda\,\psi_1\rangle}{\langle\psi_0 + \lambda\,\psi_1|\psi_0 + \lambda\,\psi_1\rangle} = \frac{\langle\psi - \lambda^2\,\phi|H|\psi - \lambda^2\,\phi\rangle}{\langle\psi - \lambda^2\,\phi|\psi - \lambda^2\,\phi\rangle} \ ,$$

où ψ est la solution exacte développée comme $\psi = \sum \psi_n\, \lambda^n$.