Master de Physique, 2012-13, TD de MQ, TD 7

Moment cinétique, opérateurs scalaires, opérateurs vectoriels

Exercice 1

Si $\boldsymbol{J} = \{J_x, , J_y, , J_z\} = \{J_1, J_2, J_3\}$ est un opérateur de moment cinétique, pourquoi peut-on dire que
$$\boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{J} = i\hbar \boldsymbol{J} \ ?$$

Exercice 2

On pose $J_\pm = J_x \pm i J_y$. Montrer que
$$J_\pm J_\mp = \boldsymbol{J}^2 - J_z^2 \pm \hbar J_z \ .$$

Exercice 3

On note $|j, m\rangle$ l'état normalisé, vecteur propre simultané de $\boldsymbol{J}^2$ et de J_z avec les valeurs propres respectives $j(j+1)\hbar^2$ et $m\hbar$, où j est entier ou demi-entier non négatif, et m vaut $-j, -j+1, \ldots, j-1$ ou j. Donner l'expression de l'élément de matrice
$$\langle j', m' | J_x | j, m\rangle$$

Exercice 4 : Opérateur scalaire

On suppose que
$$[\boldsymbol{J}, A] = 0 \ .$$

1) Montrer que $[\boldsymbol{J}^2, A] = 0$.
2) Montrer que A est diagonal dans un sous espace propre de $\boldsymbol{J}^2$, soit
$$\langle \alpha', j', m' | A | \alpha, j, m\rangle = \delta_{j'j}\delta_{m'm}\, a_{\alpha'\alpha}(j, m) \ ,$$
où α dénote l'ensemble des nombres quantiques autres que ceux du moment cinétique, nécessaires pour caractériser complètement l'état.
3) Montrer que $a_{\alpha'\alpha}(j, m)$ est indépendant de m.

Exercice 5 : Opérateur vectoriel

Les trois opérateurs $\{V_x, V_y, V_z\} = \{V_1, V_2, V_3\}$ forment un opérateur vectoriel $\boldsymbol{V}$ vis-à-vis du moment cinétique $\boldsymbol{J}$ si
$$[J_x, V_x] = 0 \ , \quad [J_x, V_y] = i\hbar V_z \ ,$$
$$[J_x, V_z] = -i\hbar V_y \ ,$$
et les relations déduites par permutation circulaire des indices.
1) Écrire $[J_\alpha, V_\beta]$ de manière compacte à l'aide du tenseur antisymétrique de Levi-Civita $\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}$.
2) On pose $V_\pm = V_x \pm i V_y$. Calculer
$$[J_z, V_\pm] \ , \quad [J_\pm, V_\pm] \ , \quad [J_\pm, V_\mp]$$
3) À partir de $[J_z, V_z]$, montrer que
$$\langle j', m' | V_z | j, m\rangle \propto \delta_{m',m}$$
3) À partir de $[J_z, V_\pm]$, montrer que
$$\langle j', m' | V_\pm | j, m\rangle \propto \delta_{m'\mp 1,m}$$
4) À partir de $[J_+, V_+]$, montrer que
$$\frac{\langle j, m+1 | V_+ | j, m\rangle}{\langle j, m+1 | J_+ | j, m\rangle} = \frac{\langle j, m+2 | V_+ | j, m+1\rangle}{\langle j, m+2 | J_+ | j, m+1\rangle} \ ,$$
et en déduire la relation de proportionnalité
$$\langle j, m' | V_+ | j, m\rangle = \beta_+(j)\, \langle j, m' | J_+ | j, m\rangle$$
On admettra la relation analogue
$$\langle j, m' | V_- | j, m\rangle = \beta_-(j)\, \langle j, m' | J_- | j, m\rangle \ .$$
5) Du commutateur de J_- et V_+, déduire une relation entre $\langle j, m | V_z | j, m\rangle$, $\langle j, m+1 | V_+ | j, m\rangle$ et $\langle j, m | V_+ | j, m-1\rangle$ et montrer que
$$\langle j, m | V_z | j, m\rangle = m\hbar\beta_+(j) \ .$$
6) On admet que de même
$$\langle j, m | V_z | j, m\rangle = m\hbar\beta_-(j) \ .$$
En déduire que $\beta_+(j) = \beta_-(j)$, noté $\beta(j)$ et que donc
$$\langle j, m' | \boldsymbol{V} | j, m\rangle = \beta(j) \langle j, m' | \boldsymbol{J} | j, m\rangle \ .$$
7) Montrer que si $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{W}$ sont scalaires, $\boldsymbol{V}.\boldsymbol{W}$ est scalaire.
8) Les composantes T_q^k ($q = -k, -k+1, \ldots$) forment un opérateur tensoriel irréductible d'ordre k si
$$[J_\pm, T_q^k] = \sqrt{k(k+1)_q(q\pm 1)}\, T_{q\pm 1}^k \ ,$$
$$[J_z, T_q^k] = q\, T_q^k \ .$$
Montrer que c'est le cas pour
$$V_{-1}^1 = \frac{V_-}{\sqrt{2}} \ , \quad V_0^1 = V_z \ , \quad V_1^1 = -\frac{V_+}{\sqrt{2}} \ .$$