Master de Physique M1, Mécanique Quantique
TD 6 : Matrices de rotation

Exercice 1
Écrire dans la base $|\pm\rangle$ des états propres de S_z la matrice de rotation d'un spin 1/2 correspondant à un angle φ autour de Oz. Même question pour un angle α autour de Oy.

Exercice 2
Écrire dans la base $\{|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ des états propres de S_z la matrice de rotation d'un spin 1 correspondant à un angle φ autour de Oz. Retrouver le résultat en considérant ce spin 1 comme résultant de la composition de deux spins 1/2. Mêmes questions pour un angle α autour de Oy.

Exercice 3
La rotation R d'un système peut être paramétrée à l'aide des angles d'Euler α, β et γ. Dans ce cas là, l'opérateur rotation s'écrit :

$$D(R) = D(\alpha,\beta,\gamma) = \exp(-i\alpha J_z/\hbar)\exp(-i\beta J_y/\hbar)\exp(-i\gamma J_z/\hbar)\ ,$$

où $\vec{J}$ est le moment angulaire total du système. On définit les matrices de rotation :

$$D^j_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle jm|D(\alpha,\beta,\gamma)|jm'\rangle$$

et les matrices de rotation réduites :

$$d^j_{mm'}(\beta) = D^j_{mm'}(0,\beta,0)$$

1) Soit a l'ensemble des valeurs propres des opérateurs qui commutent avec $\vec{J}$. Montrer que l'on a :

$$\langle ajm|D(\alpha,\beta,\gamma)|a'j'm'\rangle = \delta_{aa'}\delta_{jj'}D^j_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)$$

où les états $\{|ajm\rangle\}$ sont supposés être normalisés. En déduire :

$$D(R)|ajm\rangle = \sum_{m'} D^j_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)|ajm'\rangle$$

puis :

$$Y_{lm}(R^{-1}(\hat{r})) = \sum_{m'} D^l_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)Y_{lm'}(\hat{r})$$

2) Montrer que les matrices de rotation sont unitaires.
3) Montrer par récurrence que :

$$\langle jm|(J_y)^n|jm'\rangle = \langle j-m'|(J_y)^n|j-m\rangle$$

puis, en utilisant une rotation de π autour de l'axe z :

$$d^j_{mm'}(-\beta) = (-1)^{m-m'}d^j_{mm'}(\beta)$$

En déduire la relation :

$$D^j_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)^* = (-1)^{m-m'}D^j_{-m-m'}(\alpha,\beta,\gamma)$$

4) En utilisant le fait qu'un vecteur unitaire d'angle (θ,ϕ) s'obtient par rotation du vecteur unitaire porté par l'axe Oz, montrer que, pour ψ arbitraire :

$$Y^*_{lm}(\theta,\phi) = D^l_{m0}(\phi,\theta,\psi)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

---

5) En appliquant la même rotation à 2 systèmes indépendants, montrer que :

$$\begin{aligned} D^{j_1}_{m_1m'_1}(R)D^{j_2}_{m_2m'_2}(R) &= \sum_{jmm'} \langle j_1m_1, j_2m_2|jm\rangle\langle j_1m'_1, j_2m'_2|jm'\rangle D^j_{mm'}(R) \\ &= \sum_{j_3m_3m'_3}(2j_3+1)\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3\end{pmatrix} D^{*j}_{m_3m'_3}(R)\end{aligned}$$

6) En déduire la relation :

$$Y_{l_1m_1}(\theta,\phi)Y_{l_2m_2}(\theta,\phi) = \sum_{lm}\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l+1)}{4\pi}}\times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} Y^*_{lm}(\theta,\phi)$$

Exercice 4

1) Pour un spin 1/2, dans la représentation habituelle, montrer que si $P = (1 + i\,\sigma_x)/\sqrt{2}$,

$$P^{-1} = (1 - i\,\sigma_x)/\sqrt{2}$$

.

2) Quelle est l'interprétation physique de P ?

3) Montrer que $\sigma_y = P\,\sigma_z\,P^{-1}$.

4) En déduire une relation entre les opérateurs de rotation autour de Oy et autour de Oz.

5) En déduire les éléments de la matrice de rotation $d^{1/2}_{mm'}(\vartheta)$.

6) Quelle autre méthode aurait-on pu utiliser pour calculer cette matrice ?