Master de Physique, Mécanique Quantique
TD 5 : Harmoniques sphériques

Exercice 1
Montrer que les harmoniques suivantes sont orthonormées

$$Y_0^0(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\,\pi}}\ ,$$
$$Y_1^0(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\,\pi}}\cos\theta\ ,$$
$$Y_2^0(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{4\,\pi}}\,\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\ .$$

Exercice 2
Même question pour

$$Y_1^1(\vartheta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\,\pi}}\sin\theta\,\exp(i\,\varphi)\ ,$$
$$Y_2^1(\vartheta,\varphi) = -\sqrt{\frac{15}{8\,\pi}}\sin\theta\,\cos\theta\,\exp(i\,\varphi)\ .$$

Exercice 3
Établir l'expression du gradient et de la divergence en coordonnées sphériques. En déduire

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\ .$$

Si on écrit
$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{\vec{L}^2}{r^2}\ ,$$
quelle est l'expression de $\vec{L}^2$ en représentation de configuration avec des coordonnées sphériques ?

Exercice 4
Montrer que $Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)\propto\exp(i\,m\,\varphi)$.
Montrer que pour $\ell>0$, $Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)\propto\sin(|m|\,\vartheta)$.

Exercice 5
Montrer que pour $\ell=0$, on a $Y_\ell^0\propto P_\ell(\cos\vartheta)$, où $P_\ell(x)$ est un polynôme de Legendre. Calculer le coefficient sachant que la normalisation des polynômes de Legendre est

$$\int_{-1}^{+1} P_a(x)\,P_b(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2\,a+1}\,\delta_{ab}\ .$$

Quelle est la raison de cette normalisation ?

Exercice 6
Si on construit les états propres de l'oscillateur spatial (voir le TD précédent sur ce sujet) en coordonnées cartésiennes, on trouve des états propres qui, outre un facteur commun $\exp(-(x^2+y^2+z^2)/2)$, contiennent

$$1,\ x,\ y,\ z,\ xy,\ yz,\ zx,\ (2\,x^2-1),\ldots$$

Quel est le contenu orbital des ces fonctions d'onde ?

Exercice 7
Vérifier sur un cas particulier que

$$Y_{\ell_1}^{m_1}(\Omega)Y_{\ell_2}^{m_2}(\Omega) = \sum_{\ell,m}\sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi\,(2\ell+1)}}$$
$$\times\langle\ell_1,\ell_2;0,0|\ell,0\rangle\,\langle\ell_1,\ell_2;m_1,m_2|\ell,m\rangle\,Y_\ell^m(\Omega)\ ,$$

en indiquant la signification des symboles et les bornes de sommation.
Donner un schéma de démonstration sans expliciter tous les calculs.