M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\psi_1 = \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$
$$\psi_\rho = \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$
$$\psi_\lambda = \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\psi_1 = \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$
$$\psi_\rho = \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$
$$\psi_\lambda = \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\psi_1 = \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \, ,$$
$$\psi_\rho = \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \, ,$$
$$\psi_\lambda = \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \, ,$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left(V_x \pm i V_y\right) \, , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \;, \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \;, \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \;,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\;, \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle \, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\,\varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \, , \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \, , \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \, ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left(V_x \pm i V_y\right) \, , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\psi_1 = \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$
$$\psi_\rho = \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$
$$\psi_\lambda = \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\,|1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\,\varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,, \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,, \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\,, \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \;, \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \;, \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \;,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (V_x \pm iV_y) \;, \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle \, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\,\varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,, \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,, \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (V_x \pm i V_y) \,, \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \;, \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \;, \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \;,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm i V_y) \;, \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\,|1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\,\varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ , \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ , \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ , \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ , \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\,\varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ , \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ , \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\,\varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\,|1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\,\varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,, \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,, \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y) \,, \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\,\varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\,|1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\,\varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\psi_1 = \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$
$$\psi_\rho = \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$
$$\psi_\lambda = \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ , \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ , \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\,|1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\,\varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec $e\ (< 0)$ et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\,|1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\,\varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,\\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \ ,\\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \ ,\\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y) \ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\psi_1 = \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$
$$\psi_\rho = \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$
$$\psi_\lambda = \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,, \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,, \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y) \,, \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\,|1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\,\varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\psi_1 = \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$
$$\psi_\rho = \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$
$$\psi_\lambda = \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \;, \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \;, \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \;,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left(V_x \pm i V_y\right) \,, \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,, \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,, \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (V_x \pm iV_y) \,, \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\psi_1 = \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$
$$\psi_\rho = \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$
$$\psi_\lambda = \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,, \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,, \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2] \,,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (V_x \pm iV_y) \,, \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

M1, 2012-13, MQ–TD4, Moment cinétique 2

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.
7) On considère un modèle simplifié de l'atome d'Hélium où le noyau est infiniment lourd et la répulsion entre les deux électrons est négligée (on verra une amélioration dans le TD sur la méthode variationnelle). Les fonctions d'onde d'espace sont du type $\varphi_{n_1,\ell_1}(\hat{r}_1)\, \varphi_{n_2,\ell_2}(\hat{r}_2)$ ou des combinaisons de ces fonctions de base. Pour les premiers niveaux, préciser la fonction d'onde de spin et d'espace qui satisfait les exigences du principe de Pauli.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1. Montrer que le coefficient de C.G. pour $(1, 0) \times (1, 0) \to (1, 0)$ est nul. Quel est l'analogue classique de cette propriété ?

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Construire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.
5)* Reprendre la dernière question de l'exercice 1 pour l'atome de Lithium.
6)** On construit une fonction d'onde d'un baryon formé de trois quarks identiques de spin 1/2 en combinant une fonction d'onde de couleur antisymétrique, une fonction d'onde de spin et des fonctions d'onde d'espace construites à l'aide des coordonnées relatives $\vec{\rho} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/\sqrt{2}$ et $\vec{\lambda} = (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{6}$, qui sont (non normalisées)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ , \\
\psi_\rho &= \rho_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ , \\
\psi_\lambda &= \lambda_z \exp[-\alpha(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)/2]\ ,
\end{aligned}$$

Montrer que pour satisfaire aux contraintes du principe de Pauli, il faut associer ψ_1 avec un spin total 3/2, et associer ensemble ψ_ρ et ψ_λ avec les deux fonctions d'ondes de spin 1/2.

Exercice 4

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 5

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.