Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ , \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin $1/2$ a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin $1/2$ placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ ,\quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ ,\quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1
Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2
Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3
Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4
Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5
L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6
On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7
Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8
Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9
Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10
Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ , \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin $1/2$ a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin $1/2$ placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ , \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin $1/2$ a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin $1/2$ placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin $1/2$ a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin $1/2$ placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1
Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2
Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3
Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4
Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5
L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6
On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7
Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8
Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin $1/2$ a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9
Précession de Larmor. Une particule de spin $1/2$ placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10
Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin $1/2$ a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin $1/2$ placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin $1/2$ a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin $1/2$ placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin $1/2$ a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin $1/2$ placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin $1/2$ a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin $1/2$ placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ , \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1
Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2
Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3
Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4
Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5
L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6
On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7
Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8
Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9
Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10
Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin $1/2$ a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin $1/2$ placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1
Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2
Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3
Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4
Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5
L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6
On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7
Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ , \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8
Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9
Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10
Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ , \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin $1/2$ a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin $1/2$ placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\;, \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\;,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\;,\; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\;,\; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\;,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\;.$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\;,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\;,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\;.$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\;. \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin $1/2$ a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin $1/2$ placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Master de Physique, année 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD 3 : Rotations 1

Exercice 1

Montrer qu'une translation de a est telle que $\mathcal{T}_a\,\psi(x) = \psi(x-a)$ et non pas $\psi(x+a)$, et est donnée par $\mathcal{T}_a = \exp(-i\,a\,p/\hbar)$.

Exercice 2

Montrer que l'opérateur d'évolution en temps $U(t-t_0)$ est tel que $\Psi(t) = U(t-t_0)\,\Psi(t_0)$ et est donné par $U(t) = \exp(-i\,H\,t/\hbar)$.

Exercice 3

Montrer que l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'un angle φ_0 est tel que $\mathcal{R}_z(\varphi_0)\,\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \Psi(r,\vartheta,\varphi-\varphi_0)$ et est donné par $\mathcal{R}_z(\varphi_0) = \exp(-\varphi_0\,\partial_\varphi)$.
En déduire que le générateur est L_z.

Exercice 4

Un opérateur A commute avec J_x et J_y. Montrer qu'il commute aussi avec J_z. Comment nomme-t-on un tel opérateur ?

Exercice 5

L'opérateur de moment cinétique orbital est défini par $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}$. Montrer que

$$[L_a, x_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,x_c\ , \quad [L_a, p_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,p_c\ ,$$

Comment nomme-t-on un opérateur O_1, O_2, O_3 qui vérifie $[L_a, O_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc}\,O_c$?

Exercice 6

On se place dans le sous-espace $\ell = 1$ qui correspond à la valeur propre $2\,\hbar^2$ de $\boldsymbol{L}^2$. Écrire les matrices représentatives de L_x, L_y et L_z.

Exercice 7

Les matrice de Pauli sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c\ ,$$

et que pour des vecteurs constants

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\,\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\ .$$

Simplifier

$$\exp(\alpha\,\sigma_x) \qquad \text{et} \qquad \exp(i\,\vartheta\,\boldsymbol{\sigma}.\hat{n})\ ,$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Exercice 8

Exercice emprunté à J.-L. Basdevant et al.
Une particule de spin 1/2 a une fonction d'onde $\psi_+(\boldsymbol{r})|+\rangle + \psi_-(\boldsymbol{r})|-\rangle$ où $|\pm\rangle$ sont les états propres normalisés de S_z et

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = R(r)\left(Y_0^0(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ ,$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1(\vartheta,\varphi) - Y_1^0(\vartheta,\varphi)\right)\ .$$

a. Quelle est la condition de normalisation sur $R(r)$?
b. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $\pm\hbar/2$ pour une mesure de S_z ou de S_x ?
c. Quelles sont les valeurs possible de L_z et les probabilités correspondantes ?

Exercice 9

Précession de Larmor. Une particule de spin 1/2 placée dans un champ magnétique uniforme et constant a un hamiltonien $H = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}_0 = -\mu\,B_0\,\sigma_z$ avec des axes appropriés. En posant $\mu\,B_0 = \omega_0\hbar/2$, décrire l'évolution en temps d'un état initial $\psi(0) = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ et en déduire la valeur moyenne au cours du temps des trois composantes de $\boldsymbol{\mu}$.

Exercice 10

Expérience de Rabi. On ajoute un champ magnétique tournant dans le plan xy, et l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} H &= -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} \\ &= -\mu\,B_0\,\sigma_z - \mu\,B_1\cos(\omega_t) + \mu\,B_1\sin(\omega\,t)\ . \end{aligned}$$

Décrire l'évolution en temps de ce système, en particulier la probabilité pour qu'un système, initialement dans l'état $|+\rangle$ se retrouve à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.