TD -2- Évolution en temps. Corrigé de l'exercice 3.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\,\exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right)\,.$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right)\,.$$

Corrigé

1) On sait que l'intégrale de $\exp(-x^2)$ sur la droite vaut $\sqrt{\pi}$. Ce qui signifie que $(\pi/a)^{1/4}\,\exp(-a\,x^2/2)$ est normalisée. La fonction d'onde proposée est donc normalisée dans l'espace des impulsions, et sa TF le sera dans l'espace des configurations.

Ce résultat sur la normalisation s'écrit

$$I_0(a) = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-a\,x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

Par dérivation par rapport à a, on trouve que

$$I_2(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\exp(-a\,x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} = \frac{I_0(a)}{2\,a}\,.$$

autrement dit la valeur moyenne de x^2 est $1/(2\,a)$. Ce qui signifie que la valeur moyenne de $(p-p_0)^2$ sur cette fonction d'onde est $\sigma^2\,\hbar^2/2$.

Pour $p_0 = 0$, on a le résultat classique que la la TF d'une gaussienne normalisée par rapport à p est une gaussienne normalisée par rapport à x, avec le paramètre qui est $\hbar$ fois l'inverse, soit $1/\sigma$. Pour $p_0 \neq 0$, on aura simplement

$$\tilde{\psi}(x) = (\pi/\sigma^2)^{-1/4}\,\exp(i\,p_0\,x/\hbar)\,\exp\left(-\frac{\sigma^2\,x^2}{2}\right)\,,$$

d'où finalement

$$\langle(p-p_0)^2\rangle = \frac{1}{2}\,\sigma^2\hbar^2\,,\quad \langle x^2\rangle = \frac{1}{2\,\sigma^2}\,,$$

ce qui démontre le résultat.

2) Au cours du temps, une composante de p donné a une énergie donnée $p^2/(2\,m)$ et donc évolue avec un facteur

$$\exp\left[-\frac{i\,p^2\,t}{\hbar\,2\,m}\right]\,.$$

Du point de vue des probabilités, on a toujours une distribution gaussienne en p, centrée autour de p_0, mais les phases des amplitudes sont modifiées. Explicitement

$$\psi(p,t) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\,\exp\left(-A/2\right)\,,$$
$$A = \frac{(p-p_0)^2}{\sigma^2\hbar^2} - \frac{i\,p^2\,t}{\hbar\,m}\,.$$

Quand on reconstruit la transformée de Fourier, il faut mettre ce polynôme sous forme canonique, soit $A = \alpha\,(p-p_1)^2+\beta$. Le calcul de p_1 serait intéressant car il exhiberait comment la valeur moyenne évolue au cours du temps. La question posée ne requiert que $\Re(1/\alpha)$ qui sera $(\hbar/\Delta x)^2$, tandis que $\Im(1/\alpha)$ donnera une phase. On trouve facilement

$$\alpha = \frac{1}{\hbar^2\,\sigma^2} - \frac{i\,t}{\hbar\,m}\,, \Re(1/\alpha) = \hbar^2\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right)^{-1}$$

d'où le résultat.