Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 \, |1\rangle + a_2 \, |2\rangle \; .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\,\cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\,\sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\,\exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \; .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \; .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 \, |1\rangle + a_2 \, |2\rangle \; .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\, \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\, \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b \exp(+i\omega t) \\ b \exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t) \exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t) \exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4} \, \exp\left(-\frac{(p - p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2} \right) \; .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p \, \Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2} \right) \; .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 \, |1\rangle + a_2 \, |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\ \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\ \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\ \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\ \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 \, |1\rangle + a_2 \, |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\, \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\, \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\, \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\, \Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\ \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\ \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 \, |1\rangle + a_2 \, |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\, \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\, \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b \exp(+i\omega t) \\ b \exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4} \, \exp\left(-\frac{(p - p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2} \right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p \, \Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2} \right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\ \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\ \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right)\ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right)\ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\ \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\ \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\ \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\ \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1\,|1\rangle + a_2\,|2\rangle\;.$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\,\cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\,\sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\,\exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right)\;.$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right)\;.$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\ \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\ \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\ \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\ \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\, \Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\ \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\ \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 \, |1\rangle + a_2 \, |2\rangle \; .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\,\cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\,\sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4} \, \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \; .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p \, \Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \; .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\ \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\ \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\,\cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\,\sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\,\exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\,\cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\,\sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\,\exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 \, |1\rangle + a_2 \, |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\, \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\, \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4} \, \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\, \Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\ \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\ \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 \, |1\rangle + a_2 \, |2\rangle \; .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\,\cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\,\sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\,\exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \; .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \; .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 \, |1\rangle + a_2 \, |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\,\cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\,\sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4} \, \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p \, \Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1\,|1\rangle + a_2\,|2\rangle\ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\,\cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\,\sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right)\ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right)\ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 \, |1\rangle + a_2 \, |2\rangle \; .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\, \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\, \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b \exp(+i\omega t) \\ b \exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4} \, \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \; .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p \, \Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \; .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\ \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\ \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 \,|1\rangle + a_2 \,|2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\,\cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\,\sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\,\exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\,\cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\,\sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\,\exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 \, |1\rangle + a_2 \, |2\rangle \; .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\, \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\, \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4} \, \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \; .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p \, \Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \; .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\ \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\ \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique

TD -2- Évolution en temps

Exercice 1

Un système possède deux niveaux, $|1\rangle$, d'énergie $E_0 - A$ et $|2\rangle$ d'énergie $E_0 + A$. Quelle sera l'évolution en temps de l'état initial

$$\psi(0) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle \ .$$

Exercice 2

1) Un système à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, d'énergies respectives $E_1 < E_2$ est modifié par une contribution non diagonale constante (et réelle) si bien que l'hamiltonien devient

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & b \\ b & E_2 \end{pmatrix}$$

Trouver les nouveaux états propres et leur énergie. On pourra poser $E_1 = E_0 - A$ et $E_2 = E_0 + A$ puis $A = \sqrt{A^2 + b^2}\ \cos(2\,\vartheta)$ et $b = \sqrt{A^2 + b^2}\ \sin(2\,\vartheta)$

2) Montrer sans calcul que l'écart entre les énergies est amplifié. Généraliser ce résultat.

3) Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

4) On remplace le terme non diagonal constant par un terme non diagonal oscillant pour modéliser une excitation par laser, soit

$$H = \begin{pmatrix} a & b\exp(+i\omega t) \\ b\exp(-i\omega t) & c \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = x(t)|1\rangle + y(t)|2\rangle$. Écrire le système différentiel satisfait par $x(t)$ et $y(t)$. Le résoudre en utilisant le changement de fonction $X(t) = x(t)\exp(-i\omega t/2)$ et $Y(t) = y(t)\exp(+i\omega t/2)$. Au temps $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Calculer la probabilité de le trouver dans l'état $|2\rangle$ au temps t.

Exercice 3

On considère le paquet d'onde à une dimension donné par sa fonction d'onde dans l'espace des impulsions

$$\psi(p) = (\pi\sigma^2\hbar^2)^{-1/4}\ \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2\hbar^2}\right) \ .$$

1) Calculer Δp et Δx et montrer que $\Delta p\,\Delta x = \hbar/2$.

2) Montrer que l'extension spatiale du paquet d'onde à l'instant t est donnée par

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2\hbar^2}{m^2}\right) \ .$$