Master de Physique 2012–2013

MQ TD-10 Évolution en temps

Exercice 1 : RMN

Certaines questions de cet exercice ont déjà été traitées au TD #1.

1. On considère un moment magnétique classique $\vec{\mu}$. À l'approximation gyroscopique, le vecteur rotation, le moment cinétique $\vec{j}$ et le moment magnétique $\vec{\mu}$ sont proportionnels, avec $\vec{\mu} = \gamma\,\vec{j}$. Montrer que la dynamique dans un champ $\vec{B}_0$ uniforme et constant est donnée par

$$\dot{\vec{\mu}} = \gamma\,\vec{\mu} \times \vec{B}_0 \ ,$$

et décrire le mouvement correspondant de l'extrémité de $\vec{\mu}$.

2. On ajoute un champ $\vec{B}_1(t)$ perpendiculaire à $\vec{B}_0$, de module constant, mais tournant avec une pulsation ω_1. Dans une base adaptée, le champ total est donc $\vec{B} = \{B_1\,\cos(\omega_1\,t),\, B_1\,\sin(\omega_1\,t),\, B_0\}$.
Écrire l'équation différentielle gouvernant l'évolution de $\vec{\mu}$.
Écrire $(\mathrm{d}\vec{\mu}/\mathrm{d}t)_1$ dans le référentiel tournant avec $\vec{B}_1$.
En déduire le mouvement de l'extrémité de $\vec{\mu}$.

3. On veut évaluer $\langle\vec{\mu}(t)\rangle$ par la mécanique quantique en représentation d'Heisenberg. L'hamiltonien est $H = -\vec{\mu}.\vec{B}$. Montrer que $\langle\vec{\mu}(t)\rangle$ obéit à la même équation d'évolution qu'en mécanique classique.

4. On veut établir directement l'évolution d'un état

$$\psi(t) = a_+(t)\,|+\rangle + a_-(t)\,|-\rangle \ ,$$

en partant de $i\,\hbar\,\psi = H\,\psi$ avec le H précédent, $\vec{B}$ précédent avec sa composante fixe et sa composante tournante et $\mu = \gamma\,\hbar\,\vec{\sigma}/2$, où les σ sont les matrices de Pauli habituelles.
Écrire les équations couplées reliant $\dot{a}_\pm(t)$ aux fonctions $a_\pm(t)$. Montrer qu'un changement de fonction $b_\pm(t) = \exp(\pm i\,\omega\,t)\,a_\pm(t)$ avec ω bien choisi permet de se ramener à un système d'équations à coefficient constants.
Résoudre ce système, et en déduire la probabilité $\mathcal{P}_{+-}$ pour qu'un état initial pur $|+\rangle$ soit mesuré à l'instant t dans l'état $|-\rangle$.

Exercice 2 : Traitement approché

L'hamiltonien H, indépendant du temps, possède des états propres non dégénérés, d'énergie $E_k = \hbar\,\omega_k$ et de fonction d'onde φ_k à $t = 0$, avec $\langle\varphi_k|\varphi_\ell\rangle = \delta_{k,\ell}$, qui évolue en $\Phi_k = \varphi_k\,\exp(-i\,\omega_k\,t)$. On se concentre désormais sur l'évolution d'un état qui est φ_0 au temps $t = 0$, mais subit non pas H mais $H + W$, où $W(t)$ est une perturbation dépendante ou indépendante du temps. On cherche la solution sous la forme

$$\Psi = \sum_k a_k(t)\,\Phi_k(t)$$

Montrer que

$$\dot{a}_\ell = -\frac{i}{\hbar}\sum_k a_k\,\langle\varphi_\ell|W|\varphi_k\rangle\,\exp(-i(\omega_k - \omega_\ell)t)$$

Résoudre ces équations en faisant l'approximation de remplacer dans le membre de droite $a_k \to a_k(0) = \delta_{k0}$. Discuter de la validité de cette approximation.
Montrer que pour $\ell \neq 0$,

$$a_\ell(t) \simeq \frac{1}{i\,\hbar}\int_0^t W_{\ell 0}\,\exp(i\,\omega_{k0}\,t')\,\mathrm{d}t' \ ,$$

où $\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j$.
Montrer que si W est indépendant du temps, la probabilité de transition vers l'état ℓ est

$$P_{0\to\ell} = \frac{|W_{\ell 0}|^2}{\hbar^2}\,\frac{\sin^2(\omega_{l0}t/2)}{(\omega_{l0}/2)^2} \ ,$$

En s'appuyant sur

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 x/x^2\,\mathrm{d}a = \pi \ ,$$

montrer que

$$\lim_{t\to\infty} \sin^2(\alpha\,t)/\alpha^2 = \pi\,t\,\delta(\alpha) \ ,$$

et en déduire que la probabilité de transition par unité de temps tend vers

$$w_{\ell 0} = \frac{2\,\pi}{\hbar}\,|W_{\ell 0}|^2\,\delta(E_\ell - E_0) \ .$$

Commentaire.