Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^{\infty} U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p \rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l+1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell+1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta,\Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^{\infty} U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l+1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell+1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta,\Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s\sum_{p=0}^\infty C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l+1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \le x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^{\infty} U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p \rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2 \exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \le x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell+1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p \rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2 \exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées “nombres magiques”. Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers “nombres magiques”. Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2 \exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées “nombres magiques”. Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers “nombres magiques”. Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} M\omega^2 \boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right] U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2} U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2} u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p \rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2 \exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées “nombres magiques”. Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers “nombres magiques”. Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \le x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell+1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^{\infty} U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\, \exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\, x^{\ell+1} + \cdots a_i\, x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées “nombres magiques”. Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers “nombres magiques”. Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\hat{r}) ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2 \exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \le x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r)\ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^{\infty} U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho)\ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s\sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\hat{r})\ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r)\ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \le x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x)\ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2\left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2\frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \; ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \; ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l+1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) \; ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \; ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \; ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^{\infty} U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\mathrm{exp}(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p \rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2 \exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \le x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\, \exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\, x^{\ell+1} + \cdots a_i\, x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\, c^2 \left(\frac{g}{\hbar\, c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2 \exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell+1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^{\infty} U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell+1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^{\infty} U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2\left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2\frac{1}{N^2}\,,\quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p \rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2\left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2\frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r)\ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho)\ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p \rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2 \exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r})\ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r)\ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x)\ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \; ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \; ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p \rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) \; ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \; ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \; ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \,,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \,,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées “nombres magiques”. Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers “nombres magiques”. Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) \,,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \,,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \,,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell+1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \; ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^{\infty} U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \; ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\mathrm{exp}(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2 \exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées “nombres magiques”. Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers “nombres magiques”. Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) \; ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \; ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \; ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2\left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2\frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r)\ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho)\ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s\sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r})\ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r)\ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x)\ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^{\infty} U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2\left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2\frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell+1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^{\infty} U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p \rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2 \exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r)\ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^{\infty} U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho)\ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2 \exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées “nombres magiques”. Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers “nombres magiques”. Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r})\ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r)\ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x)\ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2\left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2\frac{1}{N^2}\,,\quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2\left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2\frac{1}{N^2}\,,\quad N \geq \ell+1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r)\ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho)\ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p \rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2 \exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r})\ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r)\ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \le x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x)\ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r) \ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^{\infty} U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho) \ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p \rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2 \exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées “nombres magiques”. Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers “nombres magiques”. Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r}) \ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r) \ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x) \ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r)\ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^{\infty} U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho)\ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\hat{r})\ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r)\ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x)\ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell{+}1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?

Master de Physique 2012-13
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\boldsymbol{R}^2$$

où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\boldsymbol{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta, \Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r)\ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\boldsymbol{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho)\ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l + 1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées "nombres magiques". Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers "nombres magiques". Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. États liés coulombiens

Une particule de masse μ est soumise au potentiel $V = -g/r$, où $g > 0$ et $r = \|\boldsymbol{r}\|$ est la distance au centre de force.

1) Montrer qu'on peut chercher la fonction d'onde des états liés sous la forme

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_\ell^m(\hat{r})\ ,$$

en indiquant la signification des différents termes.

2) On pose $u = u(r) = u_\ell(r)$ pour simplifier, qui satisfait l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left[u'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,u\right] - \frac{g}{r}\,u = E\,u(r)\ ,$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ (en fait on requiert la normalisabilité). Montrer que $E < 0$.

3) On pose $r = a\,x$ où a est une constante positive qui donnera l'ordre de grandeur de la taille d'un état lié et x une variable sans dimension telle que $0 \leq x < +\infty$. On pose $v(x) = u(r)$. Montrer qu'un choix judicieux de a permet de se ramener à l'équation

$$-v''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,v(x) - \frac{v(x)}{x} = -k^2\,v(x)\ ,$$

et donner l'expression de a et la relation entre E, k^2 et les constantes du problème.

4) Montrer qu'à l'origine, $v(x) \sim x^{\ell+1}$ et qu'à l'infini $v(x) \sim \exp(-k\,x)$.

5) On pose $v(x) = w(x)\,\exp(-k\,x)$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(x)$.

6) On en cherche une solution en série entière

$$w(x) = a_{\ell+1}\,x^{\ell+1} + \cdots a_i\,x^i + \cdots$$

Établir la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

7) Montrer que pour $n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \simeq 2\,k/n$.

8) Montrer que cela implique qu'en général $w(x) \propto \exp(2\,k\,x)$ et donc que $v(x) \propto \exp(+k\,x)$ et que la solution n'est pas normalisable.

9) Pour quelle valeurs particulières de k échappe-t-on à ce comportement ?

10) En déduire que les énergies propres sont

$$E_N = -\frac{1}{2}\,\mu\,c^2 \left(\frac{g}{\hbar\,c}\right)^2 \frac{1}{N^2}\,, \quad N \geq \ell+1\,, N \in \mathbb{N}^*$$

11) Quelle dégénérescence observe-t-on entre états de ℓ différents ?

12) Sachant que l'état fondamental de l'hydrogène a une énergie de liaison de 13,6 eV, quelle sera celle d'un antiproton autour d'un noyau d'hélium en négligeant l'effet des interactions fortes ?