

Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique TD -7-
Méthodes de perturbation

Exercice 1

Calculer au premier ordre en perturbation la correction à l'énergie de l'état fondamental d'un atome hydrogénéoïde due à la taille finie du noyau. On suppose que la charge du noyau est répartie uniformément dans un volume sphérique de rayon R , où R est beaucoup plus petit que le rayon de Bohr.

Quel est le sens de l'approximation par rapport à ce que serait un calcul exact ?

Cette correction est-elle plus grande ou plus petite pour les atomes muoniques, où un électron est remplacé par un muon environ 200 fois plus lourd.

Exercice 2

Un rotateur rigide sphérique ayant un moment d'inertie I et un moment dipolaire électrique $\vec{d} = d\hat{r}$ est placé dans un champ électrique uniforme \vec{E} . En considérant le champ électrique comme une perturbation, calculer la première correction non nulle aux niveaux d'énergie du rotateur.

On donne :

$$\int d\hat{r} Y_{l_1 m_1}(\hat{r}) Y_{l_2 m_2}(\hat{r}) Y_{l_3 m_3}(\hat{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} [(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)(2l_3 + 1)]^{1/2} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{pmatrix} l & 1 & l+1 \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} = (-1)^{l+m+1} \left[\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+2)(2l+3)} \right]^{1/2}$$

Exercice 3

Calculer au premier ordre en perturbation le déplacement des niveaux d'énergie d'un atome hydrogénéoïde produit par l'augmentation d'une unité de la charge nucléaire (émission d'un β^-). On rappelle que la valeur moyenne de $1/r$ sur un état n de l'atome d'hydrogène est $1/(n^2 a_0)$ où a_0 est le rayon de Bohr.

Exercice 4 (*)

Un système de masse réduite μ interagit au moyen du potentiel

$$V(r) = -a/r + br^2,$$

où a et b sont deux constantes positives. Il pourrait s'agir d'un modèle pour les mésons composés d'un quark et d'un antiquark. On se demande lequel des deux termes pourrait être traité comme une perturbation par rapport à l'autre, pour évaluer l'énergie de l'état fondamental.

- 1) Si vous avez fait les deux calculs, lequel choisissez-vous ?
- 2) Quelle approximation sera la meilleure selon que μ est très grand ou très petit ?
- 3) Faire le calcul explicitement.

Exercice 5 ()**

Soit $H_0 + \lambda V$ un hamiltonien perturbé, dont on suit l'évolution d'un état propre supposé non dégénéré,

$$E = E_0 + \lambda E_1 + \lambda^2 E_2 + \dots \quad \psi = \psi_0 + \lambda \psi_1 + \dots$$

On suppose que $\langle \psi_0 | \psi_n \rangle = \delta_{n0}$.

1) Montrer que $E_1 = \langle \psi_0 | V | \psi_0 \rangle$.

2) * Montrer que $E_2 = \langle \psi_0 | V | \psi_1 \rangle$.

3) **** Montrer que $E_3 = \langle \psi_1 | V - E_1 | \psi_1 \rangle$.

4) Un oscillateur harmonique est perturbé par un terme impair, soit après simplification (voir TD -1-) $H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \lambda V(x)$ en représentation de configuration, $E_0 = 1$ et $\psi_0(x) = \pi^{-1/4} \exp(-x^2/2)$. Montrer que $\psi_1(x)$ est solution d'une équation différentielle inhomogène (équation de Sternheimer ou de Dalgarno-Lewis).

5) Résoudre cette équation pour $V(x) = x$. En déduire E_2 .

6) Retrouver E_2 par sommation sur les états non perturbés.

7) **Résoudre l'équation de Sternheimer pour $V(x) = \sin(\alpha x)$, et en déduire la correction d'énergie au deuxième ordre.

8) ***** Montrer que pour V quelconque

$$E_2 = - \int_{-\infty}^{+\infty} v(x) \psi_0(x)^2 dx \left[\int_0^x \frac{dx'}{\psi_0(x')^2} \left(\int_{x'}^{+\infty} v(x'') \psi_0(x'')^2 dx'' \right) \right].$$

9) Discuter des mérites respectifs de la sommation sur les états non perturbés et de l'équation de Sternheimer .