Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique
TD -5-

Système à deux nucléons

Exercice 1

Nous proposons d'étudier les états stationnaires d'un système à deux nucléons. l'interaction entre deux nucléons peut être donnée par le potentiel suivant :

$$V = V_1(r) + V_2(r)\,\vec{S}_1.\vec{S}_2 + V_3(r)\,\vec{L}.\vec{S} + V_4(r)\,S_{12}$$

où $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ est la distance entre les deux nucléons et $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ leurs spins. $\vec{L}, \vec{S}$ sont respectivement le moment angulaire et le spin total du système. S_{12} est un tenseur d'ordre 2 donné par l'expression :

$$S_{12} = 4\left(\frac{3\vec{S}_1.\vec{r}\vec{S}_2.\vec{r}}{r^2} - \vec{S}_1.\vec{S}_2\right)$$

1) Donner l'expression du hamiltonien de ce système.
2) Montrer que l'étude des états stationnaires de ce système peut se limiter à l'étude du hamiltonien relatif H_r.
3) En l'absence du terme tensoriel, montrer que le hamiltonien relatif réduit H_r^0 commute avec S^2, L^2, J^2 et J_z où $\vec{J}$ est le moment cinétique total du système.
4) Donner, dans ce cas, l'expression des états propres en tenant compte de la question précédente.
5) Le hamiltonien H_r^0 commute-t-il avec l'opérateur parité P ? Quelles sont les conséquences sur la parité des états stationnaires du système ? Peut-on exprimer la parité de ces états en fonction des nombres quantiques associés ?

Nous allons à présent étudier les conséquences du terme tensoriel.
6) Montrer que S_{12} peut s'écrire sous la forme suivante :

$$S_{12} = 2(3(\vec{S}.\hat{r})^2 - S^2)$$

7) S_{12} commute-t-il avec L^2 et avec P ? Quelles sont les conséquences sur la nature des états stationnaires ?
8) Le hamiltonien H_r est-il invriant en échangeant les deux spins $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$? Quelles sont les conséquences sur l'état de spin du système ?
9) Le deuton est un système lié de deux nucléons avec un moment cinétique $J = 1$ et de parité positive. Montrer que l'état fondemental du deuton lorsque la projection de moment cinétique dans la direction Oz est égale à $\hbar$, peut s'écrire sous la forme : *

$$\psi = f(r)Y_{0,0}\,\chi_{1,1} + g(r)\big(Y_{2,0}\,\chi_{1,1} + \lambda Y_{2,1}\,\chi_{1,0} + \mu Y_{2,2}\,\chi_{1,-1}\big)$$

où f et g deux fonctions réelles.
10) Déterminer les valeurs de λ et de μ.
11) Donner la norme de ψ.
12) Dans la suite on remplace $f(r)$ par $\psi_S(r)\cos\omega$ et $g(r)$ par $\psi_D(r)\sin\omega/\sqrt{10}$ avec :

$$\int_0^\infty r^2\psi_S^2\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty r^2\psi_D^2\,\mathrm{d}r = 1$$

Montrer que :

$$\psi = \frac{\chi_{1,1}}{\sqrt{4\pi}}\{\psi_S(r)\cos\omega + \frac{1}{2\sqrt{2}\hbar^2}\psi_D(r)\sin\omega S_{12}\}$$

13) Écrire l'équation de Schrödinger satisfaite par ψ. En déduire que ψ_S et ψ_D satisfont deux équations différentielles couplées que l'on demande de préciser.
14) * Montrer que l'énergie du deuton est *inférieure* à celle obtenue dans l'approximation où le couplage S-D est négligé.
15) ** Quelle serait la simplification de la dynamique dans la limite où $V_4(r)$ est très grand ?