Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique
TD -5-

Système à deux nucléons

Exercice 1

Nous proposons d'étudier les états stationnaires d'un système à deux nucléons. L'interaction entre deux nucléons peut être donnée par le potentiel suivant :

$$V = V_1(r) + V_2(r)\,\vec{S}_1.\vec{S}_2 + V_3(r)\,\vec{L}.\vec{S} + V_4(r)\,S_{12}$$

où $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ et $r = |\vec{r}|$ est la distance entre les deux nucléons et $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ leurs spins. $\vec{L}, \vec{S}$ sont respectivement le moment angulaire et le spin total du système. S_{12} est un tenseur d'ordre 2 donné par l'expression :

$$S_{12} = 4\left(3\vec{S}_1.\hat{r}\,\vec{S}_2.\hat{r} - \vec{S}_1.\vec{S}_2\right)$$

1) Donner l'expression du hamiltonien de ce système.
2) Montrer que l'étude des états stationnaires de ce système peut se limiter à l'étude du hamiltonien relatif H_r.
3) En l'absence du terme tensoriel, montrer que le hamiltonien relatif réduit H_r^0 commute avec S^2, L^2, J^2 et J_z où $\vec{J}$ est le moment cinétique total du système.
4) Donner, dans ce cas, l'expression des états propres en tenant compte de la question précédente.
5) Le hamiltonien H_r^0 commute-t-il avec l'opérateur parité P ? Quelles sont les conséquences sur la parité des états stationnaires du système ? Peut-on exprimer la parité de ces états en fonction des nombres quantiques associés ?

Nous allons à présent étudier les conséquences du terme tensoriel.
6) Montrer que S_{12} peut s'écrire sous la forme suivante :

$$S_{12} = 2(3(\vec{S}.\hat{r})^2 - S^2)$$

7) S_{12} commute-t-il avec L^2 et avec P ? Quelles sont les conséquences sur la nature des états stationnaires ?
8) Le hamiltonien H_r est-il invariant en échangeant les deux spins $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$? Quelles sont les conséquences sur l'état de spin du système ?
9) Le deuton est un système lié de deux nucléons avec un moment cinétique $J = 1$ et de parité positive. Montrer que l'état fondamental du deuton lorsque la projection de moment cinétique dans la direction Oz est égale à $\hbar$, peut s'écrire sous la forme :

$$\psi = \frac{u(r)}{r}\,\mathcal{Y}_{011}^m + \frac{w(r)}{r}\,\mathcal{Y}_{211}^m$$

où u et w deux fonctions réelles décrivant la partie radiale de la fonction d'onde et où le couplage du moment orbital ℓ et du spin $S = 1$ en un moment cinétique j est décrit par les harmoniques sphériques vectorielles

$$\mathcal{Y}_{\ell S j}^m = \sum_k \langle \ell, m-k; S, k | j, m\rangle\, |\ell, m-k\rangle \otimes |S, k\rangle\ ,$$

10) Choisir une valeur de m et écrire l'expression de ces harmoniques vectorielles, notées en abrégé $|s\rangle$ et $|d\rangle$, pour $\ell = 0, 2$.
11) Écrire aussi, avec ce même choix de m, l'expression de l'harmonique vectorielle $\ell = 1$, que l'on notera $|p\rangle$. Pourquoi n'entre-t-elle pas dans la fonction d'onde du deutéron ?
12) Donner la norme de ψ et montrer que la normalisation est assurée si

$$\int_0^\infty (u(r)^2 + w(r)^2)\,\mathrm{d}r = 1\ .$$

12) Montrer que l'action de $\vec{S}.\hat{r}$ sur $|p\rangle$ est de la forme

$$\vec{S}.\hat{r}\,|p\rangle = a\,|s\rangle + b\,|d\rangle\rangle\ ,$$

et que a et b sont indépendants de la valeur de m adoptée.
13) Montrer que $a = -\sqrt{2/3}$ et $b = -\sqrt{1/3}$. On pourra utiliser des valeurs particulières de m, θ ou ϕ.
14) En déduire l'action de $\vec{S}.\hat{r}$ sur $|s\rangle$ et $|d\rangle$, puis l'action de $(\vec{S}.\hat{r})^2$ et de S_{12} dans la base $\{|s\rangle, |p\rangle, |d\rangle\}$.
15) Récapituler et écrire les équations radiales couplées satisfaites par $u(r)$ et $w(r)$ pour décrire le deutéron.
16)* Montrer que l'énergie du deuton est *inférieure* à celle obtenue dans l'approximation où le couplage S-D est négligé.
17)** Quelle serait la simplification de la dynamique dans la limite où $V_4(r)$ est très grand ?