**Master de Physique**
**Travaux dirigés de Mécanique Quantique**
**TD -4-**

# Matrices de rotation

## Exercice 1

La rotation $R$ d'un système peut être paramétrée à l'aide des angles d'Euler $\alpha, \beta$ et $\gamma$. Dans ce cas là, l'opérateur rotation s'écrit :

$$D(R) = D(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(-i\alpha J_z/\hbar) \exp(-i\beta J_y/\hbar) \exp(-i\gamma J_z/\hbar) \, ,$$

où $\vec{J}$ est le moment angulaire total du système. On définit les matrices de rotation :

$$D^j_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle jm | D(\alpha, \beta, \gamma) | jm' \rangle$$

et les matrices de rotation réduites :

$$d^j_{mm'}(\beta) = D^j_{mm'}(0, \beta, 0)$$

1) Soit $a$ l'ensemble des valeurs propres des opérateurs qui commutent avec $\vec{J}$. Montrer que l'on a :

$$\langle ajm | D(\alpha, \beta, \gamma) | a'j'm' \rangle = \delta(a - a')\delta(j - j') D^j_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$$

où les états $\{|ajm\rangle\}$ sont supposés être normalisés. En déduire :

$$D(R)|ajm\rangle = \sum_{m'} D^j_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma) |ajm'\rangle$$

puis :

$$Y_{lm}(R^{-1}(\hat{r})) = \sum_{m'} D^l_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma) Y_{lm'}(\hat{r})$$

2) Montrer que les matrices de rotation sont unitaires.
3) Montrer par récurrence que :

$$\langle jm | (J_y)^n | jm' \rangle = \langle j - m' | (J_y)^n | j - m \rangle$$

puis, en utilisant une rotation de $\pi$ autour de l'axe $z$ :

$$d^j_{mm'}(-\beta) = (-1)^{m-m'} d^j_{mm'}(\beta)$$

En déduire la relation :

$$D^j_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)^* = (-1)^{m-m'} D^j_{-m-m'}(\alpha, \beta, \gamma)$$

4) En utilisant le fait qu'un vecteur unitaire d'angle $(\theta, \phi)$ s'obtient par rotation du vecteur unitaire porté par l'axe $Oz$, montrer que, pour $\psi$ arbitraire :

$$Y^*_{lm}(\theta, \phi) = D^l_{m0}(\phi, \theta, \psi) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

5) En appliquant la même rotation à 2 systèmes indépendants, montrer que :

$$\begin{aligned} D^{j_1}_{m_1 m'_1}(R) D^{j_2}_{m_2 m'_2}(R) &= \sum_{jmm'} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | jm \rangle \langle j_1 m'_1, j_2 m'_2 | jm' \rangle D^j_{mm'}(R) \\ &= \sum_{j_3 m_3 m'_3} (2j_3 + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} D^{*j}_{m_3 m'_3}(R) \end{aligned}$$

6) En déduire la relation :

$$Y_{l_1 m_1}(\theta,\phi) Y_{l_2 m_2}(\theta,\phi) = \sum_{lm} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l+1)}{4\pi}} \times \left( \begin{array}{ccc} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) Y^*_{lm}(\theta,\phi)$$