Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op}\ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op}\ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3 \times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \; ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \; ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\;, \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle \, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op}\ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op}\ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3 \times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \;,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \;,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\;, \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y) \ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3 \times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3 \times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op}\ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op}\ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.
1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.
2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \ ?$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3 \times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle \, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3 \times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \; ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \; ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y) \; , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \ ?$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(V_x \pm iV_y\right) , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \ ?$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y) \ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op}\ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op}\ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op}\ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op}\ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \ ?$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op}\ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op}\ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op}\ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op}\ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3 \times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op}\ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op}\ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op}\ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op}\ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op}\ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op}\ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \ ?$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle \, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3 \times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \; ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \; ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y) \; , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \,,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \,,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y) \,, \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle \, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y) \ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2,1/2)1,1\rangle = |1/2,1/2\rangle\,|1/2,1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2,1/2)0,0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12},1/2)S,S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0,1/2)1/2,1/2\rangle$ et $|(1,1/2)1/2,1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\,\hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op}\ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op}\ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op}\ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op}\ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\,|1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\,\hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op}\ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op}\ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\,|1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\,\hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op}\ ,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op}\ ,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\ , \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.

Master de Physique M1, Travaux dirigés de Mécanique Quantique, TD -3-

Moment cinétique et rotation

Exercice 1

1) Quelles sont les valeurs possibles du spin total S dans l'addition de deux spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$?
2) On fixe la phase de sorte que

$$|(1/2, 1/2)1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle\, |1/2, 1/2\rangle$$

En déduire la décomposition des états $S = 1$ avec $S_z = 0$ et $S_z = -1$.
3) Par orthogonalité, quelle doit être, à une phase près, la décomposition de

$$|(1/2, 1/2)0, 0\rangle \text{ ?}$$

Comment la phase est-elle fixée par convention ?
4) Récapituler les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage de deux spins 1/2.
5) Indiquer les symétries ($m \leftrightarrow -m$, $s_1 \leftrightarrow s_2$).
6) Vérifier que la matrice des coefficients est orthogonale. En déduire son inverse.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition d'un spin 1 et d'un spin 1/2.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent pour l'addition de deux spins 1.

Exercice 4

On considère l'addition de trois spins 1/2, soit $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$.
1) Quelle est la multiplicité de l'espace de ces trois spins ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de S ?
3) Constuire les états de spin total déterminé, notés

$$|(s_{12}, 1/2)S, S_z\rangle$$

vérifier la multiplicité et indiquer les propriétés de transformation de ces états vis-à-vis des permutations.
4) Montrer que les états $|(0, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ et $|(1, 1/2)1/2, 1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Exercice 4

1) Vérifier que les trois matrices $[3\times 3]$ définies par : $[S_i]_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ satisfont les relations de commutation du moment angulaire.
2) Trouver 3 matrices $[2 \times 2]$ qui satisfont ces relations.
3) Calculer $\vec{S}^2$ dans les deux cas. Conclusion ?

Exercice 5

1) Soit un vecteur $\vec{r}$ auquel on applique une rotation infinitésimale d'angle ϵ autour de $\hat{n}$. Exprimer le résultat de cette rotation à l'aide de $\vec{r}, \hat{n}$ et ϵ.
2) Soit $R(\epsilon) = 1 - (i\hbar)\epsilon\, \hat{n}.\vec{J}_{op}$, l'opérateur représentant cette rotation dans l'espace de Hilbert d'une particule, avec $\vec{J}_{op}$ l'opérateur moment angulaire. Si la particule est dans état propre $|\vec{r}\rangle$ de la position $\vec{r}_{op}$, quel doit être la valeur propre de l'état $R(\epsilon)|\vec{r}\rangle$ qui, par définition, représente l'état de la particule après la rotation, En déduire que l'on doit avoir :

$$R^{-1}(\epsilon)\vec{r}_{op}R(\epsilon) = \vec{r}_{op} + \epsilon\hat{n} \times \vec{r}_{op} + O(\epsilon^2)$$

Faire le même raisonnement pour l'impulsion $\vec{p}_{op}$.
3) En déduire les relations de commutation :

$$[J^i_{op}, r^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, r^k_{op} \;,$$
$$[J^i_{op}, p^j_{op}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\, p^k_{op} \;,$$

4) Montrer alors que l'on a :

$$\vec{J}_{op} = \vec{r}_{op} \times \vec{p}_{op} + \vec{S}_{op}$$

où $\vec{S}_{op}$ est un opérateur dont il faut préciser la nature.

Exercice 6

Soit un opérateur vectoriel $\vec{V}$.
1) Rappeler comment se transforment les composantes cartésiennes de cet opérateur lors d'une rotation R. Trouver les relations de commutation de ces composantes avec l'opérateur moment angulaire en utilisant une rotation infinitésimale ϵ.
2) À l'aide des composantes standard de cet opérateur vectoriel définies comme suit :

$$V^{1,\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(V_x \pm iV_y)\;, \qquad V^{1,0} = V_z$$

Montrer que $\vec{V}$ se transforme comme un OTI de rang 1.

Exercice 7

L'opérateur vectoriel représentant le moment magnétique d'un système est défini par la relation suivante :

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

où $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont le moment angulaire total et le spin total du système et μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = e/(2m_e)$ avec e (< 0) et m la charge et la masse de l'électron.

1) Montrer que le moment magnétique peut être relié au moment cinétique total du système $\vec{J}$ par la relation

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est un facteur appelé le facteur de Landé.

2) Déterminer l'expression de g à l'aide de J, L et S.