Master de Physique
Travaux dirigés de Mécanique Quantique. TD -1-

Ex. 1 : Modèle en couche du noyau atomique

L'étude de la structure des noyaux atomiques conduit à un modèle dans lequel les nucléons se meuvent indépendamment les uns des autres dans un potentiel attractif qui les confine à l'intérieur du noyau. Lorsqu'on cherche les premiers niveaux d'énergie du noyau, ce potentiel peut être décrit en bonne approximation par un potentiel harmonique à trois dimensions. L'hamiltonien d'un nucléon de masse M dans le noyau est alors donné par :

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\vec{R}^2$$

où $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement dans l'espace à trois dimensions. La théorie générale sur les potentiels centraux a permis de montrer à partir du fait que le hamiltonien commute avec les opérateurs de moment cinétique $\vec{L}$ et L^2, que l'étude de la partie radiale $\phi(r)$ de la fonction d'onde peut être séparée de celle de la partie angulaire $Y_l{}^m(\theta,\Phi)$. Le changement de fonction $U(r) = r\phi(r)$ permet alors d'écrire l'équation vérifiée par la partie radiale sous une forme équivalente à l'équation de Schrödinger d'une particule mobile dans un espace à une dimension :

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U(r) + \frac{M\omega^2 r^2}{2}U(r) = EU(r)\ ,$$

mais avec les conditions limites $U(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ (il faut en fait que $\int^\infty U^2(r)\mathrm{d}r$ converge)

1) On définit un changement de variables : $\vec{r} = a\vec{\rho}$, où a est un constante dimensionnée et $\vec{\rho}$ une variable. Montrer qu'un choix approprié de a permet d'écrire l'équation radiale pour $u(\rho) = a^{1/2}U(r)$

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u(\rho) + \rho^2 u(\rho) = \epsilon u(\rho)\ ,$$

et préciser la valeur de a et le lien entre E et ϵ.

2) On effectue un changement de fonction inconnue en posant : $u(\rho) = f(\rho)\exp(-\rho^2/2)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(\rho)$.

3) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une série entière : $f(\rho) = \rho^s \sum_{p=0}^{\infty} C_p\rho^p$ où s est choisi pour que l'on ait $C_0 \neq 0$.

3.1) En considérant les termes de plus basses puissances, démontrer les relations : $s = l+1$ et $C_1 = 0$.

3.2) En supposant la série infinie, établir une relation de récurrence sur les coefficients C_p. Montrer alors que le comportement de cette série pour $\rho \to +\infty$ est le même que celui de la fonction $\rho^2\exp(\rho^2)$. Que pensez-vous de cette solution ?

3.3) Déduire du résultat précédent les états d'énergie du nucléon.

4) Donner la dégénérescence des états de plus basse énergie. Retrouver le résultat obtenu pour les premières valeurs propres et leur dégénérescence, en résolvant le problème en coordonnées cartésiennes.

5) Quand on étudie les énergies nécessaires pour extraire un nucléon du noyau, on constate des discontinuités pour des valeurs particulières du nombre de nucléons (2, 8, 20, 28, 50,...) appelées “nombres magiques”. Le calcul effectué dans l'approximation harmonique permet d'interpréter les trois premiers “nombres magiques”. Voyez-vous pourquoi ?

Ex. 2. Lois d'échelle

Une particule de masse μ subit le potentiel central $V(r) = \epsilon(\alpha)gr^\alpha$, où ϵ est la fonction signe et $g > 0$ (ce qui assure que l'interaction est attractive). *A priori* l'énergie d'un niveau de nombres quantiques $\{\ell, m, n\}$ dépend des constantes g, μ et $\hbar$ qui interviennent dans l'équation de Schrödinger.
1)* Montrer que pour chaque niveau $\{\ell, m, n\}$, l'énergie est de la forme

$$E = (m/\hbar^2)^\beta\, g^\gamma\, \eta\ ,$$

où η est l'énergie pour $g = m = \hbar = 1$, en précisant la valeur des exposants β et γ en fonction de α. Retrouver les résultats familiers de l'oscillateur harmonique et du potentiel coulombien comme cas particuliers.
2)** Montrer que pour un potentiel $g\ln r$, un changement de la masse μ décale l'ensemble du spectre d'une constante.
3)*** Montrer que les fonctions d'onde radiales réduites pour les états S ($\ell = 0$) d'un potentiel linéaire $V(r) = gr$ peuvent se déduire de la fonction d'Airy $\mathrm{Ai}(x)$, solution rgulière à $x \to +\infty$ de l'équation d'Airy

$$-y''(x) + x\,y(x) = 0\ .$$

Relier les énergies propres de $V(r) = gr$ aux zéros de $\mathrm{Ai}(x)$ (situés sur le demi-axe $x < 0$).