Méthodes Mathématiques pour la physique
Examen de Janvier 2011

Durée 3h, pas de document autorisé, calculettes programmables autorisées

Transformée de Fourier

1. Calculer directement l'intégrale sur tout l'espace $\mathbb{R}^3$
$$I(a) = \int \mathrm{d}^{(3)}\boldsymbol{p}\, \frac{1}{(\boldsymbol{p}^2 + a^2)^2}\ , \tag{1}$$
où a est une constante positive. On pourra utiliser
$$f(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2\,a}\ ,$$
et les relations obtenues par dérivation.
2. Calculer
$$J(a) = \int \mathrm{d}^{(3)}\boldsymbol{r}\, \frac{\exp(-2\,a\,r)}{r^2}\ , \tag{2}$$
3. Calculer la transformée de Fourier du potentiel de Yukawa
$$g(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(2\,\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^{(3)}\boldsymbol{r}\, \frac{\exp(-a\,r)}{r}\, \exp(-i\,\boldsymbol{r}.\boldsymbol{p})\ . \tag{3}$$
4. Retrouver ainsi le facteur de proportionnalité entre $I(a)$ et $J(a)$.

Équation différentielle, fonction de Green On cherche à résoudre le problème constitué de l'équation différentielle et des conditions limites
$$y''(x) + y(x) = \sin(2\,x)\ , \quad y(0) = 0\ , \quad y'(0) = 0\ . \tag{4}$$

1. Quelles sont toutes les solutions de $y''(x) + y(x) = 0$?
2. Trouver une solution particulière exponentielle de $y''(x) + y(x) = \exp(2\,i\,x)$.
3. En déduire la solution du problème.
4. Résoudre $y''(x) + y(x) = \delta(x - u)$ avec $y(x) = 0$ et $y'(x) = 0$ pour $x < u$.
5. Retrouver ainsi la solution du problème.

Matrice à un paramètre On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 3 \end{pmatrix}\ . \tag{5}$$

1. Que peut-on dire *a priori* des valeurs propres et des vecteurs propres pour $x \in \mathbb{R}$?
2. Que peut-on dire *a priori* des spectres correspondant aux valeurs x et $-x$?
3. On note $\lambda_1(x) < \lambda_2(x)$ les deux valeurs propres. Pourquoi s'attend-on à ce que
$$\lambda_1(x) < 1 < 3 < \lambda_2(x)\ . \tag{6}$$

4. Vérifier ces propriétés par un calcul explicite.
5. Généraliser ces propriétés, si c'est possible, au cas de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x \\ x & 3 & 3x \\ 2x & 3x & 5 \end{pmatrix} , \tag{7}$$

sans faire le calcul explicite.

Potentiel delta On considère l'équation différentielle

$$-y''(x) - g\,\delta(x)\,y(x) + k^2\,y(x) = 0 \,, \quad k > 0 \,, \quad \lim_{|x|\to\infty} y(x) = 0 \,. \tag{8}$$

qui peut être interprétée comme une équation de Schrödinger à une dimension dont le facteur $2m/\hbar^2$ est absorbé dans le couplage g et l'énergie $-k^2$.

1. Pour quelle valeur de k une solution $y(x) = \exp(-k\,|x|)$ convient-elle ?
2. En déduire que tout couplage $g > 0$ attractif donne un état lié et un seul.
3. Retrouver ce résultat par examen de la solution à $k = 0$. On pourra, ici, se contenter d'un exposé un peu qualitatif.

On considère maintenant une équation avec deux potentiels delta de même intensité

$$\begin{aligned} &- y''(x) - g\,\delta(x+a)\,y(x) - g\,\delta(x-a)\,y(x) + k^2 y(x) = 0 \,, \\ &\qquad\qquad k > 0 \,, \quad a > 0 \,, \quad \lim_{|x|\to\infty} y(x) = 0 \,. \end{aligned} \tag{9}$$

4. Montrer qu'on peut se ramener sans perte de généralité au cas $a = 1$. On le supposera désormais.
5. Montrer qu'on peut chercher séparément les solutions paires et impaires.
6. On cherche une solution paire, avec $y(1) = 1$. Écrire, pour une valeur de k donnée, la forme de $y(x)$ pour $0 < x < 1$ et pour $1 < x$. Pour quelle valeur de k obtient-on un raccordement satisfaisant en $x = 1$. En déduire l'énergie du niveau pair $\epsilon_P = -k^2$ comme fonction du couplage g. Montrer que cette solution existe pour tout $g > 0$.
7. On cherche maintenant une solution impaire, avec $y(\pm 1) = \pm 1$. En supposant une valeur de k, écrire cette solution pour $x < -1$, $-1 < x < 1$ et $1 < x$. À quelle condition obtient-on un raccordement satisfaisant pour $x = \pm 1$? Calculer la relation entre l'énergie $\epsilon_I = -k^2$ du niveau impair et le couplage g. En déduire que l'existence de ce niveau implique une condition pour g, que l'on écrira.
8. Sans chercher la rigueur, retrouver cette condition en raisonnant sur l'examen des solutions correspondant à $k = 0$.

On considère maintenant une équation avec deux potentiels delta asymétriques

$$\begin{aligned} &- y''(x) - g_1\,\delta(x+a)\,y(x) - g_2\,\delta(x-a)\,y(x) + k^2\,y(x) = 0 \,, \\ &\qquad\qquad k > 0 \,, \quad a > 0 \,, \quad \lim_{|x|\to\infty} y(x) = 0 \,, \end{aligned} \tag{10}$$

et pour chaque solution $k = k_i$, on pose $\epsilon_i = -k_i^2$, comme précédemment.

9. Comment se situent les deux valeurs propres ϵ_1 et ϵ_2, si elles existent, par rapport aux valeurs propres ϵ_P et ϵ_I du problème précédent avec $g = (g_1 + g_2)/2$. On pourra donner la réponse, puis la justifier plus ou moins rigoureusement selon le temps disponible.