Formulaire sur l'équation de Dirac

- Equation de Dirac :

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi = 0$$

- slash de Feynman : $\not{a} \equiv a_{\mu}\gamma^{\mu}$
  L'équation de dirac prend alors la forme

$$(i\not{\partial} - m)\,\psi = 0$$

- Propriétés des matrice γ :
  - $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}$
  - $\left(\gamma^{0}\right)^{\dagger} = \gamma^{0}$ et $\left(\gamma^{0}\right)^{2} = I_4$
  - $\left(\gamma^{i}\right)^{\dagger} = -\gamma^{i}$ et $\left(\gamma^{i}\right)^{2} = -I_4$
- Représentation de Dirac des matrices γ

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Résumé des solutions de l'équation de Dirac

- Solutions de l'équation de Dirac pour une particule libre
  $\psi = u(E,\vec{p})e^{+i(\vec{p}.\vec{r}-Et)}$ satisfait $(\gamma^\mu p_\mu - m)u = (\not{p} - m)u = 0$

  avec $u_1 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}$ et $u_2 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$

- Solutions de l'équation de Dirac pour une antiparticule libre
  $\psi = v(E,\vec{p})e^{-i(\vec{p}.\vec{r}-Et)}$ satisfait $(\gamma^\mu p_\mu + m)v == (\not{p} + m)v = 0$

  avec $v_1 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Résumé des solutions de l'équation de Dirac - états propres d'hélicité

Pour une particule en mouvement dans la direction (θ, ϕ) usuelle d'un repère sphérique :
(on définit $c = \cos\theta/2$ et $s = \sin\theta/2$)

- Solutions de l'équation de Dirac pour une particule libre

$$u_\uparrow = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} c \\ s\, e^{i\phi} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} c \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} s\, e^{i\phi} \end{pmatrix} \text{ et } u_\downarrow = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} -s \\ c\, e^{i\phi} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} s \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} c\, e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

- Solutions de l'équation de Dirac pour une antiparticule libre

$$v_\uparrow = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m} s \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} c\, e^{i\phi} \\ -s \\ c\, e^{i\phi} \end{pmatrix} \text{ et } v_\downarrow = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m} c \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} s\, e^{i\phi} \\ c \\ s\, e^{i\phi} \end{pmatrix}$$