PARTIE C – Thèmes transverses – Corrigé

C.1/ Mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène dans le modèle de Thomson.

C.1.1 La distribution de charge positive de densité $\rho = e/(4/3\ \pi R^3)$ crée en tout point M un champ à symétrie sphérique $\vec{E} = E(r)\ \vec{e}_r$ Le théorème de Gauss appliqué à une sphère de rayon $r < R$ donne la relation suivante : $E(r) \times 4\pi r^2 = \rho \times 4/3 \times \pi r^3 / \varepsilon_0$ soit $E(r) = \rho r / 3\varepsilon_0$

$$E(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\, r \quad \text{avec} \quad k = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

C.1.2.1 Il est soumis à une force centrale $\vec{F} = -ek\ \vec{r}$ .Le mouvement est donc plan ou selon une droite (selon les conditions initiales).

En effet, le moment cinétique $\vec{\sigma}_0$ de l'électron est une constante ; le mouvement se fait dans un plan perpendiculaire à lorsque ce vecteur n'est pas nul.

$$\boxed{\vec{\sigma}_O = m\ \overrightarrow{OM}_0 \wedge \vec{v}_0}$$

C.1.2.2 L'équation du mouvement s'écrit :

$$\boxed{m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + ek\ \vec{r} = \vec{0}}$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique spatial de pulsation

$$\omega_0^2 = \frac{ek}{m} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}.$$

C.1.2.3 La trajectoire dépend des conditions initiales : position M_0 et vecteur vitesse ϖ_0.

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0 \cos(\omega_0 t) + (\vec{v}_0/\omega_0)\sin(\omega_0 t)}$$

C.1.3 $R = 10^{-10}$ m ; rayon plus grand que celui prévu par Rutherford mais il correspond au rayon d'un atome.

C.1.4 $\pi = -e\,a\ \vec{e}_r$; $p_x = p_0 .\cos(\omega_0 t)$ $p_y = p_0 \sin(\omega_0 t)$ avec $p_0 = -e.a$

C.2/ Champ électromagnétique dans le vide

C.2.1

$$\text{Maxwell – Ampère} : \vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Conservation du flux $\text{div}\ \vec{B} = 0$

$$\text{Maxwell – Faraday} : \vec{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Maxwell – Gauss $\text{div}\ \vec{E} = 0$

C.2.2.1 Elle doit vérifier l'équation de propagation, déduite des équations de Maxwell :
Cette équation est vérifiée pour k = ω /c ; la direction de propagation est celle de l'axe x'x ;
C'est une onde monochromatique rectiligne progressive se propageant dans le sens de $\vec{\mathbf{e}}_x$: $\vec{k}$ = k $\vec{e}_x$

$$\Delta \vec{E} - 1/c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \textbf{avec } \mu_0\, \varepsilon_0 c^2 = 1$$

soit
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

C.2.2.2

$\vec{B}$ **= (E_0/c)** cos (ω t – kx) $\vec{\mathbf{e}}_z$;($\vec{E}$, $\vec{B}$, &)
forment un trièdre direct.

C.2.2.3 La direction de $\vec{R}$ correspond à la direction de propagation de l'énergie ; le flux de $\vec{R}$ à travers une surface S correspond à l'énergie transmise par unité de temps à travers cette surface. Son unité est le watt par m² ($W.m^{-2}$).

$$\vec{R} = \varepsilon_0 c\, E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)\, \vec{\mathbf{e}}_x \quad ; \quad <\vec{R}> = (\varepsilon_0 c\, E_0^2 / 2)\, \vec{\mathbf{e}}_x$$

C.3/ Champ électromagnétique rayonné par un dipôle

C.3.1 Le dipôle est assimilé à deux charges (+q, –q) situé à une distance d. Le courant qui circule entre les deux charges est équivalent à un élément de courant ℓ. dq/dt $\vec{\mathbf{e}}_z$ = dp/dt $\vec{\mathbf{e}}_z$ .Tout plan passant par l'axe Oz est un plan de symétrie pour le système.
Le champ électrique est dans ce plan (E_r et E_θ) et le champ $\vec{B}$ créé est perpendiculaire à ce plan (B_φ).

C.3.2 Ce n'est pas une onde plane puisque l'amplitude des champs dépend de r et de θ . On peut la qualifier de quasi-plane car $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires, transversaux et le rapport de leur amplitude est E/B= c.

C.3.3

$$\vec{R} = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\omega^4 \sin^2\theta . p_0^2}{r^2}\cos^2[\omega(t - r/c)]\, \vec{e}_r \qquad <\vec{R}> = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\omega^4 \sin^2\theta . p_0^2}{r^2}\, \vec{e}_r$$

C.3.4 La puissance moyenne rayonnée est :

$$P_R = \iint_S <\vec{R}> . \vec{e}_r r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta \quad \text{soit}$$

$$P_R = \frac{\omega^4 . p_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

C.4/ Ondes mécaniques

C.4.1. $y(0,t)$ est la perturbation de la corde en x = 0, elle représente le signal au niveau de l'excitateur.

C.4.2.1. Cette équation est l'équation de D'Alembert à une dimension (équation d'onde).

C.4.2.2. $c = \frac{T^{1/2}}{\mu^{1/2}} = \left(\frac{MLT^{-2}}{ML^{-1}}\right)^{1/2} = LT^{-1}$, c est donc homogène à une vitesse, il s'agit de la vitesse de propagation de l'onde y(x,t).

C.4.2.3. Soit $y(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, en opérant le changement de variable $u = t - \frac{x}{c}$, on peut réécrire l'équation d'onde, sachant que : $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial u}$.
Ainsi, on obtient : $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} - c^2\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} = 0$, donc quel que soit f(u) l'équation d'onde est alors vérifiée.

C.4.2.4. De la même façon en posant $u = t + \frac{x}{c}$ alors $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial u}$ et l'on retrouve la même équation d'onde quel que soit g(u).