

PARTIE 1

RÉSUMÉ D'UNE PROGRESSION DE COURS ET EXERCICES RELATIFS À UNE PARTIE DU PROGRAMME DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

1.1. Théorie cinétique des gaz parfaits.

1.1.1. Modèle du gaz parfait monoatomique.

Énoncer les trois hypothèses définissant le modèle du gaz parfait.

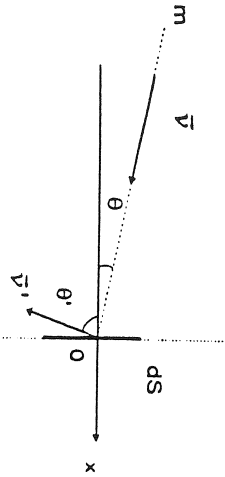
1.1.2. Pression cinétique.

Quelle est l'origine physique de la pression ?

Calcul de la pression cinétique :

Un atome de masse m se présentant avec une vitesse \vec{v} vient percuter en O un élément dS de paroi du récipient.

Soit Ox un axe normal à dS , orienté du gaz vers la paroi, et v_x la composante de \vec{v} sur cet axe.



Après le choc l'atome est renvoyé avec une vitesse \vec{v}' ayant sur Ox une composante v'_x .

Soit N le nombre d'atomes total du gaz, tous identiques, et n_i leur nombre par unité de volume.

En supposant les collisions élastiques, le gaz en équilibre thermique et l'isotropie des vitesses, calculer la pression p exercée par les atomes sur la paroi, en fonction de n_i , m et de la vitesse quadratique moyenne u_i , u_i^2 étant la valeur moyenne du carré de la vitesse des particules :

$$u^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2.$$

1.1.3. Température cinétique.

Définir la température cinétique d'un gaz parfait monoatomique à partir de l'énergie cinétique moyenne d'un atome.

Qu'appelle-t-on équilibration de l'énergie ?

11

1.2. Distribution des vitesses de Maxwell.

1.2.1. Énoncer les trois hypothèses de nature statistique qui caractérisent à l'échelle microscopique l'état d'équilibre thermodynamique du gaz.

1.2.2. La probabilité dP_v de trouver une particule de vitesse \vec{v} dont les composantes sont respectivement comprises entre v_x et $v_x + dv_x$, v_y et $v_y + dv_y$, v_z et $v_z + dv_z$, s'écrit :

$$dP_v = \frac{dN}{N} = F(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

$F(v_x, v_y, v_z)$ étant la fonction de distribution suivant les composantes des vitesses.

Déduire des hypothèses énoncées au paragraphe 1.2.1. que la fonction $F(v_x, v_y, v_z)$ est de la forme :

$$F(v_x, v_y, v_z) = f(v_x^2) f(v_y^2) f(v_z^2).$$

Montrer alors que la probabilité dP_v de trouver des particules dont le vecteur vitesse est compris entre v et $v + dv$ s'écrit sous la forme :

$$dP_v = A^3 e^{-Bv^2} dv_x dv_y dv_z$$

où v^2 désigne le carré de la vitesse.

1.2.3. Quelle relation existe-t-il entre les constantes A et B ?

On rappelle la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}.$$

1.2.4. Montrer que la densité de probabilité $p_v(v)$ pour la norme de la vitesse s'écrit :

$$p_v(v) = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-Bv^2}.$$

Tracer le graphe $p_v(v)$.

Définir et exprimer la vitesse la plus probable v_p .

1.2.5. Calculer la vitesse quadratique moyenne en fonction de B .

En exprimant de deux façons différentes l'énergie du gaz parfait monoatomique considéré au paragraphe 1.1., en déduire l'expression de B en fonction de m , k et T , k étant la constante de Boltzmann et T la température cinétique du gaz.

On rappelle la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}.$$

1.2.6. Donner alors l'expression de la densité de probabilité $p_v(v)$ en fonction de la température.

Puis les expressions, en fonction de la température, des vitesses moyenne v_m et la plus probable v_p .

On donne :

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}.$$

12

- 1.2.7. Comparer les trois vitesses : vitesse quadratique, vitesse moyenne et vitesse la plus probable. Les placer sur le graphique $P_c(v)$ de la question 1.2.4.

Application numérique:

On considère de l'hélium à la température $T = 300$ K.

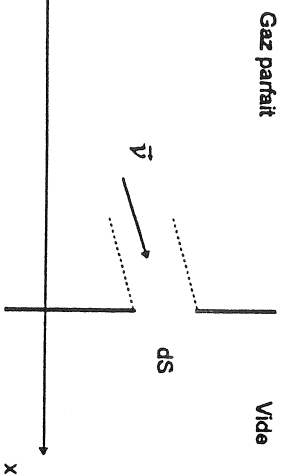
La masse de l'atome d'hélium est $M = 6,65 \cdot 10^{-27}$ kg.

Calculer v_p , v , v_m .

- 1.2.8. Application : calcul du débit à travers un trou.

On considère un récipient contenant un gaz parfait monoatomique, placé dans le vide. Un petit trou, d'aire dS , est percé dans la paroi.

Sachant que le nombre d'atomes contenus dans le récipient par unité de volume est n , calculer le débit D de ces atomes à travers l'orifice en fonction de n , et de la vitesse moyenne des atomes.



On donne : $\int_0^{+\infty} u e^{-u^2} du = \frac{1}{2}$.

1.3. Systèmes thermodynamiques.

1.3.1. Définitions.

— Définir les notions suivantes :

- état d'équilibre,
 - phase,
 - variable thermodynamique extensive, variable thermodynamique intensive,
 - système fermé; système ouvert,
 - système isolé; système non isolé;
- Qu'appelle-t-on transformation réversible? transformation irréversible?
- Donner un exemple simple de chacun de ces deux cas, en précisant les conditions des transformations.

- 1.3.2. Combien de variables thermodynamiques indépendantes sont-elles nécessaires pour déterminer l'état d'équilibre d'un corps pur à l'état gazeux?

Qu'appelle-t-on équation d'état du système?

Exemples:

1° Donner l'expression de l'équation d'état du gaz parfait monoatomique étudié au paragraphe 1.1.

2° Donner un exemple d'équation d'état pour un gaz réel.

- 1.3.3. Expérimentalement, il est possible de déterminer trois grandeurs caractéristiques, permettant d'accéder à l'équation d'état d'un gaz : ce sont les coefficients thermoélastiques. Les définir.

Quelle relation existe-t-il entre eux?
Calculer ces coefficients pour un gaz parfait.

- 1.3.4. Les coefficients de dilatation isobare α et de compressibilité isotherme χ_T d'un certain fluide ont pour expressions :

$$\alpha = \frac{a}{aT + bP};$$

$$\chi_T = \frac{1}{P} - \frac{b}{aT + bP}.$$

En déduire l'équation d'état du système.

1.4. Premier principe de la thermodynamique.

- 1.4.1. Donner un énoncé du premier principe de la thermodynamique.

- 1.4.2. L'énergie interne d'un système est une fonction d'état. Que signifie l'expression fonction d'état?

- 1.4.3. Au cours d'une transformation l'énergie peut être échangée sous deux formes : chaleur et travail. Comment ces deux formes se différencient-elles?

- 1.4.4. Dans une centrale thermique le rendement de la transformation de la chaleur en travail est de l'ordre de 20% à 30%. Quelles limites physiques voyez-vous à l'amélioration de ce rendement?

1.5. Le gaz parfait.

- 1.5.1. Définir les capacités calorifiques molaires d'un gaz, respectivement à pression constante et à volume constant. Quelles sont leurs valeurs pour un gaz parfait monoatomique? Donner la valeur de leur rapport γ .

- 1.5.2. Transformation isotherme réversible. On considère un système constitué de n moles de gaz parfait enfermées dans un cylindre muni d'un piston, et baignant dans un thermostat de température T . Soient P_1, V_1 la pression et le volume dans les conditions initiales, P_2, V_2 dans les conditions finales; calculer le travail et la quantité de chaleur reçus par le système au cours de la transformation supposée réversible.

- 1.5.3. Transformation adiabatique réversible.

1.5.3.1. Loi de Laplace.

On reprend le système précédent (§ 1.5.2.) mais on suppose maintenant les parois du cylindre imperméables à la chaleur.

Soient P_1, V_1 la pression et le volume dans les conditions initiales; une compression réversible amène le gaz dans l'état final de pression P_2 et de volume V_2 .

On suppose γ constant.

Calculer le travail reçu par le système au cours de la transformation, sachant que P et V , au cours de la transformation adiabatique réversible, sont liés par la relation $P V^\gamma = C^e$.

1.5.3.2. Formule de Reech.

Exprimer le rapport entre le coefficient de compressibilité isotherme d'un fluide et son coefficient de compressibilité adiabatique réversible, en fonction de γ .

Que peut-on en conclure quant aux pentes relatives, dans un diagramme de Clapeyron (que l'on définira), de l'isotherme et de l'adiabatique réversible passant par le point A de coordonnées (P_1, V_1) ?

Faire un schéma.

1.5.3.3. Expérience de Clément et Desormes.

Un ballon en verre de volume assez grand (20 L) communique avec l'extérieur par un robinet R.

La pression du gaz intérieur est mesurée par un manomètre à eau.

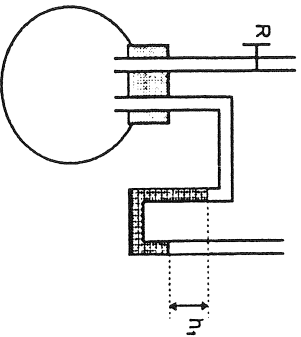
Au départ, il règne dans le ballon une légère dépression ΔP_1 mesurée par la dénivellation h_1 , et le ballon est à la température ambiante T_0 .

On ouvre R pendant un bref instant et on le referme aussitôt. Une petite quantité d'air a pénétré dans le ballon. La pression intérieure est alors égale à la pression atmosphérique P_0 .

Après une évolution transitoire, la pression se stabilise et on observe une nouvelle dépression ΔP_2 , mesurée par la dénivellation h_2 .

En vous aidant du diagramme tracé au paragraphe 1.5.3.2., comparer h_2 à h_1 .

Montrer que la mesure de h_1 et de h_2 permet de déterminer γ .



1.6. Application : étude d'un moteur à explosion.

Un moteur à explosion utilise comme agent moteur une mole de gaz parfait dont les capacités calorifiques sont supposées constantes.

Le gaz parfait décrit un cycle de Beau de Rochas, constitué des quatre transformations réversibles suivantes :

- une compression adiabatique de l'état 1 (P_1, V_1, T_1) à l'état 2 (P_2, V_2, T_2);
- un échauffement isochore de l'état 2 à l'état 3 (P_3, V_3, T_3);
- une détente adiabatique de l'état 3 à l'état 4 (P_4, V_4, T_4);
- un refroidissement isochore de l'état 4 à l'état 1.

1.6.1. Représenter le cycle dans un diagramme de Clapeyron.

1.6.2. Déterminer pour chacune des transformations la quantité de chaleur et le travail reçus par le gaz.

En déduire la quantité de chaleur Q et le travail W reçus par le gaz au cours d'un cycle complet.

1.6.3. Le rendement ρ du cycle est le rapport :

$$\rho = \frac{-W}{Q_{23}}$$

où Q_{23} est la quantité de chaleur reçue au cours de l'échauffement isochore.

Justifier cette définition du rendement.

Le calculer en fonction du taux de compression $\tau = \frac{V_1}{V_2}$ et de γ .

Application numérique.

Prendre $\tau = 8$, puis $\tau = 10$, $\gamma = 1,4$. Calculer ρ . Commenter.