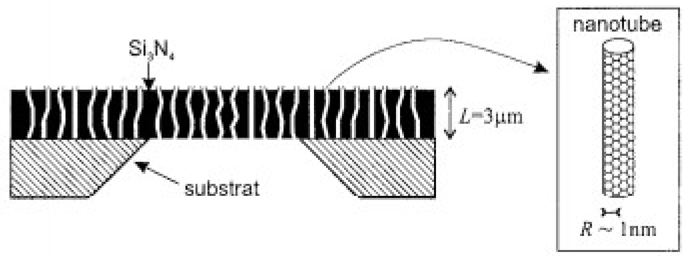
Mécanique des fluides – Agreg interne 2009 – Partie E

Ecoulement d'eau à travers un nanotube de carbone

Des expériences publiées récemment[1] ont permis la mesure de l'écoulement d'eau à travers une membrane poreuse de nitrure de silicium dont les pores sont des nanotubes de carbone alignés les uns avec les autres (voir figure 8). Le diamètre des nanotubes est compris entre 1,3 et 2 nm tandis que l'épaisseur de la membrane est 3 μm. La densité surfacique de nanotubes est $0,25\,\mathrm{cm}^{-2}$.



- *Figure* 8 -

On cherche ici à comparer les résultats de ces mesures à un modèle hydrodynamique simple.

1 Ecoulement de Poiseuille

Pour modéliser le transfert de liquide à travers un nanotube de carbone, on considère l'écoulement, dit de Poiseuille, d'un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η à travers un cylindre de rayon R. On s'intéresse à l'écoulement stationnaire induit par une différence de pression ΔP sur une longueur L du tube. On utilise les coordonnées cylindriques r, θ, z définies par la figure 9. L'origine ($z = 0$) de l'axe des z est notée O. On note $P(M)$ la pression au point M et on pose $P(z = 0) - P(z = L) = \Delta P$. On cherche le champ des vitesses du fluide sous la forme $\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_z$. On néglige les effets de la pesanteur.

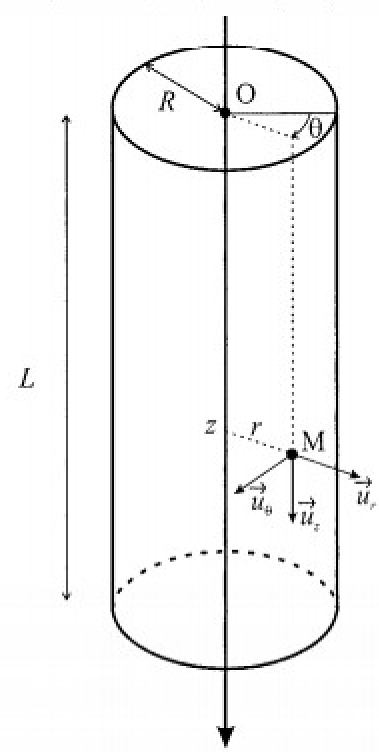
[1] J.K. Holt et al., *Fast mass transport through Sub-2-Nanometer carbon nanotubes*, Science, **312**, 1034 (2006).

On rappelle l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques :

si $\quad \vec{A} = A_r\vec{u}_r + A_\theta\vec{u}_\theta + A_z\vec{u}_z$

alors $\quad \mathrm{div}(\vec{A}) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

1. Ecrire l'équation locale traduisant la conservation de la masse.
   Montrer que dans le cas où le fluide peut être considéré comme incompressible, elle se ramène à :
   $$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$
   Un champ de vitesse de la forme $v(r)\vec{u}_z$ vérifie-t-il cette équation ?
   A quelle condition peut-on considérer le fluide comme incompressible ? Dans la suite, on supposera cette condition réalisée.

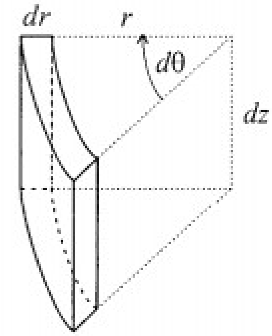


- *Figure* 9 -

On considère l'élément de fluide représenté figure 10. On rappelle que la force de viscosité exercée sur cet élément par le fluide situé entre 0 et r s'écrit :

$$d^2\overrightarrow{F} = -\eta \frac{dv}{dr}\, r d\theta dz\, \vec{u}_z$$

2. Quelle est l'origine microscopique de la force de viscosité ?



- *Figure* 10 -

3. Calculer la résultante des forces de viscosité qui s'exercent sur l'élément de fluide de la figure 10 et montrer que la densité volumique de force de viscosité s'écrit :

$$\frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\vec{u}_z$$

L'équation, dite de Navier-Stokes, qui régit le champ des vitesses du fluide en régime stationnaire et en géométrie cylindrique s'écrit :

$$\rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = -\overrightarrow{grad}\, P + \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\vec{u}_z$$

4. Interpréter chacun des termes de cette équation.

5. Montrer que le terme $\rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}$ est nul dans la géométrie considérée.
Déduire de l'équation de Navier-Stokes que P ne dépend que de z et montrer que le gradient de pression est indépendant de z. En déduire :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta P}{L}$$

Comment varie la pression dans le tube ?

6. En utilisant les conditions aux limites au centre et sur le bord du tube, montrer que :

$$v(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L}(r^2 - R^2)$$

Représenter schématiquement le profil de vitesse dans le tube.
Montrer que le débit volumique de l'écoulement est donné par :

$$D = \frac{\Delta P}{8\eta L}\pi R^4$$

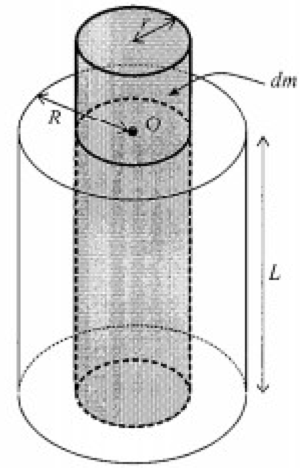
Quelle est la vitesse moyenne $\bar{v}$ d'une particule de fluide ?

7. En comparant les débits induits par un même gradient de pression dans un tube de rayon R et dans 100 tubes de rayon $R/10$, commenter la dépendance en R de D. Quelle est l'origine physique de ce comportement très différent de celui observé dans le transport du courant électrique par exemple ?

8. On se propose de retrouver rapidement les résultats précédents en faisant le bilan des forces qui s'exercent sur le système fermé constitué du fluide à l'intérieur d'un cylindre de rayon $r < R$ à l'instant t et de la masse dm de fluide qui y pénètre entre t et $t + dt$ (la figure 11 représente ce système à l'instant t).
Représenter le système fermé considéré à l'instant $t + dt$.

On note $\vec{p}(t)$ la quantité de mouvement du système fermé à l'instant t et on suppose que la pression est uniforme sur une section droite du cylindre.
Montrer que $\vec{p}(t) = \vec{p}(t + dt)$.
Quelles sont les forces qui s'exercent sur le système fermé considéré entre t et $t + dt$?
Montrer que l'application du théorème de la résultante cinétique permet de retrouver directement :

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r$$



- *Figure* 11 -

9. On définit le nombre de Reynolds de l'écoulement par :

$$\mathfrak{Re} = \frac{2\rho\bar{v}R}{\eta}$$

   Quelle est la signification physique de $\mathfrak{Re}$?
   Dans quelle limite les calculs faits ci-dessus sont-ils pertinents ?

2 Analyse des résultats expérimentaux

1. En supposant un écoulement de type Poiseuille, évaluer numériquement le débit volumique d'eau D à travers un nanotube de carbone de rayon $R = 1\,\text{nm}$, de longueur $L = 3\,\mu\text{m}$ pour une différence de pression $\Delta P = 1\,\text{bar}$.
2. Evaluer la distance moyenne entre molécules d'eau dans l'eau liquide.
3. En déduire le nombre de molécules d'eau qui traverse un nanotube de carbone par nanoseconde. Dans leurs expériences, Holt et al. observent un flux de l'ordre de $5\,10^{-1}$ molécules par nanotube et par nanoseconde. Comparer ce résultat à celui prédit par le modèle de Poiseuille. Commenter en précisant quelles peuvent être les origines physiques du désaccord observé.

Viscosité de l'eau : $\eta = 10^{-3}$ Pa.s