

étudie la possibilité de former une molécule de dihydrogène lorsque deux atomes, notés A et B par la suite, se rapprochent suffisamment.

En effet, lorsque les atomes A et B sont suffisamment proches alors l'électron de A sent l'influence de B et inversement. Dans ce cas, les électrons ne se trouvent plus chacun dans un puits de potentiel infini mais on peut les modéliser comme se trouvant dans un double puits de potentiel schématisé sur la figure (4). La modélisation par ce double puits de potentiel ne prend

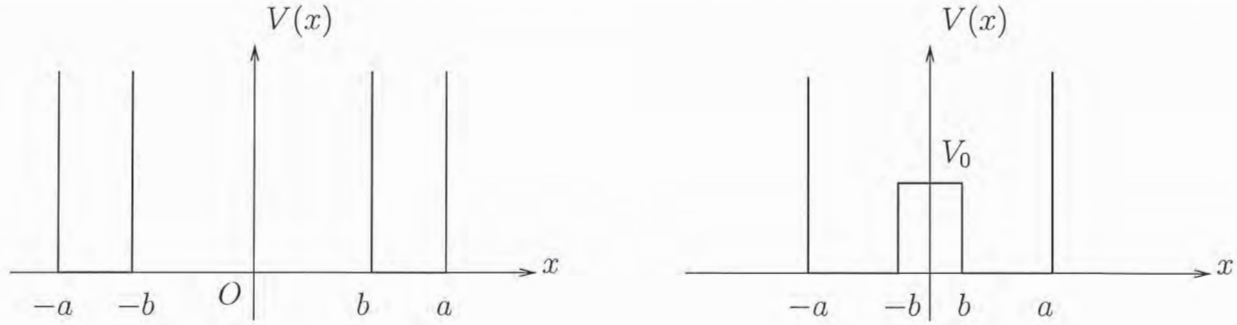


FIG. 4 – Lorsque les atomes sont éloignés l'un de l'autre (b suffisamment grand), les électrons sont chacun dans un puits de potentiel infini. Mais, lorsque les atomes sont suffisamment proches, les électrons sont dans le double puits de potentiel modélisé par la figure précédente. Lorsque $|x| > a$, le potentiel est infini ; il est nul lorsque $b < |x| < a$; et il est égal à V_0 lorsque $|x| < b$.

en compte que l'interaction entre les électrons et les protons. On néglige l'interaction entre les électrons.

Pour être plus précis, on considère dans un premier temps un seul électron en interaction avec les deux protons. Ainsi, on modélise l'ion H_2^+ et non la molécule H_2 . Dans un second temps seulement (lorsque cela sera explicitement indiqué), on introduira un électron supplémentaire dans le système afin de modéliser la molécule H_2 .

a. Les orbitales atomiques

On se place tout d'abord dans le cas où l'énergie potentielle de l'électron est décrite par les deux puits infinis illustrés dans le schéma de gauche de la figure (4). On cherche l'énergie du niveau fondamental, c'est à dire, l'énergie la plus petite que peut avoir l'électron dans ce double puits infini.

1. Justifier que l'énergie du niveau fondamental de l'électron dans le double puits infini est égale à l'énergie E_1 du niveau fondamental du simple puits étudié dans la partie (2.1.b.).
2. On peut alors écrire la fonction d'onde de l'électron (dans le double puits infini) dans le niveau fondamental sous la forme $\psi(x, t) = e^{-iE_1 t/\hbar} F(x)$ où F est une fonction réelle. Montrer que $F(x)$ s'écrit en général comme la somme de deux termes :

$$F(x) = \alpha_1 F_1^{(G)}(x) + \beta_1 F_1^{(D)}(x) \quad (23)$$

où α_1 et β_1 sont des constantes satisfaisant la condition $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$ alors que $F_1^{(G)}(x)$ et $F_1^{(D)}(x)$ sont simplement reliées à la fonction propre $F_1(x)$ du puits de potentiel infini (13). Pour cela, on identifiera L en fonction de a et de b .

3. Interpréter physiquement les fonctions $F_1^{(G)}(x)$ et $F_1^{(D)}(x)$.
4. Qu'appelle-t-on un niveau d'énergie dégénéré? Est-ce que le niveau fondamental du système total est dégénéré ici?
5. Représenter sur un schéma la fonction $F(x)$ lorsque $\alpha_1 = \beta_1$ et lorsque $\alpha_1 = -\beta_1$. On appellera $F_1^{(S)}(x)$ la fonction d'onde dans le premier cas et $F_1^{(A)}(x)$. Comment qualifie-t-on ces deux états?
6. On introduit maintenant un second électron dans le système pour modéliser la molécule H_2 . Par souci de simplicité, on néglige l'interaction entre les deux électrons. En déduire alors l'énergie du niveau fondamental du système quantique formé des deux électrons. On identifie cette énergie à celle du niveau fondamental de la molécule H_2 .

b. Les orbitales moléculaires

On se place maintenant dans la situation où le potentiel a la forme du double puits illustré par le schéma de droite de la figure (4). On désire étudier les niveaux d'énergie d'un seul électron (dans ce puits) dont on notera génériquement \mathcal{E} les valeurs. En particulier, on s'intéresse à la valeur \mathcal{E}_1 de l'énergie du niveau fondamental. Pour cette raison, on se limitera aux états du système tels que l'énergie $\mathcal{E} < V_0$. Aussi, une fonction d'onde d'énergie \mathcal{E} s'écrit sous la forme $\psi(x, t) = e^{-i\mathcal{E}t/\hbar} F(x)$ où $F(x)$ est interprétée comme l'orbitale moléculaire de notre modèle de H_2^+ . Compte tenu de la symétrie du double puits de potentiel, on cherche des fonctions $F(x)$ symétriques ou anti-symétriques pour décrire les orbitales moléculaires.

1. Interpréter physiquement la forme de l'énergie potentielle (4). Quelle est la raison physique qui explique l'existence de la barrière de potentiel de valeur V_0 au centre du double puits?
2. On commence par chercher les fonctions $F(x)$ symétriques. On peut montrer que, dans ce cas, $F(x)$ prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(x) &= A \sin(k(a+x)) & \text{si } -a \leq x \leq -b, \\ F(x) &= B \cosh(Kx) & \text{si } -b \leq x \leq b, \\ F(x) &= A \sin(k(a-x)) & \text{si } b \leq x \leq a. \end{aligned} \quad (24)$$

Dans ces équations, $\cosh(x)$ est la fonction cosinus hyperbolique; A et B sont des constantes de normalisation réelles sur lesquelles on reviendra par la suite; k et K sont des constantes positives qui dépendent de l'énergie \mathcal{E} de l'électron.

- a. En écrivant l'équation de Schrödinger dans chacune des trois situations $-a \leq x \leq -b$, $-b \leq x \leq b$ et $b \leq x \leq a$, montrer que :

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{et} \quad V_0 - \mathcal{E} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}. \quad (25)$$

- b. Comme dans le cas du puits infini, la fonction d'onde doit s'annuler aux points $x = a$ et $x = -a$. Vérifier que cela est bien le cas pour la fonction ci-dessus (24).
- c. Par contre, on ne peut plus dire que $F(b)$ et $F(-b)$ s'annulent puisque la barrière de potentiel a une hauteur finie en ces points. Cette condition est, en fait, remplacée par la continuité de la fonction $F(x)$ et de sa dérivée $F'(x)$ aux points $x = b$ et $x = -b$. Montrer alors que K et k doivent satisfaire la condition

$$\frac{K}{k} \tan(k(a-b)) \tanh(Kb) = -1 \quad (26)$$

pour que la fonction $F(x)$ existe et ne soit pas identiquement nulle. Dans cette équation, $\tanh(x)$ est la fonction tangente hyperbolique.

- d. Cette relation (26) implique la quantification des niveaux d'énergie \mathcal{E} du double puits de potentiel qui sont inférieurs à V_0 . Pour illustrer ce fait, montrer que l'équation (26) permet de retrouver la quantification des niveaux d'énergie du puits de potentiel infini dans la limite où V_0 est infiniment grand.
- e. Lorsque la valeur de V_0 est finie, la détermination des niveaux d'énergie est bien plus complexe que celle des niveaux d'énergie du puits infini. Toutefois, on montre que, lorsque $F(x)$ est symétrique, le niveau d'énergie le plus bas \mathcal{E}_1^S est inférieur à E_1 . Lorsque V_0 est grand devant E_1 mais fini, alors l'énergie du niveau fondamental est donnée par

$$\mathcal{E}_1^S = E_1 - \delta\mathcal{E} \quad \text{où} \quad \delta\mathcal{E} = \frac{2\hbar^2\pi^2}{mKL^3}e^{-2bK}. \quad (27)$$

Dans cette formule $K \simeq \sqrt{2mV_0}/\hbar$. Interpréter cette formule, en particulier le facteur exponentiel dans l'expression de $\delta\mathcal{E}$.

- f. Pour finir l'étude des fonctions symétriques, écrire les deux équations qui permettent de déterminer les valeurs des constantes A et B des solutions (24). On ne cherchera pas à résoudre ce système d'équations.
 - g. On note $\mathcal{F}_1^S(x)$ l'orbitale moléculaire symétrique d'énergie \mathcal{E}_1^S . Représenter schématiquement cette fonction. Comparer son allure à celle de la fonction $F_1^S(x)$ représentée dans la question (2.3.a.5.).
3. En s'inspirant de la solution symétrique (24) des orbitales moléculaires, déterminer la solution générale antisymétrique. On écrira cette solution générale en fonction de deux constantes de normalisation, que l'on notera également A et B , et en fonction des constantes k et K introduites précédemment.
 4. On peut procéder à une étude très similaire au cas précédent pour étudier les orbitales antisymétriques. Cette fois-ci, on arrive à la conclusion que l'énergie \mathcal{E}_1^A du niveau fondamental pour les fonctions d'onde antisymétriques est donnée par

$$\mathcal{E}_1^A = E_1 + \delta\mathcal{E} \quad (28)$$

lorsque V_0 est grand devant E_1 .

- a. Représenter schématiquement l'orbitale antisymétrique $\mathcal{F}_1^A(x)$ de niveau d'énergie \mathcal{E}_1^A . Comparer son allure à celle de la fonction $F_1^A(x)$ représentée dans la question (2.3.a.5.).
- b. Tracer schématiquement sur un même graphique les énergies \mathcal{E}_1^S et \mathcal{E}_1^A en fonction de b , toutes les autres variables étant supposées constantes. Commenter l'allure du graphe obtenu.
- c. Comment aurait-on pu comprendre à partir des représentations des fonctions $\mathcal{F}_1^S(x)$ et $\mathcal{F}_1^A(x)$ que la configuration symétrique est énergétiquement favorisée par rapport à la configuration antisymétrique ?
- d. On introduit maintenant un second électron dans le modèle. On suppose toujours que les deux électrons n'interagissent pas l'un avec l'autre. Les deux électrons peuvent-ils se trouver tous les deux dans l'état d'énergie \mathcal{E}_1^S ? On justifiera la réponse.

- e. Conclure alors que, selon ce modèle simplifié, la molécule de dihydrogène est favorisée énergétiquement par rapport au système formé de deux atomes d'hydrogène sans interaction.
- f. Quelle serait la liaison π et la liaison σ dans ce modèle ?

Ce modèle très simple et très limité d'une molécule permet malgré tout d'illustrer comment les principes de la physique quantique sont essentiels pour comprendre non-seulement les atomes mais aussi les assemblages d'atomes. D'ailleurs, le modèle précédent aurait été tout aussi adapté pour expliquer les changements de conformation de la molécule d'ammoniac NH_3 .

3 De l'onde à la particule : le photon

En 1900, dans un article qui propose une explication théorique originale du rayonnement des corps noirs, Max Planck est le premier à introduire la fameuse constante qui portera dorénavant son nom. C'est à ce moment là que l'idée de quantification apparaît pour la première fois dans l'Histoire même s'il est vrai que Ludwig Boltzmann en avait sûrement eu l'intuition quelques années auparavant dans le contexte de la thermodynamique statistique. En 1905, Albert Einstein propose une théorie de l'effet photoélectrique où la constante de Planck joue un rôle central et où le concept de photon, ce corpuscule de lumière, apparaît. "Ca y est", la physique quantique est lancée et apporte avec elle sa nouvelle vision révolutionnaire du monde microscopique. Mais paradoxalement, si la physique quantique permettra très vite de cerner les propriétés fondamentales des atomes et de la matière, il faudra attendre la seconde moitié du 20ième siècle pour comprendre profondément la nature quantique de la lumière avec la théorie de l'électrodynamique quantique et ainsi de définir précisément la notion de photon. S'en suit alors l'émergence des lasers et la révolution technologique qu'ils vont induire dans le domaine des communications en particulier...

Cette partie a pour objet de revoir comment l'étude des propriétés de la lumière et de ses interactions avec les atomes a conduit à l'idée de quantification. On reviendra dans un premier temps sur la théorie de Planck du corps noir. Ensuite, on étudiera quelques interactions entre la lumière et la matière qui illustrent le caractère corpusculaire de la lumière : on verra alors la théorie d'Einstein sur l'effet photoélectrique, ainsi que l'effet Compton entre un électron et un photon.

3.1 La théorie de Planck du corps noir

Un corps matériel porté à une certaine température émet un rayonnement. Certains corps émettent un spectre continu d'ondes électromagnétiques et, lorsqu'ils sont en équilibre thermique avec le milieu extérieur, leur spectre d'émission (énergie électromagnétique émise par unité de temps et par unité de surface du corps) suit une loi quasiment universelle qui ne dépend pratiquement pas de leur composition physico-chimique. Comme ces corps absorbent en plus toutes les radiations électromagnétiques qui leur arrivent dessus, on les qualifie de corps noir. Pour un corps noir idéal, le spectre d'émission (ou plus précisément la luminance monochromatique qui représente l'énergie émise par unité de temps, par unité de surface du corps noir et par longueur d'onde et qui s'exprime donc en $W.m^{-2}.m^{-1}$) est universel et ne dépend que de la température du corps. Ce spectre est illustré dans la figure (5). En réalité, la notion de corps noir modélise avec précision certains systèmes physiques tels les étoiles, les ampoules à filament ou encore l'Univers dans son ensemble...

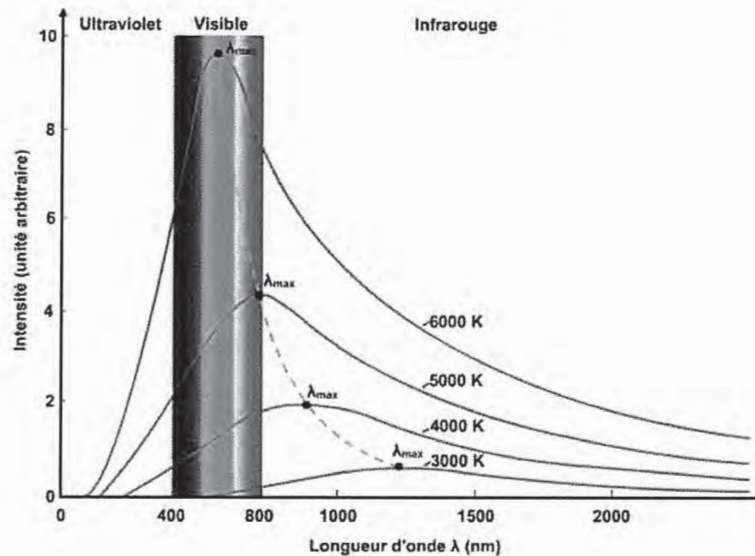


FIG. 5 – Spectre d'émission du corps noir en unités arbitraires en fonction de la longueur d'onde et de la température. A toute température, l'intensité émise est maximale pour une certaine longueur d'onde λ_{max} . Cette longueur d'onde diminue en fonction de la température selon la loi, dite de déplacement de Wien. Sur le schéma est mis en valeur le domaine visible du spectre électromagnétique.

Nous allons montrer ici comment la compréhension théorique du rayonnement d'un corps noir a amené Planck à poser les premières briques de la mécanique quantique.

a. La théorie classique de Rayleigh-Jeans

La théorie classique du corps noir a été élaborée par Rayleigh et Jeans à la fin du 19^{ème} siècle. Elle est fondée sur la théorie ondulatoire de la lumière et s'appuie, de fait, essentiellement sur les équations de Maxwell.

1. On commence par un bref rappel de la théorie ondulatoire des ondes électromagnétiques.
 - a. Rappeler les équations de Maxwell dans un milieu de permittivité ϵ_0 et de perméabilité μ_0 . On notera ρ la densité volumique de charge et \vec{j} le vecteur densité de courant volumique.
 - b. On se place tout d'abord dans le vide (sans charge ni courant).
 - i. Montrer que, dans ce cas, les champs électrique et magnétique satisfont la même équation de propagation dont on notera c la célérité. Rappeler l'expression de la célérité en fonction de la permittivité ϵ_0 et de la perméabilité μ_0 du vide.
 - ii. On suppose que le champ électromagnétique est une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω polarisée rectilignement. Définir les différents qualificatifs de cette onde. On s'appuiera sur un schéma.
 - iii. On munit l'espace d'un système de coordonnées cartésiennes telle que \vec{e}_z désigne le sens de propagation de l'onde et \vec{e}_x la direction de polarisation du champ électrique. Ecrire la solution générale de l'onde définie dans la question précédente en notation complexe.

- c. L'onde précédente se propage dans le vide et rencontre ensuite un milieu conducteur ohmique comme illustré sur la figure (6). Il en résulte une onde transmise dans le milieu conducteur et une onde réfléchie qu'on n'étudiera pas ici. Le milieu conducteur est non-chargé mais, en présence d'un champ électrique \vec{E} , il est le siège de courants ohmiques dont le vecteur densité de courant est donné par la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ où σ est la conductivité du milieu.

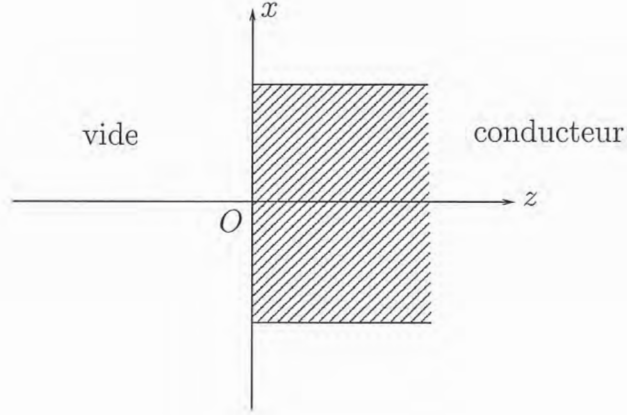


FIG. 6 – Une onde électromagnétique polarisée rectilignement se propage dans le vide dans le sens des z croissants et rencontre à partir de $z = 0$ un milieu conducteur ohmique.

- i. Justifier que le champ électrique, dans le milieu ohmique, s'écrit nécessairement, en notation complexe, sous la forme $\vec{E} = f(z)e^{-i\omega t}\vec{e}_x$ où $f(z)$ est une fonction qui ne dépend que de la variable z et i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.
- ii. En partant des équations de Maxwell, montrer que $f(z)$ satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i\mu_0\omega\sigma \right) f(z) = 0. \quad (29)$$

- iii. Déterminer la solution de cette équation sous la forme

$$f(z) = Ce^{ikz} \quad (30)$$

où C est une constante d'intégration alors que k dépend en particulier de la pulsation ω de l'onde.

- iv. Montrer que si la pulsation ω est petite devant une certaine pulsation ω_c , que l'on déterminera et dont on donnera un ordre de grandeur, alors k peut prendre les valeurs suivantes :

$$k = \pm \frac{1+i}{\delta} \quad (31)$$

où δ est une grandeur que l'on déterminera. Ces deux solutions sont-elles physiquement acceptables si on suppose que le milieu ohmique s'étend de $z = 0$ à $z = +\infty$?

- v. Ecrire alors la solution générale pour le champ électrique \vec{E} dans le milieu ohmique. Interpréter physiquement cette solution et donner en particulier un sens physique à la grandeur δ . Quel nom donne-t-on à la grandeur δ en général ?
- vi. Comment pourrait-on déterminer la constante C dans (30) ?
- d. Un conducteur parfait est caractérisé par une conductivité électrique infinie.
 - i. A la lumière des questions précédentes, montrer alors que le champ électrique est nécessairement nul à l'intérieur d'un tel conducteur.
 - ii. Que se passe-t-il lorsqu'une onde, se propageant dans le vide, arrive sur un conducteur parfait comme dans le cas de la figure (6) ?
 - iii. Rappeler les relations de passage pour le champ électrique à une interface entre deux milieux.
 - iv. Quelle est alors la particularité du champ électrique en un point à l'extérieur du conducteur parfait mais très proche de sa frontière ?
- 2. Venons en maintenant à l'approche de Rayleigh et Jeans pour comprendre le rayonnement du corps noir. Ils ont modélisé le corps noir comme une cavité parallélépipédique dont les parois sont des conducteurs parfaits et à l'intérieur de laquelle règne le vide. Ceci est illustré dans la figure (7). L'idée du modèle est que, si la cavité est percée d'un trou très petit devant les dimensions de la cavité, tout rayon qui y entre subit un grand nombre de réflexions et reste dans la cavité, avant de sortir éventuellement au bout d'un certain temps. Dans ce sens, la cavité "absorbe" tous les rayons qui y pénètrent et émet un rayonnement. Elle se comporte comme un corps noir.

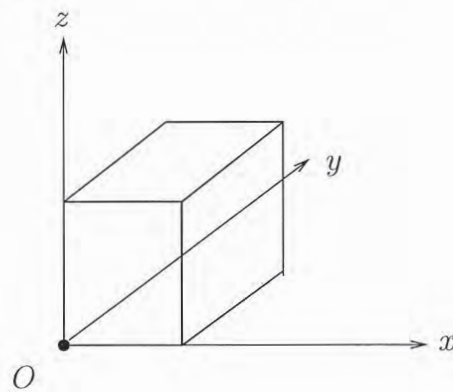


FIG. 7 – La cavité parallélépipédique a pour dimensions a dans la direction (Ox) , b dans la direction (Oy) et d dans la direction (Oz) .

On munit l'espace d'un repère de coordonnées cartésiennes décrit sur le schéma (7). On notera $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base de vecteurs associée.

- a. Pour simplifier le problème, on considère tout d'abord une onde électromagnétique, de pulsation ω , "unidimensionnelle" qui ne dépend que de la composante spatiale x en plus de la composante de temps t . Cette onde est supposée en outre polarisée rectilignement et son champ électrique s'écrit, en notation complexe, sous la forme :

$$\vec{E} = E(x) e^{-i\omega t} \vec{u} \quad (32)$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire. Quelle équation de Maxwell permet de dire que soit \vec{u} est perpendiculaire à \vec{e}_x soit $E(x)$ est une fonction constante ? Pour quelle raison la dernière condition n'est-elle pas acceptable ?

- b. En partant de l'équation de propagation du champ électrique, écrire l'équation différentielle satisfaite par $E(x)$. En déduire la solution générale pour la fonction $E(x)$.
- c. Quelles sont les conditions aux limites (aux points $x = 0$ et $x = a$) que doit satisfaire la fonction $E(x)$? On justifiera clairement la réponse.
- d. En déduire alors que les fréquences $\nu = \omega/(2\pi)$ de l'onde (32) permises dans la cavité sont nécessairement quantifiées dans le sens où ses seules valeurs permises sont de la forme $\nu_n = n \frac{c}{2a}$, c étant la célérité de la lumière dans le vide.
- e. On introduit la fonction $N(\nu)$ telle que $N(\nu)d\nu$ représente le nombre de fréquences permises dans la cavité, pour les ondes du type (32), dont la valeur est comprise entre ν et $\nu + d\nu$. Calculer $N(\nu)$ et montrer que cette fonction s'écrit sous la forme :

$$N(\nu) = 2 \times \frac{2a}{c}. \quad (33)$$

On justifiera tout particulièrement le facteur 2 dans cette expression.

- f. Rayleigh et Jeans ont effectué une analyse très similaire à la précédente en ne considérant pas uniquement les ondes "unidimensionnelles" (32) mais en tenant compte de la structure tridimensionnelle de la cavité. Ils ont montré que, dans ce cas, la fonction $N(\nu)$ prend la forme suivante :

$$N(\nu) = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 \quad (34)$$

où V est le volume de la cavité. Retrouver cette formule et vérifier son homogénéité.

- g. Ils ont ensuite utilisé des résultats de thermodynamique statistique classique. Ils savaient, depuis les travaux de Boltzmann, que lorsqu'un système thermodynamique classique est en équilibre à la température T , la loi de l'équipartition de l'énergie s'applique. Plus précisément, un système (à l'équilibre à la température T) composé d'un très grand nombre de degrés de liberté sans interaction les uns avec les autres est tel que l'énergie moyenne \bar{u} par degré de liberté quadratique du système est donnée par $\bar{u} = \frac{1}{2} k_B T$ où k_B est la constante de Boltzmann. Qu'est-ce qu'un degré de liberté quadratique ? Combien de degrés de liberté quadratiques possède un oscillateur harmonique unidimensionnel ?
- h. Dans le cas de la cavité électromagnétique, les degrés de liberté sont ceux des ondes électromagnétiques qui sont effectivement en grand nombre. En outre, chaque onde de fréquence ν du type (32) dans une direction \vec{u} donnée, a une dynamique analogue à celle d'un oscillateur harmonique unidimensionnel. En déduire l'énergie moyenne associée à une telle onde.
- i. En déduire la densité volumique d'énergie par unité de fréquence $\rho_T(\nu)$ à l'intérieur de la cavité définie par le fait que $\rho_T(\nu)d\nu$ est l'énergie moyenne par unité de volume des ondes de la cavité en équilibre à la température T et dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$.

- j. Tracer schématiquement $\rho_T(\nu)$ en fonction de ν pour une température T fixée arbitrairement. En comparant les résultats théoriques de Rayleigh-Jeans avec les résultats expérimentaux illustrés sur la figure (8), le physicien autrichien Paul Ehrenfest a employé l'expression de "catastrophe ultraviolette". Pourquoi ?

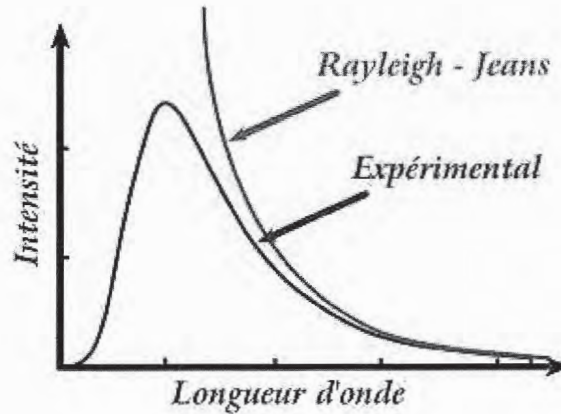


FIG. 8 – Comparaison entre la courbe théorique selon Rayleigh-Jeans et la courbe expérimentale du spectre du corps noir en fonction de la longueur d'onde. Les unités sont arbitraires.

b. La naissance de la constante de Planck

Max Planck a compris en 1900 que la raison de la catastrophe ultraviolette résidait fondamentalement dans l'attribution d'une énergie moyenne $\bar{u} = k_B T$ à chaque onde de fréquence ν dans la cavité. Or si cette loi semblait être vérifiée pour les "grandes" longueurs d'onde, elle paraissait ne plus pouvoir s'appliquer aux "petites" longueurs d'onde.

Or la loi de l'équipartition de l'énergie pour les systèmes thermodynamiques classiques s'appuie sur deux idées : la loi de distribution des énergies de Maxwell-Boltzmann et le fait que l'énergie des degrés de liberté microscopiques du système est une grandeur continue. De façon surprenante, Planck n'a pas remis en question la première idée mais il a supposé que l'énergie des degrés de liberté microscopiques était une grandeur discrète. Même si l'Histoire montrera un peu plus tard que son approche n'est pas totalement juste, cette idée géniale vaudra à Planck le prix Nobel de physique en 1918 et sera le point de départ de l'une des aventures scientifiques les plus fabuleuses du siècle passé.

1. On considère alors la cavité électromagnétique comme un système thermodynamique avec un grand nombre de degrés de liberté (qui sont les ondes électromagnétiques de fréquence ν) sans interaction les uns avec les autres en équilibre à la température T . On suppose que l'énergie d'un degré de liberté microscopique (c'est à dire d'une onde électromagnétique de fréquence ν) est maintenant une grandeur discrète et ne peut prendre que les valeurs $e_n = nh\nu$ où h est une constante et n est un nombre entier quelconque, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.
 - a. Selon la loi de distribution des énergies de Maxwell-Boltzmann, la probabilité de trouver un degré de liberté ayant une fréquence ν avec une énergie e_n est donnée par $P(e_n) = Z^{-1} \exp(-\frac{e_n}{k_B T})$ où Z est une constante de normalisation. Quelle condition doit satisfaire la fonction $P(e_n)$ pour qu'elle définisse une loi de probabilité ? En déduire alors la valeur de Z .

- b. Définir l'énergie moyenne $\bar{u}(\nu)$ d'un degré de liberté de fréquence ν , montrer qu'elle dépend maintenant de ν et que son expression est donnée :

$$\bar{u}(\nu) = \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1}. \quad (35)$$

- c. En déduire que maintenant la densité volumique d'énergie par unité de fréquence $\rho_T(\nu)$ à l'intérieur de la cavité, qui a été définie dans la question (3.1.a.2.h) est donnée par la formule :

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1}. \quad (36)$$

Le spectre d'émission du corps noir est directement lié à $\rho_T(\nu)$: la puissance émise par unité de surface du corps noir (à la température T) entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$ est donnée par $\Phi_T(\nu)d\nu$ où $\Phi_T(\nu) = \frac{c}{4}\rho_T(\nu)$. Cette formule permet de reproduire avec une efficacité exceptionnelle la courbe expérimentale du spectre du corps noir lorsque la constante h est fixée à une valeur proche de $h \simeq 6,63 \times 10^{-34}$ J.s.

2. Nous allons maintenant étudier quelques propriétés du spectre du corps noir.
 - a. Montrer que lorsque la fréquence ν est "faible", la formule de Planck (36) redonne celle obtenue par Rayleigh et Jeans. On précisera ce que signifie fréquence "faible".
 - b. Intégrer $\Phi_T(\nu)$ sur les fréquences pour montrer que la puissance surfacique par unité de surface que peut émettre le corps noir est proportionnelle à T^4 . On ne cherchera pas à calculer explicitement le coefficient de proportionnalité.
 - c. D'après la courbe du spectre du corps noir, illustrée sur la figure (5), il existe une longueur d'onde $\lambda_{max}(T)$, qui dépend de la température, pour laquelle le flux émis par le corps noir est maximal. La fonction $\lambda_{max}(T)$ est appelée la loi de déplacement de Wien.
 - i. Afin d'établir la loi de Wien, déterminer la fonction $M(\lambda)$ telle que la puissance surfacique émise par le corps noir entre les longueurs d'onde λ et $\lambda + d\lambda$ est donnée par $M(\lambda)d\lambda$.
 - ii. Etablir alors l'équation que doit satisfaire λ_{max} .
 - iii. Sachant que l'équation $e^{-x} + 0,2x - 1 = 0$ n'admet qu'une unique solution positive qui est approximativement donnée par $x \simeq 4,9651$, déterminer la loi de Wien et montrer qu'elle s'écrit sous la forme :

$$\lambda_{max}(T) = \frac{C}{T} \quad (37)$$

où $C \simeq 2,898 \times 10^{-3}$ m.K. Cette loi est-elle compatible avec la courbe $\lambda_{max}(T)$ représentée sur la figure (5) ?

- d. En 1964, Arno Penzias et Robert Wilson ont découvert de façon fortuite que dans tout l'Univers est présent, de façon quasi-homogène et isotrope, un rayonnement de type corps noir qui serait à la température très faible $T = 2,728$ K. Quelle est la longueur d'onde dans le vide et la fréquence typique de ce rayonnement ? Connaissez-vous l'origine de ce rayonnement dont la découverte a valu aux deux radio-astronomes le prix Nobel de physique en 1978 ?

3.2 Les interactions entre le photon et la matière

Planck n'a jamais eu besoin d'introduire l'hypothèse du photon pour comprendre le rayonnement d'un corps noir. C'est Einstein qui l'a introduite dans son modèle de l'effet photoélectrique en 1905, celui même qui lui vaudra le prix Nobel de physique en 1921. Plus tard, Compton utilisera l'hypothèse d'Einstein pour interpréter le fameux effet qui portera son nom et prouvera ainsi la dualité onde-corpuscule pour la lumière.

Cette partie a pour but de comprendre comment les deux expériences historiques, que sont l'effet photoélectrique et l'effet Compton, ont permis respectivement d'introduire l'hypothèse de l'existence du photon et de la confirmer.

a. L'effet photoélectrique : l'émergence du photon

L'effet photoélectrique consiste en l'émission d'électrons d'un matériau soumis à une irradiation lumineuse. Pour le mettre en évidence, on a mis en place l'expérience illustrée schématiquement sur la figure (9).

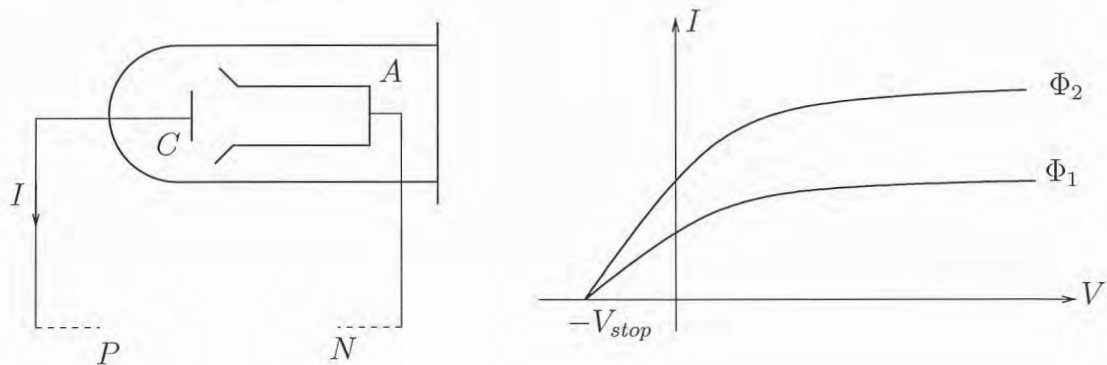


FIG. 9 – Pour mettre en évidence l'effet photoélectrique, on dispose dans une ampoule à vide une anode A et une cathode C soumises à une différence de potentiel $V = V_A - V_C$ où V_C et V_A sont les potentiels respectifs de la cathode et de l'anode. On éclaire la cathode par une lumière ultraviolette supposée monochromatique de fréquence ν fixée. La forme de l'anode est telle que cette dernière collecte le maximum d'électrons émis par la cathode. On observe alors un courant électrique I qui dépend de la différence de potentiel V et de l'intensité lumineuse Φ . On a représenté ici l'intensité I en fonction de V pour deux intensités lumineuses différentes $\Phi_1 < \Phi_2$.

1. Proposer un circuit électrique simple entre P et N utilisant un générateur de tension constante et des résistances qui permette simplement de faire varier la différence de potentiel V entre l'anode et la cathode.
2. On observe d'abord que l'intensité du courant sature lorsque V augmente. Cette intensité de saturation est proportionnelle à l'intensité lumineuse Φ . Interpréter cette observation.
3. On observe ensuite que même si la différence de potentiel V est négative, mais supérieure à une valeur $-V_{stop}$ qui est le "potentiel d'arrêt", un courant est émis. Donner une explication de ce phénomène. En déduire que l'énergie cinétique maximale E_c^{max} d'un électron émis est donnée par $E_c^{max} = eV_{stop}$ où e est la charge élémentaire.

4. En 1914, le physicien américain Robert Millikan étudia expérimentalement la dépendance de V_{stop} en fonction de la fréquence ν de la radiation lumineuse qui éclaire la cathode. Il constate qu'en dessous d'une certaine fréquence ν_0 , l'effet photoélectrique est inexistant alors que si $\nu > \nu_0$ on observe un effet photoélectrique dont le potentiel d'arrêt augmente de façon affine avec ν . Cette expérience très difficile à mettre en œuvre à cette époque vaudra à Millikan le prix de Nobel de physique en 1924. En quoi est-ce que la théorie classique de l'électromagnétisme est mise à mal par les résultats de cette expérience ?
5. En 1929, Lawrence et Beams montrent que l'intervalle de temps séparant l'illumination de la cathode et l'émission de l'électron est inférieure à 10^{-9} s. Or, toute modélisation de l'effet photoélectrique qui s'appuierait sur la théorie classique de l'électromagnétisme, ne pourrait aboutir à un intervalle de temps si court. Pour illustrer ce fait, étudions le modèle suivant. On dispose une source lumineuse à une distance $d = 1$ m d'une feuille métallique qui est le siège d'un effet photoélectrique. On prendra comme métal le potassium et la source lumineuse émet de façon isotrope et est supposée avoir une puissance P de 1 W. On fait l'hypothèse qu'un électron est éjecté par effet photoélectrique lorsque l'énergie lumineuse qu'il a absorbé (dans un sens que l'on va définir) est supérieure à l'énergie d'extraction du potassium.
 - a. Ainsi la source lumineuse éclaire la plaque et on fait l'hypothèse que l'électron absorbe l'énergie lumineuse provenant de la lumière qui éclaire un cercle de rayon r qui est de l'ordre de grandeur du rayon atomique. En déduire un ordre de grandeur de l'énergie absorbée par l'électron par unité de temps.
 - b. Sachant que l'énergie d'extraction du potassium est de 2,1 eV, donner un ordre de grandeur du temps qu'il faudrait pour que l'électron soit éjecté.
 - c. Discuter le résultat obtenu et conclure quant à la pertinence de ce modèle classique de l'effet photoélectrique.
6. En 1905, Einstein fait l'hypothèse que le champ électromagnétique est quantifié dans le sens où il admet une description corpusculaire. Plus précisément, il suppose que l'émission et l'absorption d'un rayonnement lumineux de fréquence ν se fait par "quanta" (le terme de photon est apparu plus tard) d'énergie $E = h\nu$ où h est la constante que Planck avait introduite dans le modèle du corps noir. Il ajoutera que le photon est localisé dans l'espace et qu'il n'admet aucune extension spatiale. Cela est suffisant pour expliquer très simplement les différents résultats expérimentaux présentés ci-dessus.
 - a. Si on note W l'énergie d'extraction d'un électron, déterminer l'énergie cinétique E_c d'un électron éjecté par effet photoélectrique.
 - b. En déduire la fréquence ν_0 introduite dans la question (3.2.a.4.) en fonction de W en particulier.
 - c. Montrer que, dans le modèle d'Einstein, le potentiel d'arrêt V_{stop} est bien une fonction affine de la fréquence, comme le prouvera quelques années plus tard Millikan.
 - d. Quelle caractéristique du photon permet d'expliquer le si court intervalle de temps entre l'illumination et l'éjection de l'électron mesuré par Lawrence et Beams ?

Dans son expérience, Millikan a vérifié la théorie d'Einstein de l'effet photoélectrique avec une précision remarquable. Il a en particulier établi que la constante h qui apparaît dans le modèle d'Einstein est bien égale à la constante que Planck a introduite pour décrire le rayonnement du corps noir.

b. L'effet Compton : la confirmation du photon

En 1926, Wentzel et Beck ont néanmoins montré qu'il était possible de retrouver théoriquement toutes les caractéristiques de l'effet photoélectrique sans invoquer l'idée de photon. Dans ce sens, le modèle d'Einstein ne constitue pas une preuve irréfutable de l'existence du photon. Mais, en 1923, le physicien américain Arthur Compton réalisa une expérience de diffusion d'ondes électromagnétiques par une feuille de graphite, ce qui permit de valider définitivement la notion de dualité onde-corpuscule pour la lumière. Il fut récompensé en 1927 par le prix Nobel de physique pour cette découverte.

L'expérience de Compton consistait à envoyer un faisceau de rayons X monochromatiques de longueur d'onde λ sur une plaque de graphite. Il observa que certains rayons X diffusés par la plaque avaient une longueur d'onde λ' supérieure à λ . L'étude précise de ce phénomène montra que λ' dépendait de la direction des rayons diffusés mais qu'elle était indépendante de la nature du matériau (graphite ou autre) utilisé pour la plaque.

1. Ces observations peuvent-elle être interprétées dans le cadre de la théorie de la diffraction de la lumière ? On rappellera succinctement ce qu'est la diffraction et on en donnera un exemple concret. On soulignera dans quelles conditions il est possible d'observer le phénomène de diffraction.
2. Pour interpréter ses résultats, Compton a eu besoin d'utiliser l'hypothèse de l'existence du photon, à savoir que les ondes électromagnétiques sont fondamentalement des corpuscules. Chaque photon, que l'on notera génériquement γ , possède une énergie E_γ et une quantité de mouvement (ou impulsion) \vec{p}_γ . Rappeler les relations qui permettent de relier les caractéristiques corpusculaires (E_γ, \vec{p}_γ) aux caractéristiques ondulatoires des ondes électromagnétiques.
3. Il a ensuite supposé que la diffusion observée était en fait le résultat d'une "collision" entre un photon et un électron qui est schématisée sur la figure (10). Avant la collision, l'électron est supposé être au repos et le photon γ se déplace dans la direction \vec{e}_x . Après la collision, l'électron est en mouvement avec une impulsion \vec{p} alors qu'un photon γ' est émis dans une direction \vec{u} qui forme un angle θ avec la direction incidente \vec{e}_x .

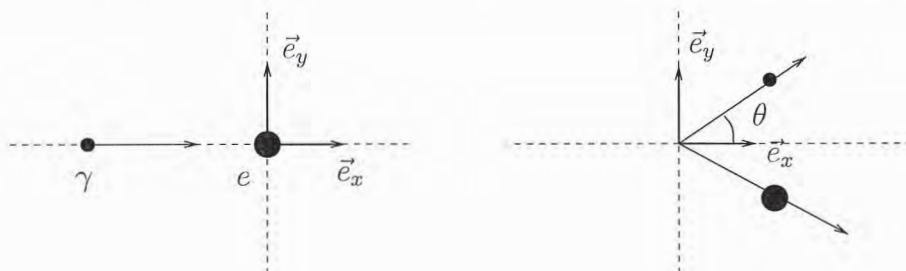


FIG. 10 – L'effet Compton est interprété comme le résultat de la collision entre un photon et un électron. La collision est représentée ici dans le référentiel où l'électron e est au repos avant la collision. La collision est plane et on munit le plan d'un système de coordonnées cartésiennes centré sur la position initiale de l'électron ; on note (\vec{e}_x, \vec{e}_y) la base de vecteurs. Après la collision, l'électron a une impulsion \vec{p}_f et un photon γ' est émis dans une direction \vec{u} qui forme un angle θ avec la direction incidente \vec{e}_x du photon γ .

- a. Pourquoi la collision entre le photon et l'électron doit nécessairement être étudiée dans le cadre de la relativité restreinte ?
- b. On rappelle que l'énergie totale E d'une particule relativiste de masse m ayant une impulsion \vec{p} est donnée par la relation $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ où c est la célérité de la lumière dans le vide. Comment définit-on l'énergie cinétique T d'une particule relativiste ? Montrer que T est approximativement donnée par l'expression classique de l'énergie cinétique de la particule dans la limite non-relativiste. On s'attachera à définir la limite non-relativiste.
- c. Pour étudier cette collision, on se place dans le référentiel où l'électron est au repos avant la collision.
 - i. Donner les grandeurs conservées lors de ce processus.
 - ii. Donner les expressions des énergies totales E_i et E_f de l'électron avant et après la collision en fonction de la masse de l'électron m_e et de l'impulsion \vec{p}_f après la collision.
 - iii. En déduire que l'énergie de l'électron E_f et la norme de son impulsion p_f après la collision satisfont les relations suivantes :

$$E_f = m_e c^2 + h(\nu - \nu'), \quad p_f^2 = \frac{h^2}{c^2} (\nu \vec{e}_x - \nu' \vec{u})^2. \quad (38)$$

- iv. En déduire que λ' est donnée la relation suivante

$$\lambda' - \lambda = \Lambda_c (1 - \cos \theta) \quad (39)$$

où la longueur d'onde Compton de l'électron Λ_c est une constante que l'on déterminera.

- d. Calculer Λ_c . En déduire pourquoi Compton a travaillé avec des rayons X pour observer cet effet.
4. La figure (11) donne les spectres relevés lors de l'expérience de Compton pour 4 angles de diffusion différents. Lorsque l'angle de diffusion θ est important, on observe très nettement deux pics de diffusion mais ces deux pics existent lorsque θ est plus faible même s'ils sont plus difficiles à distinguer.
 - a. Interpréter la présence des deux pics de diffusion.
 - b. Pourquoi les pics ont une largeur et ne sont pas infiniment minces comme le suggère la formule (39) ?
 - c. Vérifier enfin que les résultats expérimentaux obtenus par Compton sont bien compatibles avec la formule (39).
5. L'expérience de Compton a joué un rôle capital dans l'histoire de la mécanique quantique puisqu'elle a permis la première vérification de la dualité onde-corpuscule. Elle a en fait ouvert une porte bien plus grande puisqu'elle illustre la compatibilité entre la mécanique quantique et la relativité restreinte ; dans la formule (39) apparaissent à la fois c et h . Les physiciens de la seconde moitié du 20ème siècle vont comprendre que c'est en effet dans le cadre de l'unification entre la mécanique quantique et la relativité restreinte qu'on peut décrire, comprendre et prévoir le monde de l'infiniment petit. Ainsi a été proposé dans les années 1970 le modèle standard de la physique des particules qui permet de classer toutes les particules et toutes les interactions présentes dans l'Univers.

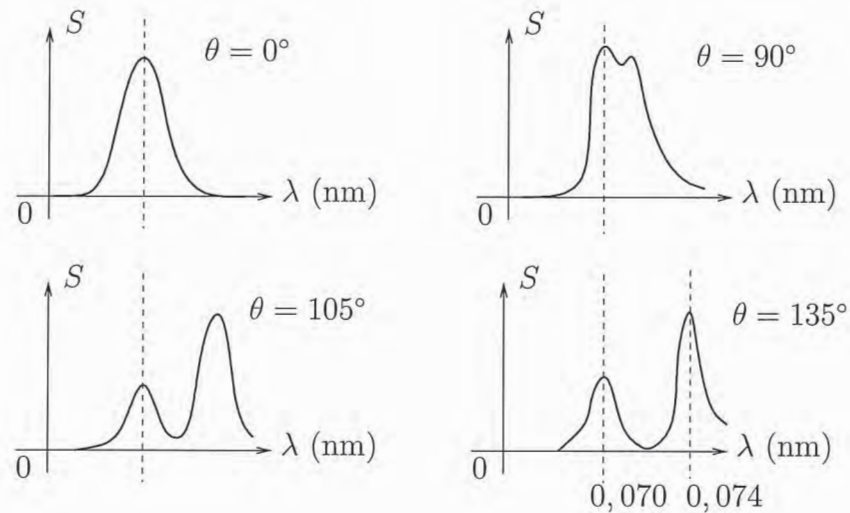


FIG. 11 – Représentation schématique des résultats expérimentaux obtenus par Compton lors de son expérience de diffusion de rayons X sur du graphite. Ces graphes représentent pour différentes valeurs de θ le spectre de diffusion $S(\lambda)$; les unités de l'énergie diffusée sont arbitraires. On observe deux pics et le premier est toujours centré sur la même valeur $\lambda = 0,070$ nm.

- Le modèle standard distingue les particules “matérielles” de celles qui véhiculent les interactions. Connaissez-vous le nombre de particules élémentaires “matérielles” présentes dans tout l'Univers que prévoit le modèle standard ? Quel est le nombre et le nom des interactions fondamentales entre ces particules ?
- Quel est le nombre de particules élémentaires “matérielles” qui permettent de constituer tous les atomes du tableau périodique des éléments ? Quelles sont-elles ?

La découverte expérimentale très récente du boson de Higgs est un des succès les plus marquants de la mécanique quantique.