

SESSION 2011

AGRÉGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : **SCIENCES PHYSIQUES**
Option : **PHYSIQUE ET CHIMIE**

**COMPOSITION SUR LA PHYSIQUE
ET LE TRAITEMENT AUTOMATISÉ DE L'INFORMATION**

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

Détection d'une nanosphère d'or par microscopie photothermique

Au cours des dernières décennies sont apparues des techniques de microscopie qui permettent d'étudier des objets dont la taille est très inférieure aux longueurs d'onde optique. Ainsi, l'équipe du professeur Brahim Lounis, de l'université Bordeaux 1, a mis au point une technique de microscopie photothermique qui permet de détecter et de localiser, dans un échantillon, des particules d'or dont le rayon n'excède pas quelques nanomètres. Le principe de la microscopie photothermique ainsi que ses premières applications à la détection de molécules biologiques sont décrits dans un article de recherche publié en 2003 par cette équipe¹. Ce problème s'inspire librement de ces travaux pour aborder le principe de la détection d'une nanosphère d'or par microscopie photothermique.

Le problème est divisé en quatre parties largement indépendantes. Au sein de chaque partie, le candidat pourra admettre, la cas échéant, les résultats donnés par l'énoncé pour répondre aux questions suivantes.

Dans l'énoncé, les vecteurs sont notés en caractères gras. Les candidats sont cependant invités, dans leur copie, à utiliser des flèches pour les représenter.

Formulaire

Expression des opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques

Si l'on note $U = U(r, \theta, \phi)$ une fonction scalaire des trois coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) :

- le gradient de U est donné par :

$$\mathbf{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

- le laplacien scalaire de U est donné par :

$$\Delta U = \operatorname{div}(\mathbf{grad} U) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rU)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

Équations de Maxwell dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope

Dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope, non magnétique, de permittivité diélectrique relative ϵ , les équations de Maxwell liant les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} s'écrivent, en l'absence de charges libres :

$$\begin{aligned} (1) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 & (2) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ (3) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (4) \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

À partir de ces équations, on montre l'existence d'un potentiel scalaire V et d'un potentiel vecteur \mathbf{A} tels que :

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Quelques intégrales utiles à la résolution du problème

$$\int_0^\infty du u e^{-u} \cos(a-u) = \frac{\sin a}{2}, \quad \int_0^1 du u \sqrt{1-u^2} = \frac{1}{3}$$

¹L. Cognet, C. Tardin, D. Boyer, D. Choquet, P. Tamarat, and B. Lounis, "Single metallic nanoparticle imaging for protein detection in cells", Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A. **100**, 11350-11355 (2003).

Partie A

Optique géométrique

1 Considérations générales

Définir, et éventuellement commenter brièvement (4 lignes maximum à chaque fois), les termes suivants :

- célérité de la lumière ;
- milieu transparent, homogène et isotrope ;
- indice optique ;
- dioptre, réflexion, réfraction ;
- lentille mince convergente.

2 Les lentilles en classe de 4ème au collège

Document joints en annexe (extraits du B.O.E.N. spécial n° 6 du 28/08/2008) :

- la démarche d'investigation (extrait des programmes de collège, annexe A) ;
- la lumière : couleurs, images, vitesse (extrait du programme de la classe de quatrième, annexe B).

Le professeur se propose de commencer l'étude des lentilles selon la démarche d'investigation. Comment peut-il concevoir sa leçon ? La réponse ne devra pas dépasser une vingtaine de lignes, une ligne s'entendant au sens de 60 signes, blancs et signes de ponctuation compris.

Le professeur explicitera avec soin :

- le choix d'une ou plusieurs situation(s)-problème(s) ;
- les tâches des élèves : formulation d'hypothèses explicatives, proposition de protocoles expérimentaux, débats avec échanges argumentés ;
- les connaissances acquises en fin de séance et la possible mobilisation ultérieure de ces connaissances.

3 Les lentilles minces

Considérons une lentille mince, supposée convergente, placée en un point O . Elle donne d'un objet AB une image $A'B'$ (Fig. (1)). Les foyers objet et image sont nommés F et F' et, dans la suite de l'énoncé, on note $p = \overline{OA}$ la distance algébrique qui sépare la lentille de l'objet, et $p' = \overline{OA'}$ la distance algébrique qui sépare la lentille de l'image. De même, on note $f = \overline{OF}$ et $f' = \overline{OF'}$ les valeurs algébriques des distances focales objet et image, en supposant que $f' = -f$. Les distances sont comptées positives de gauche à droite ($f' = \overline{OF'} > 0$ sur la figure (1)) et de haut en bas ($\overline{AB} > 0$ sur cette même figure).

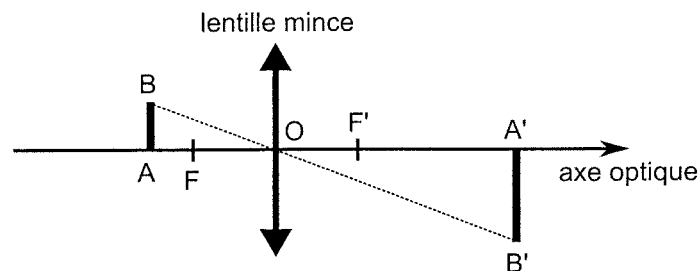


FIG. 1 – Formation d'une image par une lentille mince.

1. Reproduire la figure (1), et compléter la construction géométrique de l'image $A'B'$ en indiquant le trajet suivi par un rayon lumineux issu du point B et passant par le foyer F , ainsi que le trajet suivi par un rayon venant de $-\infty$, parallèle à l'axe optique, et passant par le point B .

Tournez la page S.V.P.

2. Rappeler la formule de conjugaison qui lie p , p' et f' . Commenter les cas particuliers $p = f$, $p = 2f$, $p' = f'$.
3. Donner l'expression du grandissement $\gamma = \overline{A'B'}/\overline{AB}$ en fonction de p' et p .
4. Montrer que, dans le cas d'une lentille mince convergente de distance focale f' , la distance $D = p' - p$ entre un objet et son image réelle par la lentille ne peut être inférieure à $D_m = 4f'$.
5. Décrire brièvement, en s'appuyant sur un schéma, une méthode fréquemment utilisée pour déterminer la distance focale f' d'une lentille convergente.
6. Proposer une méthode simple pour mesurer la distance focale f' d'une lentille divergente.
7. On désire mesurer la focale d'un objectif de microscope, de très faible distance focale objet ($|f| < 1$ cm). On propose pour cela le dispositif représenté sur la figure 2. On réalise, à l'aide de l'objectif, l'image sur un écran d'une mire constituée de dix traits verticaux très fins, séparés par un intervalle fixe $m = 100 \mu\text{m}$, imprimés sur un support transparent. La mire est très proche de l'objectif, et la distance D entre la mire et l'écran est fixée à $D = 1$ m.

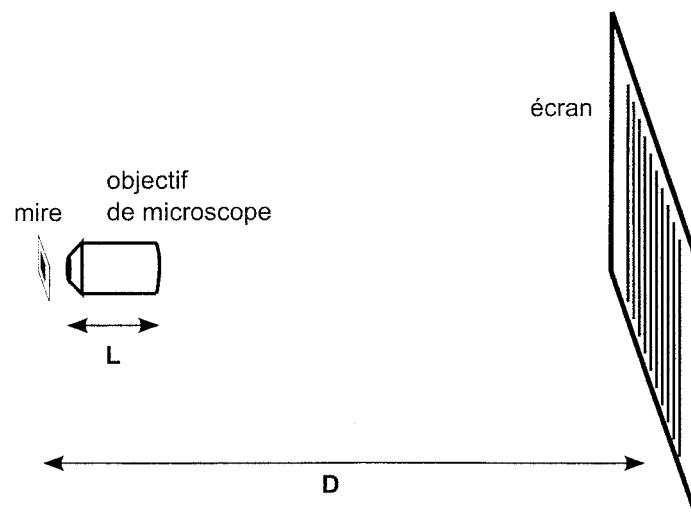


FIG. 2 – Image d'une mire par un objectif de microscope.

- Montrer, à partir des formules de conjugaison, que dans ce cas le grandissement γ du montage peut s'écrire :

$$\gamma \simeq \frac{D}{f}.$$

- Expliciter un protocole permettant de déterminer f à partir de la mesure de γ . Estimer l'incertitude sur f .
- Sachant que la longueur d'un objectif de microscope est typiquement $L = 4$ cm, expliquer pourquoi les méthodes généralement employées pour mesurer la distance focale d'une lentille convergente sont mal adaptées à la mesure de f .

4 Instruments d'optique : association de lentilles

En dehors de la simple loupe, la plupart des instruments d'optique associe plusieurs lentilles. Deux instruments sont particulièrement courants et figurent explicitement au programme de l'enseignement de spécialité de la classe de Terminale S : le microscope et la lunette astronomique. Les questions des rubriques suivantes sont du niveau de cette classe et les réponses à plusieurs d'entre elles pourraient être trouvées dans le programme.

4.1 Généralités

1. Quelles difficultés présente l'étude expérimentale des versions commerciales de ces deux instruments ?

2. Dans l'enseignement secondaire du lycée, on les surmonte en utilisant des "maquettes" constituées de deux lentilles convergentes placées sur cavalier coulissant sur un banc. Pour des raisons pratiques, les distances focales de ces lentilles sont de l'ordre de 10 cm. Quels inconvénients présente cette solution ?
3. Qu'appelle-t-on un système afocal ?
4. Dans ce qui suit, les appareils sont réglés de telle sorte que l'image finale (donnée par l'oculaire) soit à l'infini. Pourquoi ? Ainsi réglé, le microscope est-t-il un système afocal ? Et la lunette ?

4.2 Le microscope

Le microscope est constitué de deux composants distincts, l'objectif et l'oculaire, chacun étant assimilable à une lentille mince convergente unique. Tous deux ont même axe optique, l'axe du microscope. Les grandeurs concernant l'objectif sont indicées 1, celles concernant l'oculaire sont indicées 2.

1. Est-il réaliste d'assimiler l'objectif et l'oculaire à des lentilles minces ?
2. Préciser les ordres de grandeur des distances focales f'_1 et f'_2 pour un microscope d'amateur (ou de laboratoire de lycée) d'usage courant.
3. Grossissement du microscope : le grossissement G permet de comparer les angles sous lesquels un objet est vu directement et à travers l'instrument d'optique. On suppose qu'un objet AB perpendiculaire à l'axe optique (A étant sur cet axe) est vu à l'œil nu sous l'angle α supposé petit. L'œil est alors à la distance minimale de vision distincte $d_m = 0,25$ m. Lors de l'observation au microscope, le faisceau émergent est incliné de l'angle α' sur l'axe optique. On suppose que les foyers image F'_1 de l'objectif et objet F_2 de l'oculaire sont distants de Δ (intervalle optique), avec $F'_1 F_2 = \Delta = 0,16$ m.

Faire un schéma du système optique, en plaçant en particulier l'image $A_1 B_1$ de l'objet AB par l'objectif. Montrer que le grossissement standard $G = |\alpha'/\alpha|$ du microscope vaut :

$$G = \frac{\Delta d_m}{f'_1 f'_2}.$$

Estimer G pour le microscope d'amateur évoqué à la question précédente.

4. Limitations, perfectionnements :
 - (a) Quels sont les phénomènes qui limitent les performances des microscopes optiques ? Donner un ordre de grandeur du grossissement maximal que l'on peut atteindre.
 - (b) On admet que la distance minimale entre deux points que l'on peut voir séparés à travers l'instrument (pouvoir séparateur) est :

$$\delta = \frac{0,61\lambda}{n \sin u},$$

où n est l'indice de réfraction dans lequel baigne l'objet, λ la longueur d'onde de la lumière utilisée et u le demi-angle d'ouverture du cône de lumière provenant de l'objet-source. Sur quels facteurs peut-on jouer, et dans quels sens, pour minimiser δ ? Montrer qu'il est difficile d'obtenir $\delta < 0,1 \mu\text{m}$.

- (c) Que peut-on répondre à un élève qui demande des précisions sur les avantages de principe et la nature du microscope électronique ? Pourquoi donne-t-on en général non le grossissement mais le grandissement pour un tel appareil ? Qu'est-ce qu'un microscope à effet tunnel ? à force atomique (AFM) ?

4.3 La lunette astronomique

Un tel instrument est évidemment destiné à observer les astres (planètes, étoiles). Comme pour le microscope, on considère qu'il est constitué de deux composants, l'objectif indicé 1 et l'oculaire indicé 2, chacun étant assimilé à une lentille mince unique.

1. Préciser les ordres de grandeur des distances focales f'_1 et f'_2 pour une lunette d'amateur (ou de laboratoire de lycée) d'usage courant.
2. L'image donnée par l'oculaire étant à l'infini, définir, en s'aidant d'un schéma explicatif, le grossissement G de la lunette et l'exprimer en fonction des distances focales f'_1 et f'_2 de l'objectif et de l'oculaire. Estimer un ordre de grandeur de G pour la lunette précédente.
3. Galilée utilisait une lunette dans laquelle l'oculaire était une lentille divergente. Quel est l'intérêt de cet instrument ?
4. De nos jours, l'astronome utilise plus souvent des télescopes. Qu'est-ce qui distingue la lunette astronomique du télescope ? Quels avantages ce dernier instrument présente-t-il ?

4.4 Microscope ou lunette ?

Le créateur de Tintin, Hergé, évoquait souvent les performances que permet la technologie moderne. Bien entendu, les libertés qu'il se permettait font parfois sourire. Dans "l'Étoile mystérieuse", Tintin rend visite au professeur Calys qui dirige un observatoire astronomique. La lunette (Hergé prend soin de ne pas parler de télescope) est très imposante : on peut probablement la comparer à la grande lunette de Meudon : objectif $f'_1 = 16$ m, rayon $R_1 = 83$ cm, oculaire $f'_2 = 4$ cm.

Une araignée qui a tissé sa toile se trouve être très proche de l'objectif, du côté opposé à celui de l'oculaire. Tintin la voit énorme. Cela est-il possible ?

4.5 Trajets optiques

1. Principe de Fermat : on suppose que la lumière traverse un certain nombre de milieux transparents i , d'indice absolu n_i . La distance géométrique parcourue dans le milieu i est notée L_i . Le chemin optique C est défini par :

$$C = \sum_i n_i L_i.$$

Le principe de Fermat postule que, pour aller d'un point A à un point B , la lumière "choisit" le trajet qui rend le chemin C stationnaire. Dans les cas simples, on admet que cela signifie que C est minimal. Montrer que cela revient à dire que le temps mis par la lumière pour aller de A à B est également minimal.

2. Réfraction : considérations qualitatives.
 - (a) Dioptré plan : on considère un dioptré plan séparant deux milieux transparents 1 et 2 d'indices n_1 et n_2 . On suppose que la lumière va d'un point A situé dans le milieu 1 au point B situé dans le milieu 2. On suppose que A et B ne sont pas sur une même normale au dioptré.
 - i. Justifier qualitativement que la lumière ne suit pas la ligne droite AB . De quel côté va-t-elle s'écarter ? On pourra supposer que $n_1 > n_2$.
 - ii. Le professeur souhaite que ses élèves vérifient la propriété suivante : si le principe de Fermat est vérifié, alors la loi de Snell-Descartes (loi des sinus) l'est aussi. Préciser comment l'utilisation d'un tableur permet de vérifier numériquement cette affirmation. On supposera que les élèves ignorent la notion de dérivée d'une fonction ; on se contentera de présenter le problème et d'indiquer la démarche suivie.
 - (b) Lentille convergente : on considère une lentille épaisse plan-convexe et deux rayons incidents, perpendiculaires à sa face plane : l'un suit l'axe optique, l'autre est parallèle à cet axe. Justifier qualitativement que la façon dont les rayons émergent de la lentille est cohérente avec le principe de Fermat.
3. Une drôle de question ! Le grand physicien américain Richard Feynman a beaucoup utilisé la notion de chemin dans ses travaux. Il avoue s'être posé la question suivante : "*Dans un milieu transparent, homogène et isotrope comme l'air ou le vide, la lumière va en ligne droite parce que c'est le plus court chemin. Mais comment sait-elle que c'est le plus court chemin ? A-t-elle essayé tous les autres ?*"

Que pourriez-vous répondre à un étudiant qui pose une telle question ?

Partie B

Interaction entre une nanosphère d'or et un champ laser

On considère une nanosphère d'or, de rayon $a = 10$ nm, immobilisée dans un gel dont le constituant très majoritaire est l'eau (gel aqueux). La sphère est placée dans un faisceau laser (Fig. 3), dont la longueur d'onde dans le vide est $\lambda = 532$ nm. Le gel et l'or sont considérés comme des milieux diélectriques linéaires homogènes isotropes, et on leur associe les permittivités diélectriques relatives ϵ pour l'or et ϵ_m pour le gel. Ces permittivités sont reliées aux indices optiques n de l'or et n_m du gel par les relations $\epsilon = n^2$ et $\epsilon_m = n_m^2$.

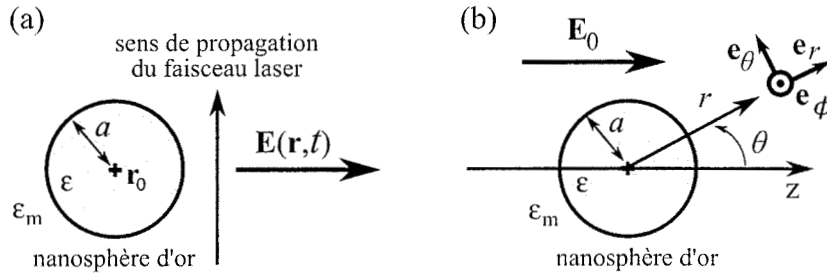


FIG. 3 – Nanosphère d'or immobilisée dans un gel et placée dans un faisceau laser. (a) Le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ associé au laser est, à chaque instant, dans le plan de la figure. (b) Coordonnées sphériques utilisées pour étudier la polarisation de la sphère par le champ statique \mathbf{E}_0 .

1 Champ électrique appliqué à la nanosphère

Au voisinage de la sphère, le champ électrique associé au faisceau laser à la position \mathbf{r} peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_L \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (1)$$

où \mathbf{E}_L est un vecteur inclus dans le plan de la figure 3 (a).

1. Comment sont communément nommées les grandeurs \mathbf{k} et ω ?
2. Donner la relation liant ω à λ , puis celle liant k (norme de \mathbf{k}), ω et n_m .
3. Proposer un argument simple pour justifier que la sphère peut être considérée, à un instant t donné, plongée dans le champ électrique *uniforme* $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)$, où \mathbf{r}_0 est la position du centre de la sphère.

2 Polarisation de la nanosphère dans l'approximation dipolaire

À un instant t donné, le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)$, noté plus simplement \mathbf{E}_0 , polarise la sphère d'or. Cette polarisation est supposée analogue à celle obtenue en soumettant la sphère à un champ *statique* $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$, uniforme dans tout l'espace (Fig. 3 (b)). Dans cette partie, on se place donc dans le cadre de l'électrostatique afin de déterminer les expressions des potentiels électrostatiques V à l'intérieur et V_m à l'extérieur de la sphère, sous l'hypothèse qu'aucune charge libre ne se trouve ni dans le gel, ni dans l'or, ni à l'interface gel-or.

1. Un point de l'espace est repéré à l'aide de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , le champ \mathbf{E}_0 déterminant la direction $0z$ (Fig. 3 (b)). Montrer, à l'aide d'un argument simple, que les potentiels V (à l'intérieur de la sphère) et V_m (à l'extérieur de la sphère) ne dépendent que de r et de θ (pas de dépendance en ϕ).
2. Établir que V et V_m vérifient l'équation de Laplace :

$$\Delta V = \Delta V_m = 0,$$

où Δ représente l'opérateur différentiel Laplacien scalaire. On pourra par exemple utiliser les équations de Maxwell (dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope) rappelées dans le formulaire en début d'énoncé.

3. À grande distance de la sphère, on considère que V_m est le potentiel associé au champ $E_0 \mathbf{e}_z$ seul. En déduire que, pour $r \gg a$, le potentiel $V_m(r, \theta)$ peut être choisi de la forme :

$$V_m(r, \theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta.$$

4. En s'inspirant de cette expression, on cherche, pour un point quelconque de l'espace, des solutions à l'équation de Laplace $\Delta F = 0$ de la forme $F(r, \theta) = f(r) \cos \theta$. À partir de l'expression du Laplacien scalaire en coordonnées sphériques, donné dans le formulaire en début d'énoncé, montrer que $f(r)$ vérifie l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} - \frac{2}{r^2} f = 0. \quad (2)$$

5. Montrer que l'équation (2) admet des solutions de la forme $f(r) = r^m$, où $m = 1$ ou $m = -2$.
6. On admet que, pour ce problème, les solutions $F(r, \theta)$ de l'équation de Laplace $\Delta F = 0$ sont de la forme :

$$F(r, \theta) = (Ar + Br^{-2}) \cos \theta,$$

où A et B sont des constantes réelles. À partir d'arguments physiques simples, en déduire que les potentiels $V(r, \theta)$ et $V_m(r, \theta)$ sont donnés par :

$$V(r, \theta) = A_1 r \cos \theta \quad \text{et} \quad V_m(r, \theta) = (B_2 r^{-2} - E_0 r) \cos \theta,$$

où A_1 et B_2 sont des constantes réelles.

7. Afin de déterminer les constantes A_1 et B_2 , on s'intéresse aux relations de passage à la surface de la sphère, c'est-à-dire à l'interface gel-or.

(a) En écrivant que le potentiel électrostatique est continu au passage de l'interface, établir une première relation liant A_1 et B_2 .

(b) Le gel et l'or étant considérés comme des milieux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes, on définit les vecteurs $\mathbf{D} = -\epsilon_0 \epsilon \mathbf{grad} V$ dans l'or et $\mathbf{D}_m = -\epsilon_0 \epsilon_m \mathbf{grad} V_m$ dans le gel. Déduire de la continuité à l'interface de la composante radiale de \mathbf{D} (c'est-à-dire la composante de \mathbf{D} suivant le vecteur \mathbf{e}_r) une seconde relation liant A_1 et B_2 (l'expression de l'opérateur gradient en coordonnées sphériques est donnée dans le formulaire en début d'énoncé).

(c) Déterminer, à partir des deux relations obtenues, les expressions de A_1 et de B_2 .

(d) Interpréter ces résultats pour le cas particulier $\epsilon = \epsilon_m$.

8. Montrer que le potentiel V_m à l'extérieur de la sphère est donné par :

$$V_m(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon - \epsilon_m}{\epsilon + 2\epsilon_m} \frac{a^3 E_0 \cos \theta}{r^2}.$$

9. Le potentiel $V_p(\mathbf{r})$ en un point $M(\mathbf{r})$ situé à grande distance d'un dipôle de moment \mathbf{p} placé dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope, de permittivité ϵ_m , a l'expression suivante :

$$V_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_m} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3},$$

le dipôle \mathbf{p} étant placé à l'origine du repère. À la lumière de cette expression, proposer une interprétation physique pour chacun des termes de l'expression de $V_m(r, \theta)$, et montrer que l'on peut considérer que le champ \mathbf{E}_0 induit dans la sphère un dipôle \mathbf{p} donné par :

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \epsilon_m \alpha \mathbf{E}_0, \quad \text{avec} \quad \alpha = 4\pi a^3 \frac{\epsilon - \epsilon_m}{\epsilon + 2\epsilon_m}. \quad (3)$$

3 Sections efficaces d'extinction, d'absorption et de diffusion

On admet dans cette partie que les résultats obtenus précédemment sont valables lorsque le champ électrique dépend du temps et que la permittivité ϵ est complexe. Placée dans le faisceau laser, la nanosphère d'or *absorbe* et *diffuse* la lumière, et les puissances lumineuses P_{abs} et P_{diff} respectivement absorbée et diffusée par la sphère vérifient :

$$P_{\text{abs}} = \sigma_{\text{abs}} I_0 \quad \text{et} \quad P_{\text{diff}} = \sigma_{\text{diff}} I_0,$$

où I_0 est l'intensité du faisceau laser au centre \mathbf{r}_0 de la nanosphère (puissance lumineuse par unité de surface en ce point), σ_{abs} et σ_{diff} étant appelées respectivement sections efficaces d'absorption et de diffusion. On définit la section efficace d'extinction par :

$$\sigma_{\text{ext}} = \sigma_{\text{abs}} + \sigma_{\text{diff}}.$$

À partir de l'expression (3) du dipôle induit par le champ laser dans la sphère, on peut montrer que ces sections efficaces sont reliées à la polarisabilité α (relation (3)) par les relations :

$$\sigma_{\text{ext}} = k \text{Im}[\alpha] \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{diff}} = \frac{k^4}{6\pi} |\alpha|^2,$$

où k est la norme du vecteur \mathbf{k} qui intervient dans l'expression du champ électrique dans le gel (équation (1)), $\text{Im}[\alpha]$ est la partie imaginaire de α , et $|\alpha|$ son module.

1. Justifier à partir d'arguments dimensionnels la dénomination de "section efficace" employée pour σ_{abs} , σ_{diff} et σ_{ext} .
2. Quelle est la dépendance en ω de σ_{diff} ? Commenter.
3. Montrer que le rapport $\sigma_{\text{diff}}/\sigma_{\text{ext}}$ est de l'ordre de V/λ^3 , où λ est la longueur d'onde de la lumière laser dans l'air. En déduire que, pour une nanoparticule d'or, on peut écrire $\sigma_{\text{ext}} \simeq \sigma_{\text{abs}}$.
4. En écrivant que la permittivité de l'or est un nombre complexe de la forme $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$, et que celle du gel (ϵ_m) est un nombre réel, montrer que la section efficace d'absorption pour la nanosphère est donnée par :

$$\sigma_{\text{abs}} = 9V \epsilon_m^{3/2} \frac{\omega}{c} \frac{\epsilon_2}{(\epsilon_1 + 2\epsilon_m)^2 + \epsilon_2^2}. \quad (4)$$

4 Indice optique de l'or

La puissance absorbée par la nanosphère plongée dans le faisceau laser s'écrit : $P_{\text{abs}} = \sigma_{\text{abs}} I_0$, σ_{abs} étant la section efficace d'absorption donnée par la relation (4). Dans cette partie, on aborde la dépendance de σ_{abs} en fonction de la pulsation ω du champ laser afin de déterminer s'il est possible de maximiser l'absorption d'énergie par la nanosphère. Il s'agit en pratique d'étudier la dépendance de la permittivité relative ϵ de l'or en fonction de ω .

1. Sur la figure (4) sont reportées les mesures de la partie réelle ϵ_1 et de la partie imaginaire ϵ_2 de la susceptibilité ϵ ($\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$) d'un échantillon d'or pour les longueurs d'onde du domaine visible. Quel est le signe de ϵ_1 ?
2. En considérant l'expression (4) de σ_{abs} , et sans calcul supplémentaire, estimer au voisinage de quelle valeur de ϵ_1 on attend un maximum de σ_{abs} . On notera ϵ_1^p cette valeur particulière, dont on donnera la valeur numérique (on donne l'indice de l'eau : $n_m = 1,33$).
3. Déterminer graphiquement, en utilisant la figure (4), la longueur d'onde λ_{max} au voisinage de laquelle on attend un maximum de σ_{abs} . Justifier le choix expérimental $\lambda = 532$ nm pour maximiser l'absorption de lumière par la nanosphère.
4. Sur la figure (4) sont également représentés des ajustements des données expérimentales par les parties réelle et imaginaire de l'expression suivante de ϵ :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\infty) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\Gamma} + \frac{\tilde{\omega}_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma}, \quad (5)$$

où $\epsilon(\infty)$ est un nombre réel (valeur mesurée de ϵ aux très grandes fréquences), et ω_p , Γ , $\tilde{\omega}_p$, ω_0 et γ sont des constantes qui permettent un ajustement satisfaisant dans l'intervalle 480 – 800 nm.

- (a) En évoquant un (ou des) modèle(s) microscopique(s) s'appuyant sur le caractère métallique de l'or, proposer une interprétation physique des deux derniers termes de cette somme.
 - (b) Pour les longueurs d'onde plus courtes que 480 nm, les courbes associées à l'équation (5) s'écartent beaucoup des données expérimentales. Quelle explication proposez-vous ?
5. Pour $\epsilon_1(\omega) = \epsilon_1^p$, on parle de "résonance plasmon". Quelle interprétation physique proposeriez-vous pour cette résonance ? Dans quel type de corps est-il envisageable d'observer une telle résonance ?

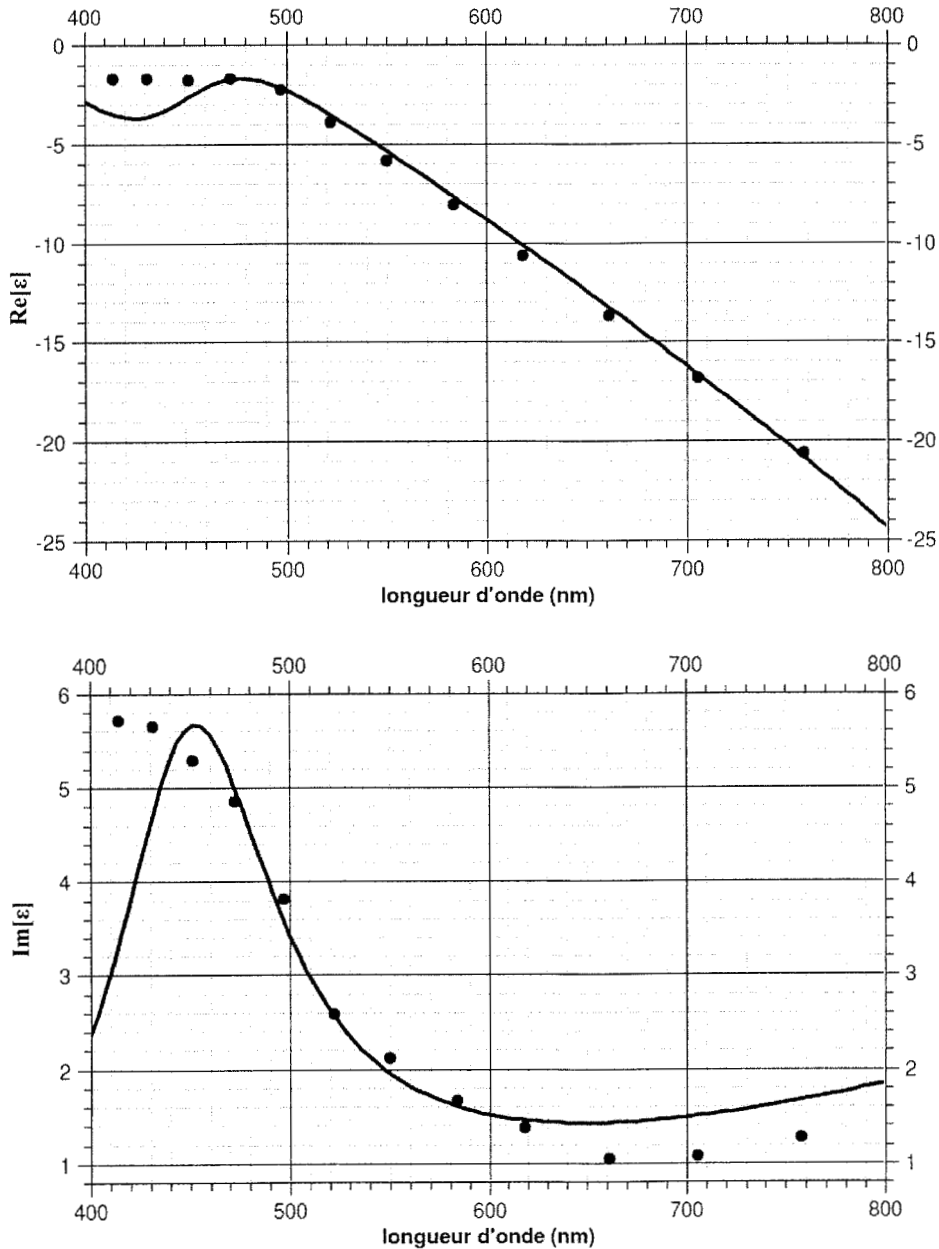


FIG. 4 – Parties réelle ($\epsilon_1 = \text{Re}[\epsilon]$) et imaginaire ($\epsilon_2 = \text{Im}[\epsilon]$) de la permittivité ϵ de l'or en fonction de la longueur d'onde dans l'air. Les données expérimentales (\bullet) sont extraites d'un article de P.B. Johnson and R.W. Christy ("Optical constants of the noble metals", *Phys. Rev. B* 6, 4370 (1972)). Les courbes continues résultent d'un ajustement par l'équation (5) avec $\epsilon(\infty) = 6,0$, $\omega_p/2\pi = 2,20 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$, $\Gamma/2\pi = 1,71 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$, $\tilde{\omega}_p/2\pi = 7,17 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$, $\gamma/2\pi = 1,43 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ et $\omega_0/2\pi = 6,67 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$.

Partie C

Profil de température autour d'une nanosphère d'or chauffée

On considère une sphère d'or, de rayon $a = 10$ nm, immobilisée dans un gel constitué très majoritairement d'eau, et chauffée par un faisceau laser. Dans cette partie du problème, on cherche à établir l'expression du profil de température dans la sphère et dans le gel.

Le milieu (gel) entourant la sphère est considéré comme homogène, infini, et initialement à la température T_0 . On note Λ et Λ_m les conductivités thermiques de l'or et du milieu, exprimées en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, et C et C_m les capacités thermiques volumiques de l'or et du milieu, exprimées en $\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$. On supposera que, dans le domaine de températures exploré, ces grandeurs sont indépendantes de la température.

On note $P_{\text{abs}}(t)$ la puissance totale (exprimée en W) absorbée par la sphère à l'instant t , et $p_{\text{abs}}(t)$ la puissance absorbée à ce même instant par unité de volume (exprimée en W.m^{-3}). Dans tout le problème, $p_{\text{abs}}(t)$ est supposée identique en tout point de la sphère. Les transferts thermiques par conduction sont décrits par le vecteur densité de flux thermique \mathbf{j} , défini tel que le flux thermique $d\Phi$ à travers une surface élémentaire orientée $d\mathbf{S}$ est donné par : $d\Phi = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$.

1 Équation de la chaleur

1. Afin d'établir l'équation locale qui décrit l'évolution de la température T_m dans le gel, on considère un volume élémentaire $d^3V = dx dy dz$ centré sur un point $M(x, y, z)$ du milieu (Fig. 5).

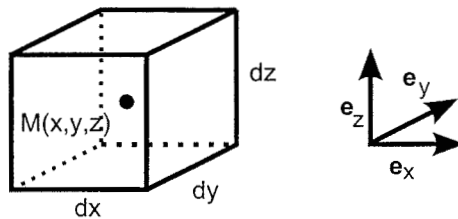


FIG. 5 – Volume d^3V considéré pour établir l'équation de la chaleur.

- (a) Montrer que la quantité de chaleur δQ_s sortant par conduction du volume d^3V durant la durée dt est donnée par :

$$\delta Q_s = \text{div } \mathbf{j} \cdot dt \cdot d^3V,$$

où $\text{div } \mathbf{j}$ est la divergence du vecteur \mathbf{j} en $M(x, y, z)$.

- (b) Énoncer la loi de Fourier reliant localement le vecteur densité de flux thermique \mathbf{j} , la conductivité thermique Λ_m et le gradient de température $\mathbf{grad } T_m$.
- (c) En déduire l'expression de δQ_s en fonction de Λ_m , d^3V , dt , et du Laplacien scalaire de la température T_m , $\Delta T_m = \text{div}(\mathbf{grad } T_m)$.
- (d) On note dT_m la variation de température du milieu contenu dans le volume d^3V durant la durée dt . Exprimer la variation d'énergie interne dU_m du milieu contenu dans le volume d^3V durant la durée dt .
- (e) À partir du bilan énergétique pour le milieu contenu dans d^3V , montrer que la température T_m autour de la sphère est solution de l'équation de la chaleur :

$$C_m \frac{\partial T_m}{\partial t} = \Lambda_m \Delta T_m. \quad (6)$$

2. On cherche maintenant à établir l'équation locale qui décrit l'évolution de la température T dans la sphère. En adoptant une démarche similaire à celle suivie précédemment, montrer que l'équation de la chaleur dans la nanosphère d'or s'écrit :

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \Lambda \Delta T + p_{\text{abs}}(t). \quad (7)$$

2 Régime permanent dans le cas d'une puissance constante

On suppose dans cette partie que la puissance absorbée par la sphère est *constante* au cours du temps ; en conséquence, on notera dans la suite $P_{\text{abs}}(t) = P_0$ et $p_{\text{abs}}(t) = p_0$, P_0 et p_0 étant des constantes réelles strictement positives. On se place en *régime permanent*, c'est-à-dire que les températures de la sphère et du gel ne dépendent pas du temps. On désire établir l'expression de la température en tout point de l'espace.

1. Montrer, à l'aide d'un argument simple, que les températures T_m en un point du milieu et T en un point de la sphère ne dépendent que de r , distance séparant le centre de la nanosphère du point considéré.
2. En déduire les deux équations différentielles vérifiées par $T_m(r)$ (température dans le gel) et $T(r)$ (température dans la sphère). On trouvera dans le formulaire en début d'énoncé l'expression du Laplacien scalaire Δ en coordonnées sphériques.
3. Afin de résoudre ces équations, on propose d'effectuer les changements de variable $u_m = r T_m$ et $u = r T$. Déterminer les équations différentielles vérifiées par $u_m(r)$ et $u(r)$.
4. En déduire l'expression de la température $T_m(r)$ dans le gel :

$$T_m(r) = T_0 + \frac{a}{r} (T(a) - T_0), \quad (8)$$

où T_0 est la température du gel lorsque $r \gg a$ et $T(a)$ est la température à la surface de la sphère, supposée continue au passage de la surface de la nanosphère.

5. Déterminer l'expression de $T(r)$ en fonction de r , a , $T(a)$ et p_0 .
6. En régime permanent, le vecteur densité de flux thermique \mathbf{j} est également continu au passage de la surface de la nanosphère. Donner une justification physique de cette continuité. En déduire, à partir des expressions de $T_m(r)$ et de $T(r)$, l'expression de $T(a)$ en fonction de T_0 , a , Λ_m et p_0 .
7. Donner l'expression de la température $T(r)$ dans la sphère en fonction de T_0 , P_0 , r , a , Λ_m et Λ .
8. Les conductivités thermiques de l'or et du milieu sont respectivement $\Lambda = 320 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $\Lambda_m = 0,6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. En déduire que la température dans la sphère est pratiquement homogène, et égale à sa température de surface ($T(r) \simeq T(a)$).

3 Chauffage sinusoïdal de la sphère

On suppose maintenant que l'intensité du faisceau laser chauffant la nanosphère d'or est modulée sinusoïdalement, la puissance absorbée par la sphère étant donnée par :

$$P_{\text{abs}}(t) = P_0 [1 + \cos(\Omega t)],$$

où P_0 est une constante positive. On note $T(r, t)$ la température en un point de la sphère et $T_m(r, t)$ la température en un point du milieu, où r est la distance entre le point considéré et le centre de la sphère.

3.1 Estimation de la température de surface de la sphère

On cherche dans cette partie à estimer la température de surface de la sphère $T(a, t)$. Comme dans la partie précédente, on suppose qu'à chaque instant la température est continue au passage de l'interface gel-or ($T(a, t) = T_m(a, t)$).

1. Établir l'équation suivante, à partir d'un bilan énergétique sur la sphère :

$$P_{\text{abs}}(t) = -4\pi a^2 \Lambda \left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{r=a^-} + 4\pi C \frac{d}{dt} \left[\int_0^a dr r^2 T(r, t) \right], \quad (9)$$

la dérivée spatiale étant évaluée pour $r = a^-$, c'est-à-dire à proximité immédiate de la surface à l'intérieur de la sphère.

2. À partir de l'équation (9), on cherche à établir une équation différentielle sur $\delta T(a, t) = T(a, t) - T_0$.
- (a) En supposant que la température de la sphère est pratiquement homogène et égale à $T(a, t)$, comme montré dans la section précédente du problème, établir que le dernier terme de l'équation (9) peut s'écrire :

$$4\pi C \frac{d}{dt} \left[\int_0^a dr r^2 T(r, t) \right] = \frac{4}{3} \pi a^3 C \frac{d\delta T(a, t)}{dt}.$$

- (b) En utilisant la continuité du flux de chaleur à travers la surface de la sphère, établir une relation entre la dérivée spatiale de $T(r, t)$ en $r = a^-$ et la dérivée spatiale de $T_m(r, t)$ en $r = a^+$ (voisinage immédiat de la surface à l'extérieur de la sphère). En supposant que la variation spatiale de $T_m(r, t)$ est identique à celle du régime permanent lorsque P_{abs} est constante (équation (8)), exprimer la dérivée spatiale de $T(r, t)$ en $r = a^-$ en fonction de $\delta T(a, t)$ et de a .
- (c) En déduire que $\delta T(a, t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{P_{\text{abs}}(t)}{4\pi\Lambda_m a} = \delta T(a, t) + \tau \frac{d\delta T(a, t)}{dt}, \quad (10)$$

où τ est une constante homogène à un temps dont on donnera l'expression en fonction des données du problème.

3. Calculer τ pour $a = 10$ nm avec les valeurs numériques suivantes : capacité thermique volumique de l'or $C = 2,5 \cdot 10^6$ J.K⁻¹.m⁻³, conductivité thermique du milieu $\Lambda_m = 0,6$ W.K⁻¹.m⁻¹.
4. Dans toute la suite, les fréquences de chauffage Ω sont telles que $\Omega/2\pi \leq 1$ MHz. En déduire que la température de surface $T(a, t)$ de la sphère vérifie, avec une excellente précision, la relation :

$$\delta T(a, t) = T(a, t) - T_0 = \frac{P_{\text{abs}}(t)}{4\pi\Lambda_m a} = \frac{P_0}{4\pi\Lambda_m a} (1 + \cos(\Omega t)).$$

5. Donner l'expression de l'élévation moyenne (moyenne temporelle) $\overline{\delta T}(a)$ de la température de la surface de la sphère. Faire l'application numérique, en utilisant la relation $P_0 = \sigma_{\text{abs}} I_0$, avec $\sigma_{\text{abs}} = 5 \cdot 10^{-12}$ cm² et $I_0 = 75$ kW.cm⁻², ainsi que $\Lambda_m = 0,6$ W.K⁻¹.m⁻¹.

3.2 Température $T_m(r, t)$ du gel autour de la sphère

1. Écrire l'équation de la chaleur dans le gel entourant la sphère, en posant $D_m = \Lambda_m/C_m$. Comment s'appelle la grandeur physique D_m ?
2. Afin de résoudre l'équation précédente, on effectue le changement de variable $u_m(r, t) = rT_m(r, t)$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_m(r, t)$. On trouvera l'expression de l'opérateur Laplacien scalaire dans le formulaire placé en début d'énoncé.
3. Vérifier que cette équation admet comme solution :

$$\tilde{u}_m(r, t) = U \left[1 + \exp\left(-\frac{r-a}{r_{\text{th}}}\right) \cos\left(\Omega t - \frac{r-a}{r_{\text{th}}}\right) \right], \quad (11)$$

où U est une constante et r_{th} est une longueur qui caractérise la profondeur de pénétration de l'onde thermique, dont on donnera l'expression en fonction de D_m et de Ω .

4. Calculer r_{th} à partir des valeurs $\Lambda_m = 0,6$ W.K⁻¹.m⁻¹, $C_m = 4,2 \cdot 10^6$ J.K⁻¹.m⁻³ et $\Omega/2\pi = 700$ kHz. Comparer r_{th} au rayon a de la nanosphère. Conclusion ?
5. Établir l'expression de la température $T_m(r, t)$ dans le gel autour de la sphère en fonction de T_0 , r , Ωt , P_0 , Λ_m , a et r_{th} . On admettra que les solutions de l'équation de la chaleur sont de la forme $T_m(r, t) = T_0 + \tilde{u}_m(r, t)/r$, où $\tilde{u}_m(r, t)$ est donné par l'équation (11).

6. Calculer, en fonction des données du problème, l'élévation moyenne $\overline{\delta T}_m = \langle (T_m(r, t) - T_0) \rangle$ de la température du milieu contenu dans une sphère de rayon $r_{\text{th}} \gg a$ autour de la nanoparticule (moyenne effectuée sur *le temps* puis sur *le volume* de la sphère de rayon r_{th}). L'exprimer en fonction de a , r_{th} , et $\overline{\delta T}(a)$, élévation moyenne de la température de la surface de la sphère.
7. Evaluer numériquement $\overline{\delta T}_m$. Ces nanosphères d'or chauffées ont été proposées comme sondes destinées à observer le mouvement d'assemblages moléculaires en milieu cellulaire vivant. Pensez-vous que l'augmentation de température due au chauffage des sphères puisse nuire à ces expériences, à la lumière de la valeur numérique de $\overline{\delta T}_m$?

Partie D

Détection d'une nanosphère d'or par microscopie photothermique

On considère une nanosphère d'or, immobilisée dans un gel aqueux. Cette nanosphère est assimilée à une particule ponctuelle, sa taille étant très petite devant toutes les autres longueurs considérées dans cette partie. La nanosphère, placée dans un faisceau laser dit "de chauffage", absorbe une puissance $P_{\text{abs}}(t) = P_0 (1 + \cos(\Omega t))$, ce qui induit une augmentation de la température du gel. En régime stationnaire, la température $T(r, t)$ à la distance r de la nanosphère vérifie :

$$\delta T(r, t) = T(r, t) - T_0 = \frac{P_0}{4\pi\Lambda_m r} \left[1 + \exp\left(-\frac{r}{r_{\text{th}}}\right) \cos\left(\Omega t - \frac{r}{r_{\text{th}}}\right) \right], \quad (12)$$

où T_0 est la température initiale du gel, Λ_m la conductivité thermique de l'eau et r_{th} une longueur caractéristique de pénétration de l'onde thermique, de l'ordre de quelques centaines de nanomètres.

Cette augmentation de température induit une modification de l'indice optique $\delta n(r)$ du milieu aqueux :

$$\delta n(r, t) = \frac{\partial n}{\partial T} \cdot \delta T(r, t), \quad (13)$$

où $\partial n / \partial T$ est la variation d'indice optique par Kelvin, supposée constante, de l'ordre de 10^{-4} K^{-1} pour l'eau à température ambiante.

Cette variation d'indice, en induisant un déphasage $\delta\Phi(t)$ entre les deux bras d'un interféromètre optique (Fig. 6) permet de détecter la nanosphère. Le but de cette partie du problème est d'évaluer $\delta\Phi(t)$ et de comprendre comment le dispositif expérimental permet de mesurer ce déphasage.

1 Évaluation du déphasage $\delta\Phi(t)$ induit par la variation d'indice δn

Afin d'évaluer le déphasage $\delta\Phi(t)$ induit par le chauffage de la nanosphère, la variation d'indice $\delta n(r, t)$ du gel est séparée en deux termes :

$$\delta n(r, t) = \delta n_{\text{stat}}(r) + \delta n_{\Omega}(r, t).$$

Le premier terme est la partie statique de $\delta n(r, t)$ (c'est-à-dire ne dépendant pas du temps), le second terme la partie dynamique de $\delta n(r, t)$ (terme modulé à la fréquence Ω) :

$$\delta n_{\text{stat}}(r) = \frac{\partial n}{\partial T} \frac{P_0}{4\pi\Lambda_m r} \quad \text{et} \quad \delta n_{\Omega}(r, t) = \frac{\partial n}{\partial T} \frac{P_0}{4\pi\Lambda_m r} \exp\left(-\frac{r}{r_{\text{th}}}\right) \cos\left(\Omega t - \frac{r}{r_{\text{th}}}\right). \quad (14)$$

Pour simplifier le calcul de $\delta\Phi(t)$, on souhaite éliminer la dépendance en r de $\delta n(r, t)$. Pour cela, on suppose que $\delta\Phi(t)$ peut être évalué en considérant plus simplement le déphasage induit par une sphère de rayon r_{th} , à l'intérieur de laquelle la variation d'indice $\overline{\delta n}(t)$ est homogène, définie par :

$$\overline{\delta n}(t) = \overline{\delta n}_{\text{stat}} + \overline{\delta n}_{\Omega}(t) = \frac{\int_0^{r_{\text{th}}} \delta n_{\text{stat}}(r) d^3\mathbf{r}}{\int_0^{r_{\text{th}}} d^3\mathbf{r}} + \frac{\int_0^{r_{\text{th}}} \delta n_{\Omega}(r, t) d^3\mathbf{r}}{\int_0^{r_{\text{th}}} d^3\mathbf{r}}.$$

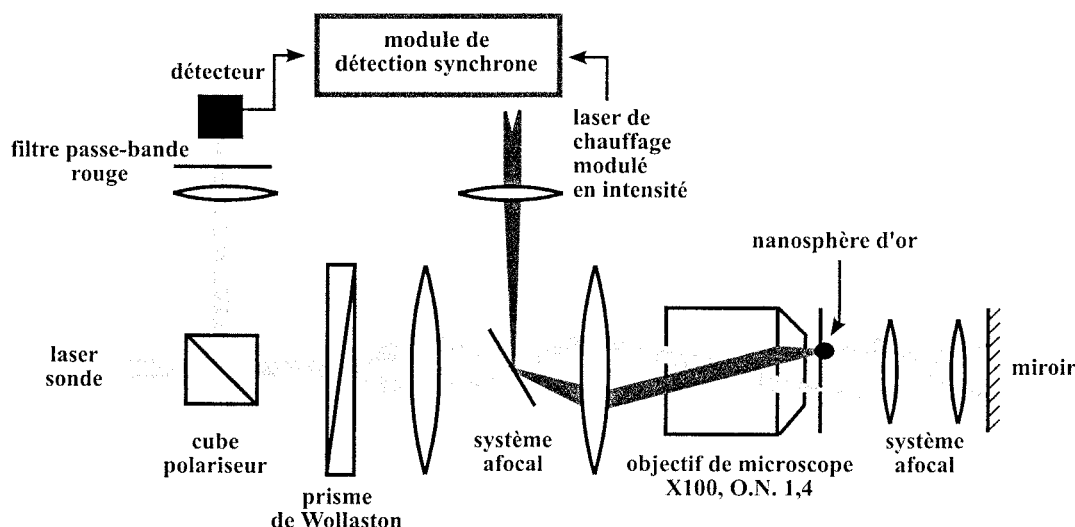


FIG. 6 – Schéma de l'interféromètre optique utilisé pour détecter la nanosphère d'or. Le laser de chauffage (en gris foncé) est modulé en intensité à la pulsation Ω . Le faisceau-sonde (en gris clair) passe à travers un cube polariseur, puis est séparé en deux faisceaux d'intensités égales par un dispositif appelé prisme de Wollaston. Les deux faisceaux passent à travers un système afocal, qui permet de mélanger le faisceau de chauffage à l'un des deux bras de l'interféromètre, puis à travers l'objectif de microscope, et enfin l'échantillon. Un des deux faisceaux passe dans une zone de l'échantillon contenant la nanosphère chauffée, alors que l'autre faisceau passe dans l'échantillon sans rencontrer de nanosphère : il apparaît alors un déphasage entre les deux bras de l'interféromètre. Les deux faisceaux sont réfléchis à travers un système afocal, puis recombinaison par le prisme de Wollaston, après traversée de l'ensemble du système suivant un chemin identique à celui suivi à l'aller. À cause du déphasage entre les deux bras de l'interféromètre, une partie du faisceau est réfléchi par le cube polariseur. L'intensité associée est mesurée par un photodétecteur, et le déphasage est mesuré à l'aide d'un module de détection synchrone.

De plus, toujours pour faciliter les calculs, on substitue dans le second terme l'intégrale sur la sphère par une intégrale sur tout l'espace, si bien que la variation d'indice dans la sphère est donnée par :

$$\overline{\delta n}(t) = \frac{\int_0^{r_{\text{th}}} \delta n_{\text{stat}}(r) d^3\mathbf{r}}{\int_0^{r_{\text{th}}} d^3\mathbf{r}} + \frac{\int_0^{\infty} \delta n_{\Omega}(r, t) d^3\mathbf{r}}{\int_0^{r_{\text{th}}} d^3\mathbf{r}}.$$

1. Calculer $\overline{\delta n}_{\text{stat}}$ et $\overline{\delta n}_{\Omega}(t)$. On pourra utiliser le formulaire fourni en début d'énoncé.
2. En déduire l'expression de la variation d'indice dans la sphère de rayon r_{th} :

$$\overline{\delta n}(t) = \frac{3}{8} \frac{P_0}{\pi \Lambda_m r_{\text{th}}} \frac{\partial n}{\partial T} (1 + \sin \Omega t).$$

3. Le déphasage $\delta\Phi(t)$ est estimé en considérant dans un premier temps que le faisceau-sonde, de longueur d'onde λ_s et d'extension très grande devant r_{th} , est composé de rayons lumineux qui traversent la sphère (Fig. 7). On suppose que la variation d'indice $\overline{\delta n}(t)$ est trop faible pour modifier la trajectoire de ces rayons lumineux, qui restent donc rectilignes (approximation dite de "réseau de phase mince").
 - (a) On considère un rayon lumineux traversant la sphère de rayon r_{th} à la distance ρ d'un axe parallèle au faisceau-sonde et passant par le centre de la sphère (Fig. 7). Déterminer l'expression de la longueur $l(\rho)$ de la partie du rayon lumineux qui se trouve à l'intérieur de la sphère de rayon r_{th} (Fig. 7).
 - (b) Donner l'expression du déphasage $\delta\Phi(\rho, t)$ le long de ce rayon lumineux, induit par la traversée de la sphère, en fonction de $l(\rho)$, $\overline{\delta n}(t)$ et λ_s .

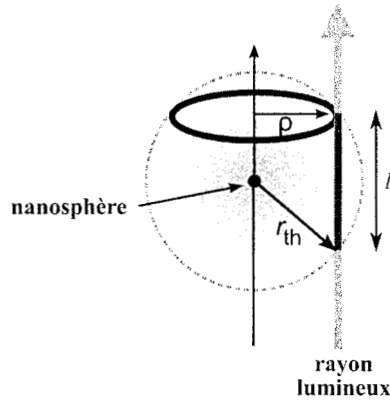


FIG. 7 – Rayon lumineux traversant la sphère de rayon r_{th} : détermination de la longueur l du trajet dans la sphère.

- (c) En déduire que le déphasage $\delta\Phi(t)$ induit sur le faisceau-sonde par la traversée de la sphère est donné par :

$$\delta\Phi(t) = \frac{4\pi}{\lambda_s} \overline{\delta n(t)} \frac{\int_0^{r_{th}} \sqrt{r_{th}^2 - \rho^2} \rho d\rho}{\int_0^{r_{th}} \rho d\rho}. \quad (15)$$

- (d) Montrer que $\delta\Phi(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\delta\Phi(t) = \delta\Phi_0(1 + \sin \Omega t),$$

où $\delta\Phi_0$ ne dépend que de P_0 , λ_s , Λ_m et $\partial n/\partial T$. On pourra utiliser le formulaire en début d'énoncé pour calculer l'intégrale intervenant dans la relation (15).

- (e) Évaluer numériquement $\delta\Phi_0$ pour $P_0 = 300$ nW, $\lambda_s = 633$ nm, $\Lambda_m = 0,6$ W.m⁻¹.K⁻¹ et $\partial n/\partial T = 10^{-4}$ K⁻¹. L'approximation de réseau de phase mince vous semble-t-elle justifiée ?

2 Mesure du déphasage $\delta\Phi(t)$ induit par la nanosphère

On suppose connue l'expression du déphasage $\delta\Phi(t)$ induit sur le faisceau-sonde par la nanosphère, et on désire maintenant décrire la chaîne de mesure de $\delta\Phi(t)$, qui inclut en particulier l'utilisation d'un cube polariseur et d'un prisme de Wollaston (Fig. 8).

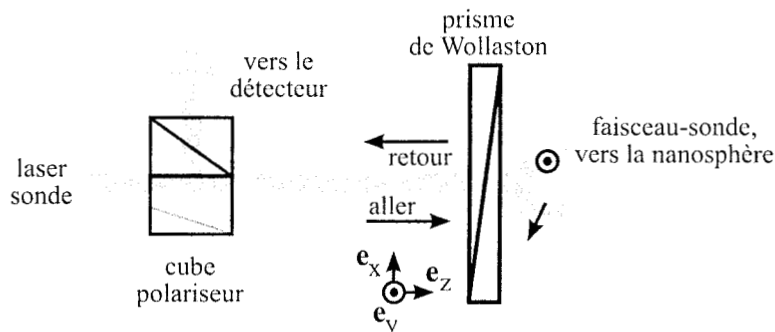


FIG. 8 – Association d'un cube polariseur et d'un prisme de Wollaston. Le faisceau-sonde, polarisé linéairement après traversée du cube, est séparé par le prisme de Wollaston en deux faisceaux d'intensités égales et de polarisations orthogonales. La nanosphère se trouve sur le chemin du faisceau-sonde polarisé suivant e_y . Après traversée de l'échantillon, réflexion et recombinaison par le prisme de Wollaston, une partie du faisceau-sonde est réfléchié par le cube vers le détecteur.

À l’aller, le faisceau-sonde traverse tout d’abord le cube polariseur. À la sortie du cube, il est polarisé linéairement, et le champ électrique associé s’écrit :

$$\mathbf{E} = E \boldsymbol{\epsilon}_i e^{i(\omega t - kz)},$$

où $\boldsymbol{\epsilon}_i$ est un vecteur unitaire représentant la polarisation de la lumière. Lorsque les vecteurs unitaires \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y coïncident avec les axes propres du prisme de Wollaston, $\boldsymbol{\epsilon}_i$ est donné par :

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y).$$

Ce choix permet de séparer le faisceau-sonde en deux faisceaux d’intensités égales et de polarisations orthogonales à la sortie du prisme de Wollaston (Fig. 8). Les faisceaux traversent ensuite l’échantillon, sont réfléchis, et reviennent sur le prisme de Wollaston, qui les recombine. Au retour, entre le prisme de Wollaston et le cube, la polarisation $\boldsymbol{\epsilon}_f$ du faisceau-sonde est donnée par :

$$\boldsymbol{\epsilon}_f = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + e^{2i\delta\Phi(t)}\mathbf{e}_y).$$

Pour un déphasage $\delta\Phi(t)$ non nul, une partie du faisceau-sonde est réfléchié par le cube polariseur.

1. On note I_s l’intensité lumineuse de la partie du faisceau-sonde réfléchié par le cube vers le détecteur.
 - (a) Expliquer succinctement pourquoi $I_s = I_0|\boldsymbol{\epsilon}_f \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\perp|^2$, où I_0 est l’intensité du faisceau-sonde avant le cube, et $\boldsymbol{\epsilon}_\perp$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{\epsilon}_i$.
 - (b) Donner une expression de $\boldsymbol{\epsilon}_\perp$ en fonction de \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y .
 - (c) En déduire que $I_s = I_0|\delta\Phi(t)|^2$ à l’ordre le plus bas en $\delta\Phi(t)$.
2. On suppose que $\delta\Phi(t) = \delta\Phi_0(1 + \sin(\Omega t))$, où $\delta\Phi_0$ est une constante, et que la tension $U(t)$ générée par le détecteur est proportionnelle à l’intensité qu’il reçoit. Cette tension est envoyée vers un module de détection synchrone, lui-même relié au dispositif permettant de moduler à la fréquence Ω l’intensité du laser de chauffage.
 - (a) Rappeler succinctement le principe d’un module de détection synchrone.
 - (b) Montrer que le signal issu du module de détection synchrone est proportionnel à $|\delta\Phi_0|^2$.

Annexe A : extrait des programmes de collège (B.O.E.N. spécial n° 6 du 28/08/2008)

LA DEMARCHE D'INVESTIGATION

Dans la continuité de l'école primaire, les programmes du collège privilégient pour les disciplines scientifiques et la technologie une démarche d'investigation. Comme l'indiquent les modalités décrites ci-dessous, cette démarche n'est pas unique. Elle n'est pas non plus exclusive et tous les objets d'étude ne se prêtent pas également à sa mise en œuvre. Une présentation par l'enseignant est parfois nécessaire, mais elle ne doit pas, en général, constituer l'essentiel d'une séance dans le cadre d'une démarche qui privilégie la construction du savoir par l'élève. Il appartient au professeur de déterminer les sujets qui feront l'objet d'un exposé et ceux pour lesquels la mise en œuvre d'une démarche d'investigation est pertinente.

La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre.

Repères pour la mise en œuvre

1. Divers aspects d'une démarche d'investigation

Cette démarche s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques). Les investigations réalisées avec l'aide du professeur, l'élaboration de réponses et la recherche d'explications ou de justifications débouchent sur l'acquisition de connaissances, de compétences méthodologiques et sur la mise au point de savoir-faire techniques.

Dans le domaine des sciences expérimentales et de la technologie, chaque fois qu'elles sont possibles, matériellement et déontologiquement, l'observation, l'expérimentation ou l'action directe par les élèves sur le réel doivent être privilégiées.

Une séance d'investigation doit être conclue par des activités de synthèse et de structuration organisées par l'enseignant, à partir des travaux effectués par la classe. Celles-ci portent non seulement sur les quelques notions, définitions, résultats et outils de base mis en évidence, que les élèves doivent connaître et peuvent désormais utiliser, mais elles sont aussi l'occasion de dégager et d'explicitier les méthodes que nécessite leur mise en œuvre.

2. Canevas d'une séquence d'investigation

Ce canevas n'a pas la prétention de définir « la » méthode d'enseignement, ni celle de figer de façon exhaustive un déroulement imposé. Une séquence est constituée en général de plusieurs séances relatives à un même sujet d'étude.

Par commodité de présentation, sept moments essentiels ont été identifiés. L'ordre dans lequel ils se succèdent ne constitue pas une trame à adopter de manière linéaire. En fonction des sujets, un aller et retour entre ces moments est tout à fait souhaitable, et le temps consacré à chacun doit être adapté au projet pédagogique de l'enseignant.

Les modes de gestion des regroupements d'élèves, du binôme au groupe-classe selon les activités et les objectifs visés, favorisent l'expression sous toutes ses formes et permettent un accès progressif à l'autonomie.

La spécificité de chaque discipline conduit à penser différemment, dans une démarche d'investigation, le rôle de l'expérience et le choix du problème à résoudre. Le canevas proposé doit donc être aménagé pour chaque discipline

Le choix d'une situation - problème

- analyser les savoirs visés et déterminer les objectifs à atteindre ;
- repérer les acquis initiaux des élèves ;
- identifier les conceptions ou les représentations des élèves, ainsi que les difficultés persistantes (analyse d'obstacles cognitifs et d'erreurs) ;
- élaborer un scénario d'enseignement en fonction de l'analyse de ces différents éléments.

L'appropriation du problème par les élèves :

Les élèves proposent des éléments de solution qui permettent de travailler sur leurs conceptions initiales, notamment par confrontation de leurs éventuelles divergences pour favoriser l'appropriation par la classe du problème à résoudre.

L'enseignant guide le travail des élèves et, éventuellement, l'aide à reformuler les questions pour s'assurer de leur sens, à les recentrer sur le problème à résoudre qui doit être compris par tous. Ce guidage ne doit pas amener à occulter ces conceptions initiales mais au contraire à faire naître le questionnement.

La formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles :

- formulation orale ou écrite de conjectures ou d'hypothèses par les élèves (ou les groupes) ;
- élaboration éventuelle d'expériences, destinées à tester ces hypothèses ou conjectures ;
- communication à la classe des conjectures ou des hypothèses et des éventuels protocoles expérimentaux proposés.

L'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves :

- moments de débat interne au groupe d'élèves ;
- contrôle de l'isolement des paramètres et de leur variation, description et réalisation de l'expérience (schémas, description écrite) dans le cas des sciences expérimentales, réalisation en technologie ;
- description et exploitation des méthodes et des résultats ; recherche d'éléments de justification et de preuve, confrontation avec les conjectures et les hypothèses formulées précédemment.

L'échange argumenté autour des propositions élaborées :

- communication au sein de la classe des solutions élaborées, des réponses apportées, des résultats obtenus, des interrogations qui demeurent ;
- confrontation des propositions, débat autour de leur validité, recherche d'arguments ; en mathématiques, cet échange peut se terminer par le constat qu'il existe plusieurs voies pour parvenir au résultat attendu et par l'élaboration collective de preuves.

L'acquisition et la structuration des connaissances :

- mise en évidence, avec l'aide de l'enseignant, de nouveaux éléments de savoir (notion, technique, méthode) utilisés au cours de la résolution,
- confrontation avec le savoir établi (comme autre forme de recours à la recherche documentaire, recours au manuel), en respectant des niveaux de formulation accessibles aux élèves, donc inspirés des productions auxquelles les groupes sont parvenus ;
- recherche des causes d'un éventuel désaccord, analyse critique des expériences faites et proposition d'expériences complémentaires,
- reformulation écrite par les élèves, avec l'aide du professeur, des connaissances nouvelles acquises en fin de séquence.

La mobilisation des connaissances :

- exercices permettant d'automatiser certaines procédures, de maîtriser les formes d'expression liées aux connaissances travaillées : formes langagières ou symboliques, représentations graphiques... (entraînement), liens ;
- nouveaux problèmes permettant la mise en œuvre des connaissances acquises dans de nouveaux contextes (réinvestissement) ;
- évaluation des connaissances et des compétences méthodologiques

Annexe B : extrait du programme de la classe de quatrième (B.O.E.N. spécial n°6 du 28/08/2008)

C. La lumière : couleurs, images, vitesse

C1 - Lumières colorées et couleur des objets

Cette partie prolonge le programme de cinquième par la notion de couleur. Le monde qui entoure l'élève est un monde coloré. Cette rubrique, qui constitue une première approche de la couleur abordée également en arts graphiques, est un terrain favorable pour une importante activité d'expérimentation raisonnée.

Connaissances	Capacités	Commentaires
LUMIERES COLORÉES ET COULEUR DES OBJETS : comment obtenir des lumières colorées?		
La lumière blanche est composée de lumières colorées.	Suivre un protocole pour obtenir un spectre continu par décomposition de la lumière blanche en utilisant un prisme ou un réseau.	
Éclairé en lumière blanche, un filtre permet d'obtenir une lumière colorée par absorption d'une partie du spectre visible.	Extraire des informations d'un fait observé.	
<i>Des lumières de couleurs bleue, rouge et verte permettent de reconstituer des lumières colorées et la lumière blanche par synthèse additive.</i>	<i>Suivre un protocole. Faire des essais avec différents filtres pour obtenir des lumières colorées par superposition de lumières colorées.</i>	La synthèse soustractive est hors programme.
La couleur perçue lorsqu'on observe un objet dépend de l'objet lui-même et de la lumière qui l'éclaire.	Faire des essais pour montrer qualitativement le phénomène. Présenter à l'écrit ou à l'oral une observation.	On ne demandera pas à l'élève de prévoir la couleur perçue par un observateur.
En absorbant la lumière, la matière reçoit de l'énergie. Elle s'échauffe et transfère une partie de l'énergie reçue à l'extérieur sous forme de chaleur.	Extraire d'un document (papier ou numérique) les informations relatives aux transferts énergétiques	Thème de convergence : énergie

C2 - Que se passe-t-il quand la lumière traverse une lentille ?

Dans le prolongement de la problématique introduite en classe de 5^{ème} « comment éclairer et voir un objet ? » et « comment se propage la lumière ? », cette rubrique propose une première analyse de la formation des images.

Connaissances	Capacités	Commentaires
LENTILLES, FOYERS ET IMAGES : comment obtient-on une image à l'aide d'une lentille convergente ?		
Dans certaines positions de l'objet par rapport à la lentille, une lentille convergente permet d'obtenir une image sur un écran.	Obtenir avec une lentille convergente l'image d'un objet sur un écran.	Les seules images étudiées sont des images réelles. Les expressions image réelle et image virtuelle ne sont pas introduites. La construction géométrique d'image est hors programme.
Il existe deux types de lentilles, convergente et divergente.	Extraire d'un document les informations montrant les applications au quotidien des lentilles. Observer, extraire les informations d'un fait observé pour distinguer les deux types de lentilles.	
Une lentille convergente concentre pour une source éloignée l'énergie lumineuse en son foyer.	Mettre en œuvre un protocole pour trouver expérimentalement le foyer d'une lentille convergente.	La notion de foyer principal objet est hors programme. L'expression foyer principal image ne sera pas utilisée. Les constructions de rayons lumineux sont hors programme. Thème de convergence : énergie
La vision résulte de la formation d'une image sur la rétine, interprétée par le cerveau. Les verres correcteurs et les lentilles de contact correctrices sont des lentilles convergentes ou divergentes.	Présenter les éléments de l'œil sous une forme appropriée : modèle élémentaire. <i>Pratiquer une démarche expérimentale pour expliquer les défauts de l'œil et leur correction (myopie, hypermétropie).</i>	<i>Les seuls défauts de l'œil illustrés expérimentalement sont la myopie et l'hypermétropie.</i>

C3 - Vitesse de la lumière

Les élèves ont vu en cinquième que la lumière se propage en ligne droite. L'étude de la vitesse de la lumière est l'occasion d'aborder un autre exemple de relation de proportionnalité.

Connaissances	Capacités	Commentaires
<i>Dans quels milieux et à quelle vitesse se propage la lumière ?</i>		
La lumière peut se propager dans le vide et dans des milieux transparents comme l'air, l'eau et le verre. Vitesse de la lumière dans le vide (3×10^8 m/s ou 300 000 km/s).	<i>Rechercher, extraire et organiser l'information utile relative à la vitesse de la lumière.</i> Traduire par une relation mathématique la relation entre distance, vitesse et durée. Calculer, utiliser une formule.	En ce qui concerne la vitesse de la lumière, l'enseignant se limitera à des calculs simples non répétitifs. On n'introduira pas le terme « célérité ».