

1269

17221

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours interne
de recrutement de professeurs agrégés
et concours d'accès à l'échelle de rémunération**

section : sciences physiques

composition sur la physique
et le traitement automatisé de l'information

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche, y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout document et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives personnelles qu'il est amené à prendre pour cela.

Tournez la page S.V.P.

Le problème aborde plusieurs domaines de la physique dans lesquels se manifestent les forces de pression.

On envisage, dans la première partie, la pression de radiation électromagnétique sous son double aspect ondulatoire et corpusculaire. On montre comment on peut grâce à elle manipuler ou encore ralentir des atomes.

La pression cinétique fait l'objet de la deuxième partie, qui propose un modèle simple unidimensionnel permettant de retrouver des résultats classiques de thermodynamique.

Enfin, dans la troisième partie, on étudie quelques aspects de la pression acoustique, puis le fonctionnement, en particulier électrique, d'un microphone à pression.

Ces trois parties sont indépendantes.

Il est rappelé aux candidats qu'ils doivent impérativement justifier leurs réponses, de manière claire, précise et concise. Un résultat non justifié sera considéré comme nul. Il en sera de même pour un résultat numérique donné sans son unité éventuelle, ou comportant un nombre de chiffres excessif.

Les candidats ne devront pas hésiter à commenter les résultats obtenus, même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Il est demandé aux candidats de rappeler la référence complète d'une question avant la solution qu'ils en proposent.

Le barème de notation tiendra compte de la présentation et de la qualité de la rédaction.

Dans tout le problème, l'espace est rapporté à un système d'axes (Ox, Oy, Oz) auquel est associée la base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

CONSTANTES FONDAMENTALES ET VALEURS UTILES

Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Intensité normale du champ de pesanteur	$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

A.I. RÉFLEXION D'UNE ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE SUR UN CONDUCTEUR PARFAIT

Le demi-espace $x > 0$ est occupé par un métal non magnétique et conducteur parfait, c'est à dire de conductivité infinie. Dans le demi-espace $x < 0$ règne le vide.

Une onde électromagnétique plane, monochromatique, polarisée rectilignement selon Oy , se propage dans le vide dans le sens des x croissants et arrive sous incidence normale à la surface du métal. En tout point M du demi-espace $x < 0$, repéré par le vecteur $\vec{r} = \overline{OM}$, le champ électrique de l'onde incidente s'écrit :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_y .$$

A.I.1.a.

Exprimer le vecteur d'onde \vec{k} en fonction de la pulsation ω de l'onde.

A.I.1.b.

Rappeler les relations liant le champ électrique \vec{E} , le champ magnétique \vec{B} et le vecteur d'onde \vec{k} d'une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale dans le vide.

Donner alors l'expression du champ magnétique $\vec{B}_i(\vec{r}, t)$ de l'onde incidente.

A.I.1.c.

Rappeler l'expression dans le cas général de la densité volumique d'énergie électromagnétique e du vide et du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ en fonction du champ électrique \vec{E} et du champ magnétique \vec{B} . En déduire, en fonction de E_0 , ϵ_0 et c , les valeurs moyennes temporelles $\langle e_i \rangle$ et $\langle \Pi_i \rangle$ de la densité volumique d'énergie électromagnétique associée à l'onde incidente et du flux surfacique d'énergie électromagnétique incident sur la surface du conducteur.

A.I.2.a.

Que vaut le champ \vec{E} à l'intérieur du métal parfait ? Justifier la réponse.

A.I.2.b.

Montrer que, en l'absence de champ magnétique statique, le champ \vec{B} est nécessairement nul dans le conducteur.

A.I.3.a.

Comment s'écrit la relation de passage du champ \vec{E} à l'interface entre le vide et le métal ? Montrer que cette relation implique nécessairement l'existence d'une onde réfléchie. Quelle est l'origine physique de cette onde ?

On admet que l'onde réfléchie est plane, de pulsation ω , de champ électrique \vec{E}_r polarisé selon \vec{e}_y comme l'onde incidente, et se propageant selon Ox dans le sens des x négatifs.

Comment peut-on justifier chacune de ces hypothèses ?

Donner l'expression, en fonction de E_0 , ω et \vec{k} , des champs électrique $\vec{E}_r(\vec{r}, t)$ et magnétique $\vec{B}_r(\vec{r}, t)$ de l'onde réfléchie.

A.I.3.b.

En utilisant la relation de passage du champ \vec{B} à l'interface, montrer que la surface du métal est le siège d'un courant surfacique \vec{j}_s dont on donnera l'expression en fonction de E_0 , ϵ_0 et c .

Montrer alors que l'onde incidente exerce sur un élément dS de surface du métal une force $d\vec{F}$. S'agit-il d'une force de Laplace ou d'une force de Lorentz ? Donner l'expression de la valeur moyenne $\langle d\vec{F} \rangle$ de $d\vec{F}$ sur une période.

En déduire que l'onde exerce sur le métal une pression "de radiation" P_{rad} . Donner l'expression de P_{rad} en fonction de E_0 et ϵ_0 , puis de la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique incidente $\langle e_1 \rangle$.

Pourquoi ne tient-on pas compte dans le calcul de $d\vec{F}$ de la force exercée par \vec{B}_r sur \vec{j}_s ?

A.I.4.

On peut retrouver le résultat précédent à l'aide d'un modèle corpusculaire du rayonnement : le rayonnement incident est maintenant considéré comme un flux de photons. Chaque photon se déplace dans le vide à la vitesse c et possède la même énergie \mathcal{E} et la même quantité de mouvement $\frac{\mathcal{E}}{c} \vec{e}_x$.

La relation de Planck $\mathcal{E} = \frac{h}{2\pi} \omega$ constitue le lien entre la description corpusculaire et la description ondulatoire.

Le flux incident comporte en moyenne n photons par unité de volume. On admet que la réflexion à la surface du conducteur parfait correspond pour chaque photon à un choc élastique.

A.I.4.a.

Calculer, en fonction de n et \mathcal{E} , la variation de quantité de mouvement $\delta^2 \vec{p}$ de l'ensemble des photons réfléchis pendant l'intervalle de temps dt sur un élément de surface dS de l'interface. En déduire la force moyenne $\langle d\vec{F} \rangle$ exercée par le rayonnement incident sur un élément de surface dS , et donner l'expression de la pression de radiation P_{rad} . Exprimer P_{rad} en fonction de la densité volumique d'énergie incidente. Comparer au résultat (A.I.3.b.) et conclure.

A.I.4.b.

Comment les résultats précédents seraient-ils modifiés dans le cas d'un métal dont la surface, noircie, absorberait totalement le rayonnement incident, c'est à dire sur laquelle les photons subiraient un choc mou ?

A.II. PRESSION DE RADIATION ÉLECTROMAGNÉTIQUE SUR DES ATOMES

La force exercée par le rayonnement électromagnétique sur les atomes permet de les manipuler. On peut ainsi dévier ou freiner un faisceau atomique, ou encore ralentir les atomes d'un gaz de manière à obtenir de très basses températures.

A.II.1. INTERACTION ATOME-RAYONNEMENT

Un laser émet selon la direction Ox un faisceau parallèle monochromatique de fréquence ν_L . On considère le rayonnement du laser sous son aspect corpusculaire : il est constitué de photons, de vitesse $c \vec{e}_x$, d'énergie $h\nu_L$, de quantité de mouvement $\frac{h\nu_L}{c} \vec{e}_x$.

On considère par ailleurs un atome possédant deux niveaux d'énergie E_1 et E_2 ($E_2 > E_1$). On pose $h\nu_0 = E_2 - E_1$ où h est la constante de Planck. Dans la suite, l'atome considéré est un atome de sodium, de masse m , pour lequel la fréquence ν_0 correspond à la longueur d'onde $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$. La masse molaire du sodium est $M = 23 \text{ g.mol}^{-1}$.

A.II.1.a.

L'atome est susceptible de passer du niveau E_1 au niveau E_2 par absorption d'un photon quasi résonnant, c'est à dire correspondant à une fréquence ν proche de ν_0 . Ce processus peut être considéré comme un choc mou, au cours duquel la quantité de mouvement totale se conserve.

Calculer la variation de vitesse $\Delta \vec{v}_a$ de l'atome au cours d'un choc avec un photon du rayonnement laser.

Calculer numériquement le module Δv_a de $\Delta \vec{v}_a$, pour un laser accordé sur la fréquence de la transition atomique ($\nu_L = \nu_0$). Comparer Δv_a à la vitesse d'agitation thermique d'atomes de sodium à température ambiante $T = 300 \text{ K}$.

A.II.1.b.

L'atome excité au niveau E_2 se désexcite au niveau E_1 en émettant un photon *dans une direction aléatoire*. Quelle est, en moyenne sur un grand nombre de désexcitations, la variation de vitesse $\langle \Delta \vec{v}_e \rangle$ de l'atome produite par ce deuxième processus ?

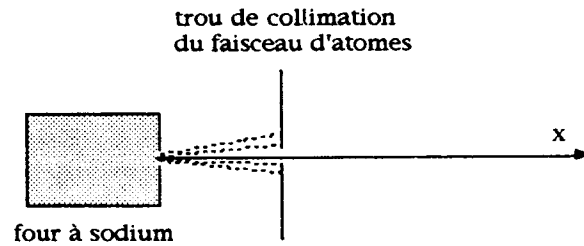
A.II.1.c.

L'atome subit A_0 cycles d'absorption-émission par unité de temps. On prendra pour les applications numériques $A_0 = 10^7 \text{ s}^{-1}$.

Exprimer l'accélération moyenne \vec{a} de l'atome et la force moyenne \vec{F} qu'il subit de la part du rayonnement. Comparer \vec{F} à la force de pesanteur s'exerçant sur l'atome.

A.II.2. MANIPULATION D'ATOMES À L'AIDE D'UN LASER

Un four contenant de la vapeur de sodium à la température T est percé d'un orifice et émet un jet effusif d'atomes de sodium. Une plaque percée d'un trou et placée devant le four permet d'obtenir un faisceau pratiquement parallèle, en sélectionnant parmi les atomes émergeant du four ceux dont la vitesse est quasi parallèle à Ox.

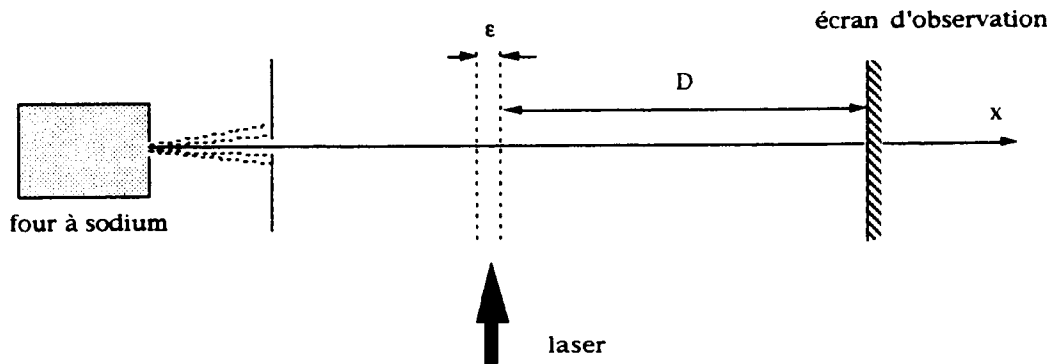


A.II.2.a.

On montre en théorie cinétique des gaz que, si la vitesse la plus probable des atomes de sodium *dans le four* vaut $\sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$, la vitesse la plus probable *dans le jet*, est plus grande (tout en étant du même ordre de grandeur) et vaut $v_m = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$. Expliquer en quelques mots l'origine de cet écart.

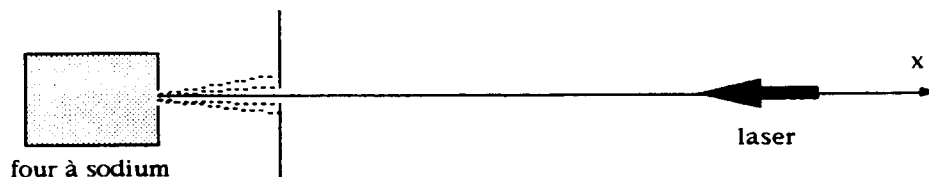
A.II.2.b.

Le four est à la température $T_{\text{four}} = 500 \text{ K}$. Le jet, dirigé selon Ox , est éclairé latéralement par le faisceau du laser, dirigé selon Oy . La zone d'interaction a une largeur selon Ox $\epsilon = 5 \text{ mm}$. On place un écran orthogonalement à Ox , à une distance $D = 1 \text{ m}$ de la zone d'interaction. Déterminer, littéralement puis numériquement, la déviation d du point d'impact des atomes de vitesse v_m sur l'écran, provoquée par l'interaction avec le faisceau. On exprimera le résultat littéral en fonction du module F de la force moyenne subie par un atome dans la zone d'interaction avec le rayonnement.



A.II.2.c.

Le jet est maintenant éclairé frontalement par le rayonnement laser, dirigé selon Ox mais en sens inverse.



Evaluer la distance et le temps nécessaires pour arrêter les atomes.

Pourquoi cette technique n'est-elle pas en fait utilisable pour immobiliser totalement un ensemble d'atomes ?

A.II.3. RALENTISSEMENT D'ATOMES PIÉGÉS

En réalité, une étude plus approfondie de l'interaction atome-rayonnement montre qu'il est possible, à l'aide de plusieurs lasers convenablement accordés, de refroidir des atomes préalablement confinés dans un piège magnéto-optique. Steven Chu (prix Nobel 1997) a ainsi pu créer à l'aide de trois paires de lasers un domaine tridimensionnel dans lequel les atomes sont ralentis.

A.II.3.a.

Quel nom donne-t-on à ce domaine tridimensionnel dans lequel les atomes se trouvent englués par la lumière laser ?

A.II.3.b.

En 1997, le prix Nobel a aussi récompensé Claude Cohen-Tannoudji qui, avec son équipe, avait pu, entre autres, refroidir un ensemble d'atomes de césium jusqu'à la température de $0,18 \mu\text{K}$.

La masse molaire du césium est : $M_{\text{Cs}} = 133 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

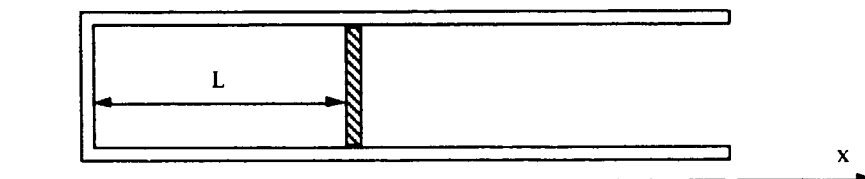
Quel est l'ordre de grandeur de la vitesse à laquelle il faut amener des atomes de césium pour obtenir une température de $3 \mu\text{K}$? Commenter.

A.II.3.c.

Quelles peuvent être les applications pratiques de ce type de refroidissement ?

Dans toute cette partie, on considère une enceinte constituée d'un cylindre, de section S , fermé par un piston coulissant sans frottement.

On note L la distance entre le fond du cylindre et le piston : le volume intérieur de l'enceinte est ainsi $V = LS$. L'axe du cylindre est selon Ox et on néglige totalement l'effet du champ de pesanteur.



B.I. LOI DE LAPLACE

L'enceinte est supposée adiabatique. Elle contient n moles d'un gaz parfait monoatomique.

Le gaz étant à l'équilibre thermodynamique, à la température T et à la pression P , on déplace très lentement le piston, de façon à faire varier le volume de l'enceinte d'une quantité infinitésimale dV .

B.I.1.a.

Rappeler la valeur du rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ des capacités thermiques molaires à pression et volume constant pour un gaz parfait monoatomique.

B.I.1.b.

Quelle relation générale lie la variation d'énergie interne dU d'un gaz parfait à sa variation de température dT ?

B.I.1.c.

Pour la transformation envisagée, quelle relation lie dU à la variation de volume dV ?

B.I.1.d.

Déduire des relations précédentes une relation entre P et V au cours d'un déplacement fini du piston effectué très lentement.

B.I.2.

Le piston est maintenant libre. La pression à l'extérieur de l'enceinte est P_0 , supposée uniforme et stationnaire. Dans l'état initial, le gaz est à l'équilibre thermodynamique : sa pression vaut P_0 , sa température T_0 , son volume V_0 . A partir de cet état, on déplace légèrement le piston que l'on abandonne alors sans vitesse initiale. On repère la position du piston par son abscisse x par rapport à sa position d'équilibre.

On suppose que les seules forces s'appliquant sur le piston sont les forces de pression, et qu'à tout instant la relation établie en (B.I.1.d.) est valable. De plus, la variation relative de

pression du gaz $\frac{P - P_0}{P_0}$ est suffisamment faible pour être assimilée à un infiniment petit du 1^{er} ordre.

B.I.2.a.

Montrer que l'effet des forces de pression sur le piston est équivalent à celui d'un ressort de constante de raideur K dont on déterminera l'expression en fonction de γ , P_0 , V_0 et S .

B.I.2.b.

En déduire l'équation différentielle satisfaite par x , en fonction de K et de la masse m du piston.

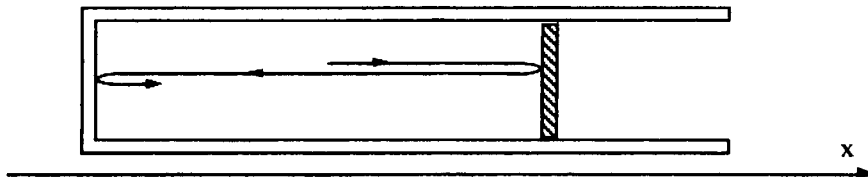
Application numérique :

$$P_0 = 10^5 \text{ Pa} ; S = 3,0 \text{ cm}^2 ; m = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} ; V_0 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Calculer numériquement K ainsi que la pulsation ω et la période T des oscillations du piston.

B.II. PISTON FIXE

On se propose de retrouver et de préciser les résultats précédents à l'aide d'un modèle microscopique simple unidimensionnel. L'enceinte contient maintenant une ou plusieurs particules, assimilées à des points matériels de même masse μ ; par hypothèse, ces particules se déplacent uniquement parallèlement à l'axe du cylindre, c'est à dire ont une vitesse \vec{v} toujours portée par \vec{e}_x , et subissent des chocs *élastiques* sous incidence normale alternativement sur le fond du cylindre et sur le piston.



Dans la partie (B.II.), le piston est maintenu immobile.

B.II.1.

Le cylindre ne contient, pour commencer, qu'une seule particule

B.II.1.a.

Rappeler la définition d'un choc élastique.

Montrer que la norme v de la vitesse de la particule se conserve au cours d'un choc.

B.II.1.b.

Exprimer, en fonction de μ , L et v , la variation algébrique Δp_x de la quantité de mouvement de la particule au cours d'un choc sur le piston, et l'intervalle de temps Δt entre deux chocs successifs sur le piston.

B.II.1.c.

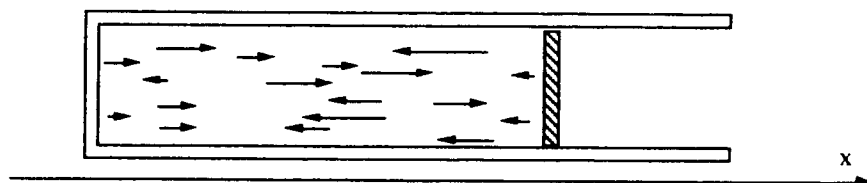
Représenter schématiquement les variations en fonction du temps de la force *instantanée* exercée par la particule sur le piston.

B.II.1.d.

Définir et calculer, en fonction de μ , v et L , la force exercée par la particule sur le piston en moyenne sur un intervalle de temps très grand devant Δt .

B.II.2.

L'enceinte contient maintenant N particules identiques, de même masse μ mais dont les vitesses ont des normes v_i ($1 \leq i \leq N$) a priori différentes. Ces particules se déplacent parallèlement à l'axe du cylindre, sur des trajectoires décalées les unes par rapport aux autres et n'interagissent pas les unes avec les autres.



On note $\bar{E}_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mu v_i^2$ l'énergie cinétique moyenne des particules .

B.II.2.a.

Calculer, en fonction de L et de \bar{E}_c , la force exercée en moyenne temporelle par les particules sur le piston.

B.II.2.b.

On définit la température T de l'ensemble des particules par la relation : $\bar{E}_c = \frac{1}{2} k_B T$ où k_B est la constante de Boltzmann.

Comparer cette définition de la température à celle donnée en théorie cinétique des gaz et commenter.

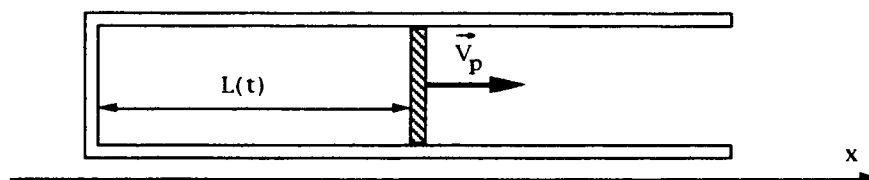
Montrer qu'avec cette définition, on retrouve pour le gaz de particules l'équation d'état du gaz parfait.

B.II.2.c.

Exprimer, pour ce modèle de gaz de particules, l'énergie interne U en fonction de N et T .
En déduire les capacités thermiques molaires C_p et C_v et le coefficient $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

B.III. PISTON MOBILE

Un opérateur déplace maintenant le piston par rapport au cylindre avec une vitesse constante $V_p = \frac{dl}{dt}$.



B.III.1.

L'enceinte contient, comme en (B.II.1), une seule particule, subissant des chocs élastiques normaux sur le fond du cylindre et sur le piston. On note v_n la norme de la vitesse de la particule juste avant le $n^{\text{ième}}$ choc sur le piston et t_n l'instant où se produit ce choc.

B.III.1.a.

Etablir une relation entre v_{n+1} , v_n et V_p .

B.III.1.b

Exprimer, en fonction de v_n , V_p et $L(t_n)$, l'intervalle de temps $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ entre les chocs n et $n + 1$ sur le piston.

B.III.1.c.

On se place dans le cas où la norme de la vitesse de la particule est très grande devant celle du piston. La variation relative de v_n à v_{n+1} est ainsi assez faible pour que, à une échelle de temps suffisamment grande devant Δt_n , on puisse remplacer la suite discrète des v_n par une fonction continue du temps $v(t)$.

A l'aide des résultats (B.III.1.a.) et (B.III.1.b.), exprimer $\frac{dv}{dt}$ en fonction de V_p , L et v .

En déduire qu'au cours du déplacement du piston la vitesse v de la particule varie en fonction de L selon la loi : $v.L^\beta = k$ où k est une constante dépendant des conditions initiales et β un exposant dont on donnera la valeur.

Ce résultat reste-t-il valable si le déplacement du piston, tout en restant très lent devant celui de la particule, n'est plus uniforme ?

B.III.2.

Comme en (B.II.2.), le cylindre contient maintenant N particules, d'énergie cinétique moyenne $\bar{E}_c = \frac{1}{2} k_B T$. On admet qu'à tout instant l'équation d'état établie en (B.II.2.) est valable.

A l'aide des résultats de la question (B.III.1.), montrer qu'au cours du déplacement du piston à la vitesse V_p , la pression P et le volume V de l'enceinte sont liés par une relation que l'on établira. Comparer cette relation à la relation (B.I.1.d.) et commenter.

C.I. PROPAGATION DU SON DANS LES FLUIDES

On étudie la propagation d'ondes sonores planes dans un tuyau cylindrique de section S , de génératrices parallèles à Ox , supposé de longueur infinie. Le tuyau est rempli d'un fluide parfait ; on néglige l'influence de la pesanteur et les seules forces s'exerçant sur un volume de fluide donné sont les forces de pression. En l'absence d'onde sonore, le fluide est au repos : sa pression P_0 , sa température T_0 et sa masse volumique ρ_0 sont uniformes.

Une section donnée de fluide est repérée par l'abscisse x de sa position au repos (représentation dite "lagrangienne"). Cette section se déplace selon Ox sous l'action de l'onde : à l'instant t , son abscisse est $x + s$, sa pression P , sa température T et sa masse volumique ρ .

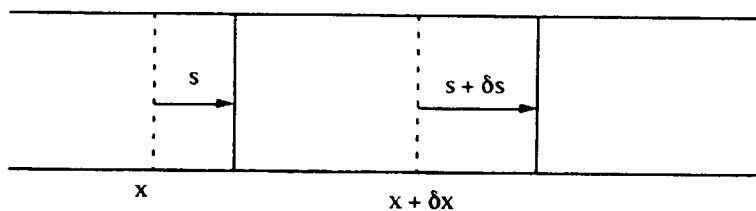
s , P , T et ρ sont considérées comme des fonctions de x et de t .

On définit pour la section de fluide : la vitesse vibratoire $u(x, t) = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_x$, la surpression

vibratoire $p(x, t) = P - P_0$ et la dilatation $\theta(x, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$.

C.I.1. ETABLISSEMENT DE L'ÉQUATION D'ONDE

On raisonne sur la tranche élémentaire de fluide comprise, au repos, entre les sections d'abscisses x et $x + \delta x$. A l'instant t , les déplacements de ces sections sont respectivement s et $s + \delta s$.



C.I.1.a.

Montrer que la conservation de la masse de la tranche de fluide impose une relation entre θ et $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_t$.

On considère dans toute la suite que θ , $\frac{p}{P_0}$ et $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_t$ sont très petits devant l'unité (approximation "acoustique"), ce qui permet de linéariser les différentes expressions obtenues. Que devient dans ces conditions la relation exprimant la conservation de la masse ?

C.I.1.b.

On admet qu'au cours du mouvement de la tranche de fluide, la pression P et la masse volumique ρ sont liées par une relation que l'on met sous la forme $\rho = \varphi(P)$. On définit la compressibilité χ_0 du fluide pour la transformation considérée par $\chi_0 = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dP}\right)_0 = \frac{\varphi'(P_0)}{\rho_0}$.

En déduire une relation entre la surpression p et la dilatation θ .

C.I.1.c.

Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la tranche de fluide, en explicitant les différentes forces qui s'appliquent sur elle. En déduire une relation entre $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_t$ et $\left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\right)_x$.

C.I.1.d.

Déduire des trois relations précédentes l'équation d'onde satisfaite par p et faisant intervenir ρ_0 et χ_0 .

Quelle est la forme des équations d'onde satisfaites par s , et θ ?

C.I.2. CÉLÉRITÉ DU SON

C.I.2.a.

Montrer qu'il existe des solutions à l'équation d'onde de la forme : $p = f\left(t - \frac{x}{c_s}\right)$ où c_s est une constante et f une fonction a priori quelconque de la variable composée $t - \frac{x}{c_s}$. Exprimer c_s en fonction de ρ_0 et χ_0 . Justifier le qualificatif d'onde progressive donné à ce type de solution.

C.I.2.b.

Montrer qu'il existe, pour une onde progressive, une relation simple entre la surpression p et la vitesse vibratoire u , relation que l'on exprimera en fonction de χ_0 et c_s .

C.I.2.c.

Le fluide contenu dans le tube est un gaz diatomique considéré comme parfait. Les transformations thermodynamiques de ce gaz sous l'action de l'onde sonore sont supposées isentropiques.

Quelle est la forme de la fonction $\varphi(P)$? Etablir l'expression de la célérité c_s des ondes en fonction de la température T_0 de repos, de la masse molaire M du gaz et du rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ des capacités thermiques molaires à pression et à volume constant. La vitesse quadratique moyenne des molécules d'un gaz parfait de masse molaire M à la température T_0 est $\sqrt{\frac{3RT_0}{M}}$; comparer à c_s et interpréter.

C.I.3. INTENSITÉ SONORE

La propagation de l'onde dans le tube s'accompagne d'un flux d'énergie.

C.I.3.a.

Exprimer, en fonction de la surpression p et de la vitesse vibratoire u , la puissance surfacique Π_a associée aux forces de surpression acoustique.

C.I.3.b.

On considère une onde acoustique plane progressive sinusoïdale. La surpression se met alors sous la forme $p = p_m \cos[\omega(t - x/c_s)]$.

On définit l'intensité sonore I comme la valeur moyenne temporelle de Π_a . Donner l'expression de I en fonction de p_m , χ_0 et c_s , puis en fonction de p_m , P_0 , T_0 et des caractéristiques du gaz.

C.I.3.c.

L'intensité minimale perceptible par l'oreille humaine, pour la pulsation $\omega = 2000\pi \text{ rd.s}^{-1}$, est $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$. Evaluer l'amplitude p_{m0} de la surpression correspondante dans le cas de l'air à 300 K sous 0,1 MPa.

Un élève remarque la faiblesse de la valeur de p_{m0} comparée à la valeur de P_0 et s'étonne qu'un tel signal sonore ne soit pas noyé dans les fluctuations de la pression de repos P_0 et puisse être distingué par l'oreille. Quelle réponse peut-on lui faire ?

C.I.3.d.

Le niveau sonore N (en décibels) correspondant à une intensité I donnée est défini par la relation :

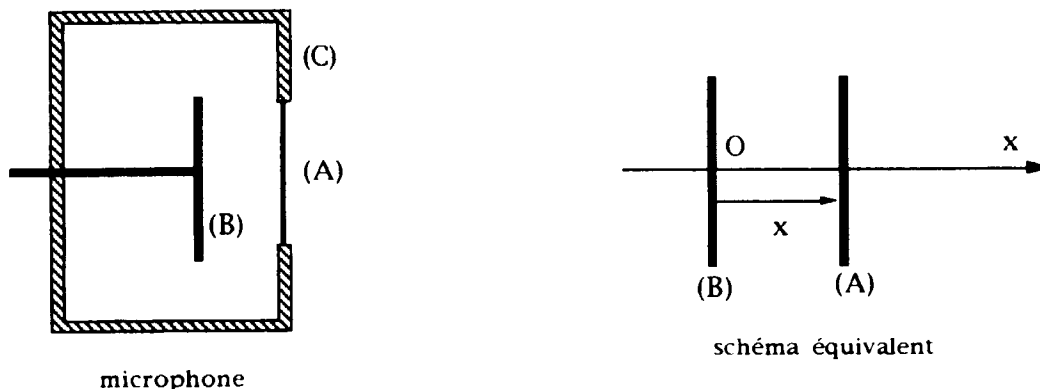
$$N = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où \log désigne le logarithme décimal et I_0 la valeur $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ précédente, prise comme référence.

Le seuil de douleur correspond approximativement à une intensité de 120 dB. Quelle est la valeur correspondante de p_m ? Un récipient contient de l'eau liquide à l'air libre, au repos dans le champ de pesanteur. A quelle profondeur faut-il approximativement s'enfoncer sous la surface libre pour obtenir une surpression hydrostatique égale à p_m (120 dB) ?

C.II. MICROPHONE ELECTROSTATIQUE

La figure ci-dessous représente schématiquement un microphone électrostatique à pression :



Une capsule (C), contenant de l'air, est fermée par une membrane (A) susceptible d'être mise en mouvement par une onde sonore. Cette membrane est métallisée sur sa face intérieure et constitue l'une des armatures d'un condensateur, dont l'autre armature, (B),

est fixe. Des contacts électriques non figurés permettent de relier ce condensateur à un circuit électrique extérieur.

On modélise ce microphone par un condensateur plan, sans effets de bord, dont les armatures sont deux disques coaxiaux de même surface S . Le milieu entre les armatures est de l'air, dont la permittivité diélectrique relative ϵ_r sera prise égale à celle du vide : $\epsilon_r = 1$.

L'armature (B) est fixe. L'armature (A), de masse m , est susceptible de se translater le long de l'axe de symétrie Ox du système. On repère sa position par sa distance x par rapport à l'armature (B) dont le centre est pris comme origine O des abscisses.

C.II.1. MODÉLISATION DES FORCES

Lorsque le microphone est au repos, n'étant soumis à aucune tension électrique ni à aucune surpression, la distance entre les armatures du condensateur équivalent vaut x_e .

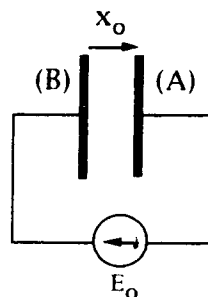
On admet que, lorsque l'armature (A) est déplacée de sa position de repos, elle est soumise à une force de rappel $\vec{F}_r = -K_r(x - x_e)\vec{e}_x$.

On suppose de plus que, lorsque (A) est en mouvement, elle est soumise à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse $\vec{F}_f = -f\frac{dx}{dt}\vec{e}_x$.

Quelles sont les origines physiques des forces prises en compte dans ces deux modélisations ?

C.II.2. ÉTUDE DU CONDENSATEUR À L'ÉQUILIBRE SOUS TENSION

L'armature (A) n'étant soumise à aucune surpression, on charge le condensateur sous une tension E_0 . On observe que les armatures se rapprochent et que la distance entre elles prend la valeur d'équilibre x_0 .



C.II.2.a.

Rappeler l'expression, en fonction de x_0 et S , de la capacité C_0 du condensateur dans cette position.

En déduire la charge q_0 algébrique portée par l'armature (A).

C.II.2.b.

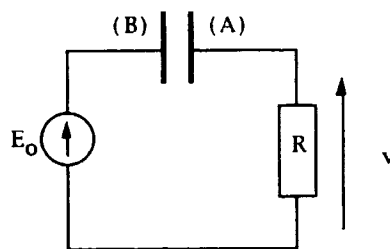
On isole le condensateur une fois chargé. L'armature (B) étant maintenue fixe, un opérateur déplace très lentement l'armature (A) de façon à faire varier x d'une quantité δx élémentaire algébrique.

Exprimer, en fonction de q_0 , S et δx , la variation d'énergie δU du condensateur au cours de cette opération. En déduire le travail δW_{op} de l'opérateur ainsi que la force \vec{F}_{op} qu'il doit exercer sur (A) pour effectuer le déplacement. Montrer que l'armature (A) est soumise de la part de l'armature (B) à une force électrostatique $\vec{F}_0 = F_0 \vec{e}_x$ dont on précisera le sens et dont on donnera l'expression en fonction de q_0 et S .

Cette force est parfois appelée force de "pression électrostatique". Commenter cette expression. Donner l'expression de la pression électrostatique P_{e1} en fonction de la densité surfacique σ de charge de l'armature (A).

C.II.3. ÉTUDE DU CONDENSATEUR EN MOUVEMENT

Le condensateur est inclus dans un circuit en série avec un générateur de tension de force électromotrice E_0 et un résistor de résistance R .



En plus des forces envisagées précédemment, la face externe de l'armature (A) est soumise à une surpression $p_1 = P_1 \cos(\omega t)$, correspondant à une onde sonore au niveau de la membrane de la capsule du microphone.

Pour simplifier, on admet que, bien que la charge des armatures du condensateur varie en fonction de la distance x qui les sépare, la force électrique que (B) exerce sur (A) conserve la valeur statique \vec{F}_0 déterminée en (C.II.2.b.).

C.II.3.a.

Etablir l'équation différentielle satisfaite par x .

On définit l'écart x_1 à la distance d'équilibre x_0 par la relation : $x = x_0 + x_1$. Montrer que x_1 satisfait l'équation différentielle :

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + f \frac{dx_1}{dt} + K_r x_1 = -P_1 S \cos(\omega t)$$

On se place en régime sinusoïdal établi, de pulsation ω . On écrit x_1 sous la forme :

$$x_1 = X_m \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{R}_e \{ \underline{X}_1 \exp(j\omega t) \}$$

où \Re désigne la partie réelle et \underline{X}_1 l'amplitude complexe de x_1 : $\underline{X}_1 = X_m \exp(j\varphi)$.

Exprimer l'amplitude complexe \underline{X}_1 de x_1 en fonction de ω et des caractéristiques du problème.

Pour quelle valeur ω_R de la pulsation de l'onde sonore peut-il y avoir résonance ? Cet effet de résonance vous semble-t-il devoir être recherché ?

Les paramètres du microphone et du montage électrique ont les valeurs suivantes :

$$R = 10^9 \Omega ; E_0 = 50 \text{ v} ; C_0 = 20 \text{ pF} ; K_r = 5 \cdot 10^4 \text{ N.m}^{-1} ; f = 0,4 \text{ kg.s}^{-1} ; m = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg}.$$

Calculer numériquement la fréquence ν_R de résonance et comparer au domaine de fréquences audibles qui s'étend approximativement, on le rappelle, de 20 Hz à 20.000 Hz.

C.II.3.b.

On note q la charge instantanée de l'armature (A) et C la quantité $\frac{\epsilon_0 S}{x}$.

Établir, en fonction de E_0 , R et C , l'équation différentielle satisfaite par q .

On pose $q = q_0 + q_1$, et on considère $\frac{q_1}{q_0}$ et $\frac{x_1}{x_0}$ comme très petits devant l'unité.

Établir, au premier ordre en $\frac{q_1}{q_0}$ et $\frac{x_1}{x_0}$, une relation entre q_1 , $\frac{dq_1}{dt}$ et x_1 .

Montrer alors que la tension v aux bornes de R satisfait la relation différentielle :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC_0} v = - \frac{E_0}{x_0} \frac{dx_1}{dt}$$

En régime sinusoïdal, on pose : $v = \Re\{\underline{V} \exp(j\omega t)\}$.

Exprimer l'amplitude complexe \underline{V} de v en fonction de \underline{X}_1 .

C.II.3.c.

On définit l'efficacité complexe du microphone par $e = \frac{\underline{V}}{P_1}$.

Montrer que e peut se mettre sous la forme :

$$e = A \frac{j \frac{\omega}{\omega_1}}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)}$$

et donner l'expression des paramètres A , ω_1 , ω_2 et Q en fonction de E_0 , R , C_0 , K_r , m , et f . Calculer numériquement ces paramètres.

Montrer que, si ω est comprise dans un domaine que l'on précisera en fonction de R , C_0 , K_r et m , l'efficacité e dépend peu de ω . Ceci constitue-t-il un avantage ou un inconvénient ?

Calculer numériquement les limites du domaine de pulsations précédent et commenter le choix des valeurs de R.

Dans la suite, on considère que ω est compris dans ce domaine de pulsations.

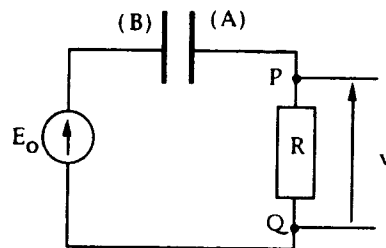
Pour P_1 variant entre 10^{-5} Pa et 10 Pa, entre quelles valeurs le module V_m de \underline{V} est-il compris ?

C.II.4. LIAISON À UN DISPOSITIF ENREGISTREUR

On souhaite appliquer la tension v à un dispositif enregistreur situé à une distance de l'ordre d'une dizaine de mètres.

C.II.4.a.

Calculer, en fonction de C_0 et ω , l'impédance Z_g du générateur de Thévenin équivalent, en régime sinusoïdal de pulsation ω , au circuit précédent entre les bornes P et Q du résistor.

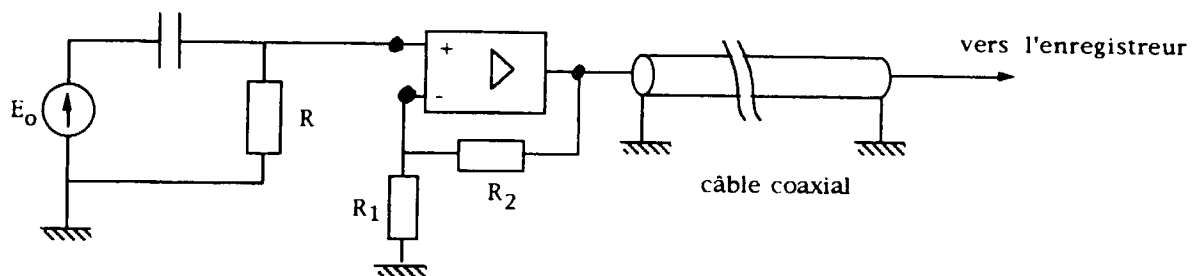


L'impédance d'entrée de l'enregistreur est $Z_e = 50 \Omega$. On utilise pour la liaison un câble coaxial d'impédance caractéristique 50Ω .

Expliquer pourquoi il n'est pas raisonnable de relier directement les bornes du résistor à l'enregistreur par le câble coaxial.

C.II.4.b.

Pour remédier à ce problème, on intercale entre la sortie du microphone et le câble coaxial un amplificateur opérationnel monté comme l'indique la figure :



L'amplificateur opérationnel est supposé parfait.

On adopte pour valeur des résistances $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 90 \text{ k}\Omega$.

Montrer que ce montage présente un double avantage et constitue bien une solution au problème précédent.