

5. Un corrigé de l'épreuve écrite de physique

Partie A

Optique géométrique

1 Considérations générales

- célérité de la lumière : vitesse de propagation d'une onde lumineuse. On note c la vitesse de la lumière dans le vide. C'est une constante physique fondamentale, un invariant relativiste, une vitesse limite, sa valeur est $c = 299792458 \text{ m.s}^{-1}$.
- milieu transparent, homogène et isotrope : un milieu est transparent s'il permet la propagation de la lumière sans atténuation, il est homogène si ses propriétés optiques sont identiques en tout point du milieu, et isotrope si la propagation de la lumière s'effectue de manière identique quelle que soit la direction de propagation.
- indice optique : $n = c/v$, rapport de la célérité de la lumière dans le vide c sur sa célérité dans le milieu v .
- dioptré, réfraction : un dioptré est la surface de séparation entre deux milieux d'indices différents. Lorsqu'une onde lumineuse atteint un dioptré, une partie de l'onde est réfléchiée par le dioptré (réflexion), une autre partie traverse le dioptré (réfraction).
- lentille mince convergente : élément d'optique, en général en verre, dont l'une au moins des faces n'est pas plane, et qui permet de focaliser un faisceau lumineux parallèle. La lentille est dite mince lorsque son épaisseur est petite devant : i) la valeur absolue des rayons de courbure des faces de la lentille ii) la valeur absolue de la différence de ces rayons de courbure.

2 Les lentilles en classe de quatrième au collège

Démarche d'investigation.

- Situations-problèmes :
 - BD Tintin : mettre le feu au bûcher dans "Le Temple du Soleil" ;
 - mélanges de lentilles convergentes et divergentes de focales différentes : les retrouver ;
 - projecteur de diapos (ou autre appareil de projection) en panne : le remplacer par une lentille ;
 - on veut agrandir un objet et en obtenir une image sur un écran.
- Tâches des élèves :
 - lentille face au soleil (par beau temps) ; mettre du papier journal ou un thermomètre au foyer d'une lentille convergente ;
 - mettre une lentille devant une diapo, chercher où mettre lampe et écran
- Connaissances acquises en fin de séance :
 - deux types de lentilles ;
 - lumière concentrée en un point ;
 - image ;
 - une lentille ou un verre de lunette n'agrandit pas forcément.
- Mobilisation ultérieure :
 - Modèle de l'œil ; association de lentilles pour faire un instrument, lunette, microscope, ...

3 Les lentilles minces

1. Construction géométrique de l'image $A'B'$: un rayon lumineux issu du point B et passant par le foyer F sort de la lentille parallèlement à l'axe optique, un rayon venant de $-\infty$, parallèle à l'axe

optique, et passant par le point B sort de la lentille en passant par le foyer F' .

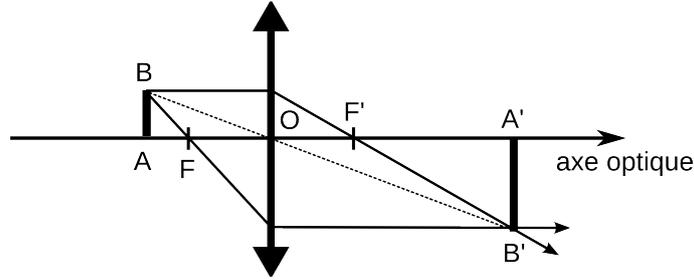


FIGURE 1 – Formation d'une image par une lentille mince.

2. Formule de conjugaison qui lie p , p' et f'

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

Cas particuliers $p = f = -f'$ implique $1/p' = 0$, donc $p' = \infty$, l'image est rejetée à l'infini (objet au foyer objet de la lentille); $p = 2f = -2f'$ implique $p' = 2f'$, l'objet et l'image sont équidistants de la lentille (seule configuration possible); $p' = f'$ implique $1/p = 0$ donc $p = -\infty$, l'image d'un objet à l'infini est au foyer objet de la lentille.

3. Grandissement $\gamma = \overline{A'B'}/\overline{AB} = p'/p$.
4. La formule de conjugaison implique que $p' = pf'/(p+f')$ et donc $D = pf'/(p+f') - p$. La distance p est donc solution de l'équation du second ordre $p^2 + Dp + Df' = 0$, qui admet des solutions réelles ssi $D(D - 4f') \geq 0$, donc D supérieur à $D_m = 4f'$.
5. Méthode d'autocollimation : on place un miroir plan derrière une lentille, on cherche la position du système lentille-miroir pour laquelle les plans objet et image coïncident, ce qui est réalisé lorsque ces plans sont localisés dans le plan focal objet de la lentille. On mesure alors f' , distance qui sépare la lentille de ces plans.

Méthode de Bessel : on fixe la distance D entre l'objet et un écran ($D \geq 4f'$), et on repère les deux positions de la lentille pour lesquelles on obtient une image nette sur l'écran. On mesure la distance d entre ces deux positions. La focale f' vérifie :

$$f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

La méthode de Silbermann est un cas particulier pour lequel $D = 4f'$.

On peut aussi faire l'image sur un écran d'une source lumineuse lointaine (plafonnier) avec la lentille. Dans ce cas on estime que $|p| \gg p'$, et la mesure de la distance entre la lentille et l'écran donne f' .

6. Pour mesurer la distance focale $f' < 0$ d'une lentille divergente, on peut simplement lui accoler une lentille convergente de distance focale f'_c connue, plus petite que $|f'|$, et mesurer la focale f'_{ass} de cet ensemble. La focale f' vérifie alors $1/f' = 1/f'_{ass} - 1/f'_c$.

7. Mesure de la focale d'un objectif de microscope :

– À partir des formules de conjugaison, on montre facilement que :

$$\gamma = \frac{p'}{p} = 1 - \frac{p'}{f'} = 1 + \frac{p'}{f}$$

puisque $f = -f'$. Or $D = p' - p \simeq p'$, puisque $p' \gg p$, et $|D/f| \gg 1$, d'où le résultat. On mesure sur l'écran la distance entre deux traits, ou si possible, la distance séparant les deux traits les plus éloignés de l'image de la mire. On peut calculer γ à partir de cette distance, puisqu'on sait

que deux traits de la mire objet sont séparés de $100 \mu\text{m}$. On mesure ensuite D , et on en déduit f puisque :

$$f \simeq \frac{D}{\gamma}.$$

L'incertitude sur f est liée à celle sur D et γ , de l'ordre de quelques %.

- Les lentilles réelles ont une épaisseur de l'ordre du cm ; dans la méthode de Bessel, d est proche de D , une des images est très grande, l'autre très petite, donc l'incertitude sur f est élevée.

4 Instruments d'optique : association de lentilles

4.1 Généralités

1. Les instruments commerciaux ne peuvent être démontés, ils sont souvent de faible dimension et ne permettent pas une mise en évidence de leur fonctionnement ; les notions d'infini et de caractère virtuel des images sont délicates à mettre en évidence.
2. Les ordres de grandeur ne sont pas respectés : les valeurs de grossissements et de grossissements obtenues ne sont pas réalistes.
3. L'image d'un objet à l'infini est à l'infini.
4. L'objet-source à l'infini ne fatigue pas l'oeil (normal). Non pour le microscope, l'objet-source étant proche de l'instrument et l'image étant à l'infini. Oui pour la lunette.

4.2 Le microscope

1. On modélise souvent un objectif par une lentille simple, bien que ce soit une association de plusieurs lentilles. Un objectif est avant tout conçu pour récupérer le maximum de lumière.
2. f'_1 est de l'ordre de 1 à 50 mm, $f'_2 = 25$ mm est celui d'une loupe.
3. Grossissement du microscope : l'objet AB est vu à l'oeil nu à la distance d_m , donc $\alpha = AB/d_m$. L'image A_1B_1 de AB par la première lentille est en F_2 , foyer objet de la seconde lentille. On a donc $\alpha' = A_1B_1/f'_2$. Sur la figure (2), on voit que $A_1B_1/\Delta = AB/f'_1$, donc

$$G = \frac{\Delta d_m}{f'_1 f'_2}.$$

Pour le microscope précédent, on trouve $G = 530$ avec $f'_1 = 3$ mm et $f'_2 = 25$ mm.

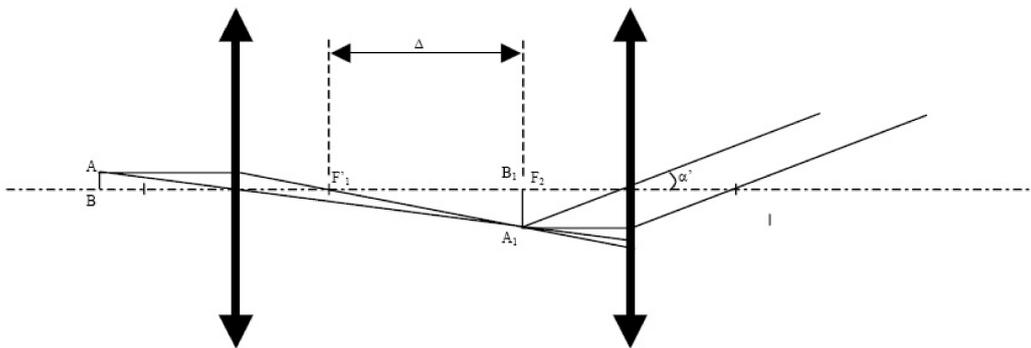


FIGURE 2 – Principe du microscope.

4. Limitations, perfectionnements.

- (a) La diffraction, les aberrations. Grossissement maximal qu'on peut atteindre $\simeq 500$.

- (b) On peut jouer sur la longueur d'onde λ , en la diminuant jusqu'à l'UV. C'est possible mais pas facile : le verre n'étant pas transparent dans l'UV, il faut utiliser des optiques en quartz, très chères. On peut également maximiser n , en mettant l'objet dans un milieu d'indice élevé (jusqu'à $n = 1,5$ typiquement), et maximiser l'angle u , mais $\sin u < 1$. Si on prend $n = 1,5$, $\sin u = 1$ et $\lambda = 300$ nm, on trouve $\delta = 120$ nm, plus grand que $0,1 \mu\text{m}$, mais il est difficile de faire moins.
- (c) La microscopie électronique utilise des électrons pour former des images (dualité onde-corpuscule). La longueur d'onde de De Broglie associée aux électrons peut être beaucoup plus petite que la longueur d'onde optique, il est donc possible de mettre en évidence des détails invisibles en microscopie photonique, de l'ordre de $0,1$ nm. Dans un microscope électronique, l'image n'est pas à l'infini, elle est réelle et enregistrée sur une plaque sensible. Un microscope à effet tunnel est un microscope à champ proche qui utilise un effet quantique, le courant tunnel entre une pointe métallique et un objet conducteur placé très proche de la pointe. L'intensité de ce courant dépendant de la distance entre la pointe et l'objet, on détermine l'aspect de sa surface en balayant la pointe tout en gardant sa distance avec l'objet constante par asservissement de l'intensité du courant tunnel. Un microscope à force atomique est un microscope à sonde locale. L'aspect d'une surface non conductrice est déterminé en mesurant la force exercée par la surface sur un levier de très faibles dimensions (quelques dizaines de μm).

4.3 La lunette astronomique

1. Ordres de grandeur des distances focales : $f'_1 = 50$ cm et $f'_2 = 1$ cm. On cherche à faire une image réelle la plus grande possible dans le plan focal objet de l'oculaire qui joue le rôle de loupe.
2. La taille de l'image intermédiaire est $L = f'_1 \alpha = -f'_2 \alpha'$ (Fig. 3), donc le grossissement est $G = \alpha' / \alpha = -f'_1 / f'_2 = -50$. Le signe indique que l'image est renversée.

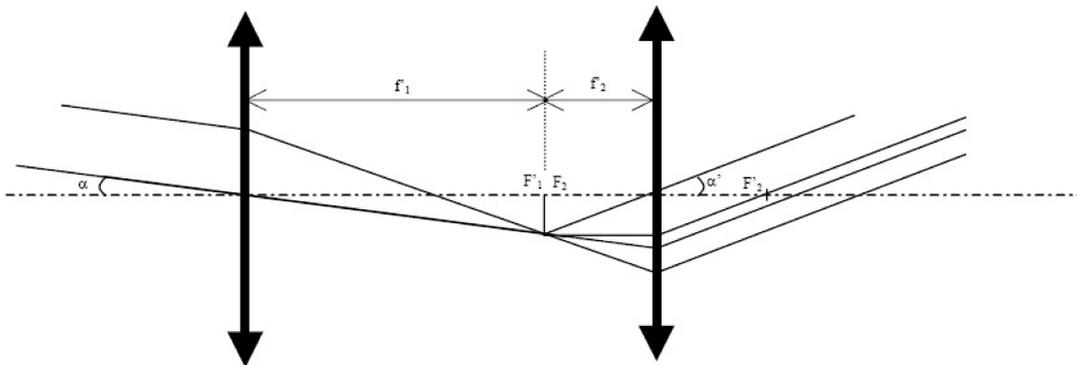


FIGURE 3 – *Lunette astronomique.*

3. Dans la lunette de Galilée, l'image n'est pas renversée (Fig. 4).
4. Dans le télescope, l'objectif est remplacé par un miroir : pas de dispersion chromatique du verre, on sait faire des miroirs plus légers, donc moins de contraintes sur le fût.

4.4 Microscope ou lunette ?

L'araignée est très proche de l'objectif. Son image est donc virtuelle, et très proche de l'objectif. Puisque l'objectif est placé à une distance de l'oculaire grande devant la distance focale de ce dernier, l'image de l'araignée par l'oculaire est une image réelle, très proche de son foyer image F'_2 . Cette image est donc minuscule, et Tintin ne pourrait pas la voir.

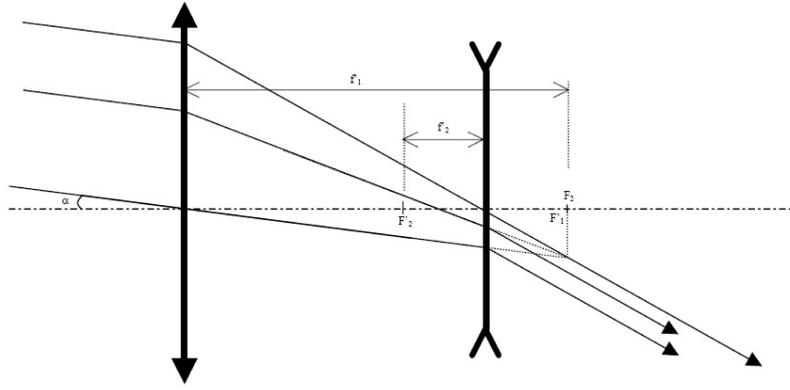


FIGURE 4 – Lunette de Galilée.

4.5 Trajets optiques

1. Temps pour aller de A à B :

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{L_i}{v_i} = \sum_i \frac{n_i L_i}{c} = \frac{C}{c},$$

où c est la célérité de la lumière dans le vide, v_i sa célérité dans le milieu i , et T_i le temps mis par la lumière pour traverser le milieu i . T minimal implique C minimal.

2. Réfraction

(a) Dioptre plan

- $n_1 > n_2$ donc $v_1 < v_2$. Le trajet ANB pour lequel le trajet dans le milieu où la vitesse est plus faible est le bon (Fig. 5). Le temps nécessaire pour parcourir ce chemin est plus court que le celui nécessaire pour parcourir le chemin en pointillés.

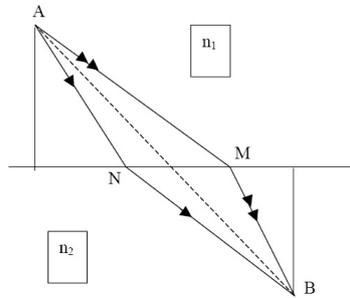


FIGURE 5 – Réfraction.

- On se donne par exemple $n_1 = 1,5$ et $n_2 = 1$. On fixe les abscisses a et b ainsi que h et k (Fig. 6). M est un point courant, qui parcourt une portion de la demi-droite Ox par exemple de $x = a$ à $x = 2b$. On calcule $C = n_1 AM + n_2 BM = n_1 \sqrt{h^2 + (a-x)^2} + n_2 \sqrt{k^2 + (b-x)^2}$. On se donne un pas pour x , par exemple $(b-a)/100$, et on détermine grâce au tableur la position $x = x_m$ pour laquelle C est minimal. On calcule alors :

$$\sin i_1 = \frac{|a - x_m|}{AM} \quad \text{et} \quad \sin i_2 = \frac{|b - x_m|}{BM},$$

puis on vérifie numériquement que $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

- (b) Lentille convergente : un rayon incident parallèle à l'axe optique a un trajet dans le verre plus court. À l'émergence, il est oblique et a un trajet plus long pour arriver au foyer image.

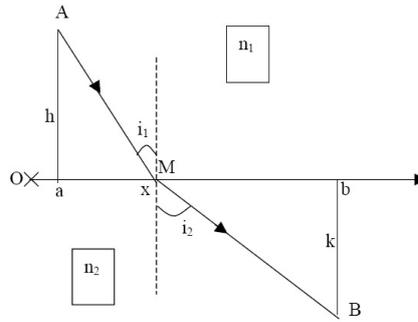


FIGURE 6 – Loi des sinus.

3. Pour la ligne droite, on peut évoquer des arguments de symétrie qui ne sont plus valables pour la réfraction. La lumière explore tous les chemins, mais les contributions des trajets autres que le chemin stationnaire se détruisent.

Partie B

Interaction entre une nanosphère d'or et un champ laser

1 Champ électrique appliqué à la nanosphère

1. \mathbf{k} est le vecteur d'onde, ω la pulsation
2. $\omega = 2\pi c/\lambda$, $|k| = \omega n_m/c$.
3. La longueur d'onde λ est très grande devant la taille a de la nanosphère : à un instant t donné, le champ électrique est uniforme dans et au voisinage de la sphère, et peut être assimilé à sa valeur en \mathbf{r}_0 .

2 Polarisation de la nanosphère dans l'approximation dipolaire

1. Le problème est à symétrie cylindrique autour de l'axe Oz : les potentiels électrostatiques ne dépendent pas de l'angle ϕ .
2. Le champ électrique dans la nanosphère vérifie $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V$ (pas de dérivée temporelle de \mathbf{A} , le problème étant statique). En l'absence de charges libres, on sait que $\text{div}\mathbf{E} = 0$, donc $\text{div}\mathbf{grad}V = 0$ et $\Delta V = 0$. Le raisonnement est identique pour le potentiel V_m .
3. Il faut résoudre l'équation :

$$\mathbf{grad}V_m = -E_0\mathbf{e}_z.$$

Puisque la seule composante du gradient est suivant z , on en déduit que le gradient de V_m ne fait intervenir que la dérivée spatiale suivant z , et donc que :

$$\frac{dV_m}{dz} = -E_0, \quad \text{donc } V_m(z) = -E_0 z + \text{constante}.$$

On peut choisir la constante nulle (l'énoncé suggère un choix), et en remarquant que $z = r \cos \theta$ on obtient le résultat de l'énoncé.

4. À partir de l'expression du Laplacien donné par le formulaire, on établit facilement cette relation.
5. Si $f(r) = r^m$, alors $f'(r) = mr^{m-1}$ et $f''(r) = m(m-1)r^{m-2}$. La relation précédente conduit donc à $m^2 + m - 2 = 0$, qui admet comme solutions $m = 1$ ou $m = -2$.

6. À l'intérieur de la sphère, le potentiel ne diverge pas en $r = 0$, donc $B = 0$. À l'extérieur de la sphère, on doit retrouver le potentiel électrostatique $V_m(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta$ lorsque $r \gg a$, ce qui implique $A = -E_0$.

7. Détermination des constantes A_1 et B_2 .

(a) Le potentiel est continu au passage de l'interface or-gel, on doit donc avoir, pour tout angle θ :

$$A_1 a \cos \theta = \left(\frac{B_2}{a^2} - E_0 a \right) \cos \theta, \quad \text{donc} \quad A_1 a = \frac{B_2}{a^2} - E_0 a.$$

(b) La continuité de la composante normale à l'interface du vecteur \mathbf{D} implique la relation :

$$\epsilon \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_a = \epsilon_m \frac{\partial V_m}{\partial r} \Big|_a, \quad \text{donc} \quad \epsilon A_1 = \epsilon_m \left(-\frac{2B_2}{a^3} - E_0 \right).$$

(c) ces deux équations algébriques à deux inconnues permettent de déterminer les deux constantes, après quelques calculs :

$$A_1 = -E_0 \frac{3\epsilon_m}{\epsilon + 2\epsilon_m} \quad \text{et} \quad B_2 = E_0 a^3 \frac{\epsilon - \epsilon_m}{\epsilon + 2\epsilon_m}.$$

(d) Dans le cas particulier $\epsilon = \epsilon_m$, on trouve $A_1 = -E_0$ et $B_2 = 0$: on retrouve le potentiel associé à un champ électrique statique uniforme dans un milieu continu de susceptibilité relative ϵ .

8. Il suffit de rassembler les résultats précédents.

9. Le potentiel électrostatique V_m est la somme du potentiel associé au champ statique et d'un potentiel crée par un dipôle placé au centre de la sphère, orienté suivant Oz , de moment :

$$\mathbf{p} = E_0 a^3 \frac{\epsilon - \epsilon_m}{\epsilon + 2\epsilon_m} \times 4\pi\epsilon_0\epsilon_m \mathbf{e}_z.$$

En identifiant cette expression avec celle $\mathbf{p} = \epsilon_0\epsilon_m\alpha\mathbf{E}_0$ donnée par l'énoncé, il vient :

$$\alpha = 4\pi a^3 \frac{\epsilon - \epsilon_m}{\epsilon + 2\epsilon_m}.$$

3 Sections efficaces d'extinction, d'absorption et de diffusion

1. Les relations $P = \sigma I_0$ indiquent que σ a la dimension d'une puissance divisée par une intensité, donc une surface.
2. σ_{diff} varie comme $(\omega/c)^4$: on retrouve la diffusion Rayleigh de la lumière par une particule dont la taille est petite devant la longueur d'onde.
3. σ_{diff} varie comme $(\omega/c)^4 V^2$, et σ_{ext} varie comme $(\omega/c)V$, donc le rapport des deux grandeurs varie comme $(\omega/c)^3 V$, donc comme $(a/\lambda)^3$. Puisque $a \ll \lambda$, on en déduit que $\sigma_{\text{diff}} \ll \sigma_{\text{ext}}$. On a donc $\sigma_{\text{ext}} \simeq \sigma_{\text{abs}}$, comme l'énoncé nous l'indique.
4. La section efficace d'extinction est donnée par :

$$\sigma_{\text{ext}} = 4\pi a^3 k \text{Im} \left[\frac{\epsilon_1 + i\epsilon_2 - \epsilon_m}{\epsilon_1 + i\epsilon_2 + 2\epsilon_m} \right].$$

En notant que $k = \sqrt{\epsilon_m}\omega/c$ et $4\pi a^3 = 3V$, où V est le volume de la nanosphère, on trouve :

$$\sigma_{\text{ext}} = 9V \epsilon_m^{3/2} \frac{\omega}{c} \frac{\epsilon_2}{(\epsilon_1 + 2\epsilon_m)^2 + \epsilon_2^2} \simeq \sigma_{\text{abs}}.$$

4 Indice optique de l'or

1. ϵ_1 est négatif.
2. Au dénominateur de σ_{abs} on trouve le terme $(\epsilon_1 + 2\epsilon_m)^2$, toujours positif et qui peut s'annuler lorsque $\epsilon_1 + 2\epsilon_m = 0$. C'est donc au voisinage de $\epsilon_1^p = -2\epsilon_m = -2 \times 1,33^2 = -3,54$ que σ_{abs} sera maximale.
3. Sur le graphe ϵ_1 en fonction de λ , pour $\epsilon_1^p = -3,54$ on peut lire $\lambda = 520$ nm. La longueur d'onde 532 nm est bien choisie. En fait, c'est la longueur d'onde la plus proche de 520nm accessible via un laser bon marché (YAG doublé)
4. Ajustements :
 - (a) Le deuxième terme correspond à l'excitation des électrons de conduction (non liés) de l'or, il s'obtient en considérant un modèle d'électron soumis à un champ oscillant et à un amortissement. Le troisième terme correspond à l'excitation des électrons de la première bande de valence, il s'obtient en considérant un modèle d'électron élastiquement lié avec un terme d'amortissement.
 - (b) Il faudrait prendre en compte tous les électrons de valence, en particulier ceux qui sont plus fortement liés au noyau, en ajoutant des termes supplémentaires à $\epsilon(\omega)$, termes de la forme :

$$\sum_i \frac{\tilde{\omega}_{i,p}^2}{(\omega_{0,i}^2 - \omega^2) - i\omega\gamma_i}.$$

5. La résonance plasmon peut s'interpréter comme une excitation collective des électrons de conduction se déplaçant, à la fréquence d'excitation, par rapport au réseau d'ions positifs fixes. Au voisinage de la résonance, on observe un ralentissement de la dynamique de relaxation de cette oscillation. Ce type de résonance est observée dans les métaux.

Partie C

Profil de température autour d'une nanosphère d'or chauffée

1 Équation de la chaleur

1. Équation de la chaleur dans le milieu.

- (a) La quantité de chaleur δQ_s sortant par conduction du volume d^3V vérifie :

$$\begin{aligned} \delta Q_s/dt &= (\mathbf{j}(x + \frac{dx}{2}, y, z) - \mathbf{j}(x - \frac{dx}{2}, y, z)) \cdot \mathbf{e}_x dy dz \\ &+ (\mathbf{j}(x, y + \frac{dy}{2}, z) - \mathbf{j}(x, y - \frac{dy}{2}, z)) \cdot \mathbf{e}_y dx dz \\ &+ (\mathbf{j}(x, y, z + \frac{dz}{2}) - \mathbf{j}(x, y, z - \frac{dz}{2})) \cdot \mathbf{e}_z dx dy, \end{aligned}$$

que l'on peut développer à l'ordre 1, en notant $j_x = \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_x$ (idem pour les autres composantes) :

$$\delta Q_s/dt = \left. \frac{\partial j_x}{\partial x} \right|_M dx dy dz + \left. \frac{\partial j_y}{\partial y} \right|_M dx dy dz + \left. \frac{\partial j_z}{\partial z} \right|_M dx dy dz = \text{div} \mathbf{j} d^3V.$$

- (b) La loi de Fourier exprime que, en tout point, \mathbf{j} est proportionnel au gradient de température, et dirigé en sens inverse :

$$\mathbf{j} = -\Lambda_m \text{grad} T_m.$$

(c) On en déduit immédiatement que :

$$\delta Q_s/dt = -\Lambda_m d^3V dt \Delta T_m.$$

(d) La variation d'énergie interne s'écrit, en supposant le milieu incompressible :

$$dU_m = C_m dT d^3V.$$

(e) Le premier principe de la thermodynamique nous indique que le bilan énergétique sur le volume d^3V s'écrit :

$$dU_m = -\delta Q_s,$$

avec un signe "−" car δQ_s est la quantité de chaleur *perdue* par le système. L'équation de la chaleur s'obtient alors facilement.

2. L'évolution de la température dans la nanosphère d'or doit prendre en compte la puissance absorbée. Le bilan énergétique dans un volume V de la sphère s'écrit alors :

$$dU = -\delta Q_s + p_{\text{abs}}(t) d^3V dt,$$

la variation d'énergie interne étant due aux échanges à travers la surface et à la création de chaleur au sein du milieu. On trouve facilement l'équation de la chaleur dans l'or à partir de cette relation.

2 Régime permanent dans le cas d'une puissance constante

1. Le problème étant à symétrie sphérique, la température T ne dépend que de la variable r .
 2. En régime permanent, et si la puissance absorbée $p_{\text{abs}} = p_0$ ne dépend pas du temps, les équations de la chaleur s'écrivent :

$$\Delta T_m = 0 \quad \text{et} \quad \Lambda \Delta T + p_0 = 0,$$

soit, avec l'expression du Laplacien donné en début d'énoncé :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(rT_m)}{\partial r^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\Lambda}{r} \frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2} + p_0 = 0.$$

3. Avec les changements de variable proposés, il vient :

$$\frac{\partial^2(u_m)}{\partial r^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2(u)}{\partial r^2} + \frac{p_0}{\Lambda} r = 0.$$

4. L'équation sur u_m admet comme solutions $u_m(r) = \lambda r + \mu$, où λ et μ sont deux constantes, donc :

$$T_m(r) = \lambda + \frac{\mu}{r}.$$

Avec les conditions aux limites $T_m = T_0$ pour $r \gg a$ et $T_m = T(a)$ pour $r = a$, on trouve $\lambda = T_0$ et $\mu = a(T(a) - T_0)$, ce qui permet de trouver l'expression donnée par l'énoncé.

5. L'équation sur u admet comme solutions :

$$u(r) = -\frac{p_0}{6\Lambda} r^3 + \lambda r + \mu,$$

où λ et μ sont deux constantes, donc :

$$T(r) = -\frac{p_0}{6\Lambda} r^2 + \lambda + \frac{\mu}{r}.$$

L'absence de divergence en $r = 0$ impose $\mu = 0$, et $T(r = a) = T(a)$ impose $\lambda = T(a) + p_0 a^2 / (6\Lambda)$, si bien que :

$$T(r) = T(a) + \frac{p_0}{6\Lambda} (a^2 - r^2).$$

6. Le vecteur \mathbf{j} est continu au passage de l'interface or-gel car le flux de chaleur à travers la surface se conserve localement. On calcule facilement :

$$j_r(a^+) = \Lambda_m \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a^+} = -\frac{\Lambda_m}{a} (T(a) - T_0) \quad \text{et} \quad j_r(a^-) = \Lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a^-} = -2a \frac{p_0}{6},$$

soit, en écrivant que ces deux termes sont égaux :

$$T(a) = T_0 + \frac{a^2 p_0}{3\Lambda_m}.$$

7. En notant que $4\pi a^3 p_0/3 = P_0$, on trouve :

$$T(a) = T_0 + \frac{P_0}{4\pi a \Lambda_m}.$$

L'expression de la température dans la sphère en fonction de P_0 est obtenue à partir des résultats précédents :

$$T(r) = T_0 + \frac{P_0}{4\pi a \Lambda_m} \left[1 + \frac{\Lambda_m}{2\Lambda} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) \right].$$

8. L'énoncé nous indique que $\Lambda = 320 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, alors que $\Lambda_m = 0,6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Il en résulte que $\Lambda_m/\Lambda \ll 1$, et donc que dans l'expression de la température dans la sphère, le second terme du crochet est négligeable devant le premier. On en déduit que dans la sphère :

$$T(r) = T(a),$$

autrement dit la température de la nanosphère d'or est homogène et égale à sa température de surface.

3 Chauffage sinusoïdal de la sphère

3.1 Estimation de la température de surface $T(a, t)$:

1. L'équation de la chaleur établie dans l'or, intégrée sur l'ensemble de la sphère, s'écrit :

$$C \frac{d}{dt} \int_0^a dr 4\pi r^2 T(r, t) = \Lambda \int_0^a dr 4\pi r^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r T(r, t)}{\partial r^2} + P_{\text{abs}}(t).$$

Le terme proportionnel à Λ peut s'intégrer par parties, après quelques manipulations on trouve le terme de l'énoncé. On peut également faire directement un bilan sur la sphère, et retrouver ce résultat.

2. Équation différentielle sur $\delta T(a, t)$.

(a) Si la température de la sphère est supposée constante, on peut poser $T(r, t) = T(a, t)$, qui sort donc de l'intégrale, qui devient très simple à calculer ($a^3/3$). Puisque T_0 est une constante, la dérivée temporelle de $\delta T(a, t)$ est égale à la dérivée temporelle de $T(a, t)$, d'où le résultat.

(b) La continuité du flux de chaleur à travers la surface de la sphère implique :

$$j_r(a^-) = \Lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a^-} = \Lambda_m \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a^+} = -\frac{\Lambda_m}{a} (T(a) - T_0),$$

en suivant l'énoncé. On détermine ainsi la dérivée demandée.

(c) Le terme proportionnel à Λ dans l'équation bilan vaut donc $4\pi a \Lambda_m \delta T(a, t)$. Finalement, il vient :

$$\frac{P_{\text{abs}}(t)}{4\pi \Lambda_m a} = \delta T(a, t) + \tau \frac{d}{dt} \delta T(a, t) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{Ca^2}{3\Lambda_m}.$$

3. On calcule $\tau = 0,14 \text{ ns}$.

4. Le terme $\tau d\delta T(a, t)/dt$ est de l'ordre de $\Omega \tau \delta T(a, t)$. Puisque $\Omega/2\pi$ est inférieur à 1 MHz, le terme $\Omega \tau$ est inférieur à $2\pi 10^6 \times 0,15 \cdot 10^{-9} \simeq 10^{-3}$, soit $\Omega \tau \ll 1$. On peut donc négliger le second terme de l'équation différentielle, si bien que $\delta T(a, t)$ vérifie la relation de l'énoncé.

5. On trouve :

$$\overline{\delta T(a)} = \frac{P_0}{4\pi \Lambda_m a} \simeq 5 \text{ K}.$$

3.2 Température $T_m(r, t)$ du gel autour de la sphère :

1. Hors de la sphère, l'équation de la chaleur devient :

$$D_m \Delta T(r, t) - \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = 0,$$

où $D_m = \Lambda_m / C_m$. D_m est un coefficient de diffusion, comme en atteste son unité ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$), également appelé diffusivité thermique.

2. Le changement de variable $u_m = rT_m$ conduit à l'équation suivante :

$$D_m \frac{\partial^2 u_m(r, t)}{\partial r^2} = \frac{\partial u_m(r, t)}{\partial t}.$$

3. L'énoncé propose de vérifier que la solution suivante est solution de l'équation sur u :

$$u_m(r, t) = U \left[1 + \exp\left(-\frac{r-a}{r_{\text{th}}}\right) \cos\left(\Omega t - \frac{r-a}{r_{\text{th}}}\right) \right].$$

On vérifie facilement que c'est le cas à condition de choisir r_{th} sous la forme :

$$r_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2D_m}{\Omega}}.$$

4. La grandeur r_{th} est homogène à une longueur ; elle caractérise la pénétration de l'onde thermique dans le milieu (amortissement exponentiel de l'amplitude de la température). Avec les valeurs données par l'énoncé ($\lambda_m = 0,6 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, $C_m = 4,2 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\Omega / 2\pi = 700 \text{ kHz}$), on calcule $D_m = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $r_{\text{th}} = 250 \text{ nm}$. La longueur de pénétration de l'onde thermique dans le milieu est donc très grande devant le rayon de la nanosphère d'or (10nm).
5. En écrivant que $T_m(a, t) = T(a, t)$ (expression déterminée question 3.1.4.), on trouve :

$$U = \frac{P_0}{4\pi\Lambda_m r},$$

et finalement la température dans le milieu :

$$T_m(r, t) = T_0 + \frac{P_0}{4\pi\Lambda_m r} \left[1 + \exp\left(-\frac{r-a}{r_{\text{th}}}\right) \cos\left(\Omega t - \frac{r-a}{r_{\text{th}}}\right) \right].$$

6. L'élévation de température moyenne dans le milieu contenu dans une sphère de rayon $r_{\text{th}} \gg a$ autour de la nanoparticule s'écrit :

$$\overline{\delta T}_m = \frac{1}{V} \int_0^{r_{\text{th}}} \frac{P_0}{4\pi\Lambda_m r} d^3\mathbf{r},$$

où V est le volume de la sphère, et $d^3\mathbf{r} = 4\pi r^2 dr$, seule la partie indépendante du temps contribuant à la moyenne spatio-temporelle. Il vient :

$$\overline{\delta T}_m = \frac{P_0}{4\pi\Lambda_m} \frac{3}{2r_{\text{th}}} = \frac{3P_0}{8\pi\Lambda_m r_{\text{th}}} = \frac{3a}{2r_{\text{th}}} \overline{\delta T}(a).$$

7. L'élévation de température moyenne dans la sphère est donc égale à l'élévation de la température maximale de sa surface multipliée par le facteur $1,5 a / r_{\text{th}} = 0,06$. Finalement, on a donc $\overline{\delta T}_m \simeq 0,3 \text{ K}$. Ces sphères chauffées peuvent être utilisées comme sonde en milieu cellulaire : dans les conditions de l'énoncé, l'échauffement de la cellule reste modeste, même s'il n'est pas complètement négligeable.

Partie D

Détection d'une nanosphère d'or par microscopie photothermique

1 Évaluation du déphasage $\delta\Phi(t)$ induit par la variation d'indice δn

1. On trouve pour $\overline{\delta n}_{\text{stat}}$ et $\overline{\delta n}_{\Omega}(t)$, en utilisant le formulaire fourni en début d'énoncé :

$$\overline{\delta n}_{\text{stat}} = \frac{3}{2} \frac{\partial n}{\partial T} \frac{P_0}{4\pi\Lambda_m r_{\text{th}}} \quad \text{et} \quad \overline{\delta n}_{\Omega}(t) = \frac{3}{2} \frac{\partial n}{\partial T} \frac{P_0}{4\pi\Lambda_m r_{\text{th}}} \sin(\Omega t).$$

2. En additionnant les deux expressions ci-dessus, on retrouve bien le résultat de l'énoncé.

3. Calcul de $\delta\Phi(t)$ dans l'approximation de "réseau de phase mince".

- (a) La longueur l du trajet du rayon lumineux traversant la sphère de rayon r_{th} à la distance ρ de l'axe est $l = 2\sqrt{r_{\text{th}}^2 - \rho^2}$.

- (b) Pour le rayon lumineux de longueur l , le déphasage induit par la traversée de la sphère est :

$$\delta\Phi(\rho, t) = 2\pi \frac{l(\rho)}{\lambda_s} \overline{\delta n}(t).$$

- (c) L'ensemble des rayons lumineux induisant ce déphasage étant situés sur une couronne de surface $2\pi\rho d\rho$, le déphasage total induit par la sphère est donc :

$$\delta\Phi(t) = \frac{4\pi}{\lambda_s} \overline{\delta n}(t) \frac{\int_0^{r_{\text{th}}} \sqrt{r_{\text{th}}^2 - \rho^2} 2\pi\rho d\rho}{\int_0^{r_{\text{th}}} 2\pi\rho d\rho} = \frac{4\pi}{\lambda_s} \overline{\delta n}(t) \frac{\int_0^{r_{\text{th}}} \sqrt{r_{\text{th}}^2 - \rho^2} \rho d\rho}{\int_0^{r_{\text{th}}} \rho d\rho}.$$

- (d) En utilisant la formulaire donné en début d'énoncé pour calculer l'intégrale, on trouve :

$$\delta\Phi(t) = \frac{2}{3} \frac{4\pi}{\lambda_s} \overline{\delta n}(t) r_{\text{th}}.$$

Il suffit alors de remplacer $\overline{\delta n}(t)$ par son expression pour trouver :

$$\delta\Phi(t) = \delta\Phi_0 (1 + \sin \Omega t), \quad \text{avec} \quad \delta\Phi_0 = \frac{P_0}{\lambda_s \Lambda_m} \frac{\partial n}{\partial T}.$$

- (e) Pour $P_0 = 300$ nW, $\lambda_s = 633$ nm, $\Lambda_m = 0,6$ W.m⁻¹.K⁻¹ et $\partial n/\partial T = 10^{-4}$ K⁻¹, on trouve $\delta\Phi_0 = 8 \cdot 10^{-5}$ rad. Ce déphasage très faible justifie l'approximation de réseau de phase mince pour ce calcul.

2 Mesure du déphasage $\delta\Phi(t)$ induit par la nanosphère

1. Intensité lumineuse I_s de la partie du faisceau sonde réfléchi par le cube. vers le détecteur vérifie : $I_s = I_0 |\epsilon_f \cdot \epsilon_{\perp}|^2$, où I_0 est l'intensité du faisceau sonde avant le cube, et ϵ_{\perp} est un vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur ϵ_i .

- (a) Le cube polariseur bloque la composante du champ électrique suivant ϵ_i , et réfléchit la composante du champ électrique suivant ϵ_{\perp} . Cette composante est simplement le produit scalaire du champ électrique avec ϵ_{\perp} . L'intensité étant proportionnelle au carré ($E \cdot E^*$) du champ électrique, on obtient l'expression de l'énoncé.

- (b) Le vecteur ϵ_{\perp} doit être unitaire, et perpendiculaire au vecteur ϵ_i . Un choix possible est :

$$\epsilon_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y).$$

(c) Le produit scalaire entre ϵ_f et ϵ_\perp donne :

$$\epsilon_f \cdot \epsilon_\perp = \frac{1}{2} \left(1 - e^{2i\delta\Phi(t)} \right),$$

qu'on multiplie par son complexe conjugué. On obtient alors : $I_s = I_0 \sin^2(\delta\Phi(t)) \simeq I_0 |\delta\Phi(t)|^2$, en utilisant la formule trigonométrique $2 \sin^2(\delta\Phi(t)) = 1 - \cos(2(\delta\Phi(t)))$.

2. Détection synchrone

- (a) Un module de détection synchrone multiplie un signal sinusoïdal par une fonction sinusoïdale en accord de phase avec le signal. En moyennant temporellement le signal obtenu, on obtient un signal dont l'amplitude est proportionnelle à celle du signal initial. On maximise le signal en sortie du module en réglant le déphasage entre le signal et la fonction par laquelle on le multiplie.
- (b) Le signal délivré par le détecteur $U(t)$ peut être écrit sous la forme :

$$U(t) = U_0 |\delta\Phi(t)|^2 = U_0 \delta\Phi_0^2 (1 + 2 \sin(\Omega t) + \sin^2(\Omega t)),$$

où U_0 dépend des caractéristiques du détecteur. En multipliant ce signal par $\sin(\Omega t)$, et en moyennant temporellement, on obtient un signal proportionnel à $\delta\Phi_0^2$.