

***Solution proposée par Dominique Obert.***

Partie A : Mesure d'une force de Laplace

1. Création d'un champ magnétique radial.

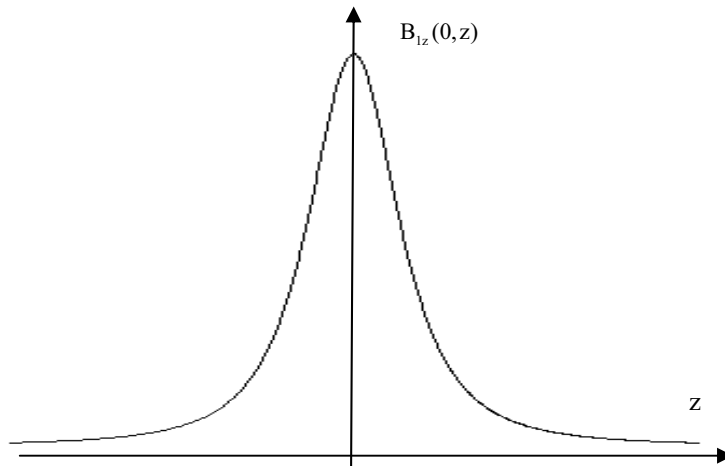
1.1.

a.

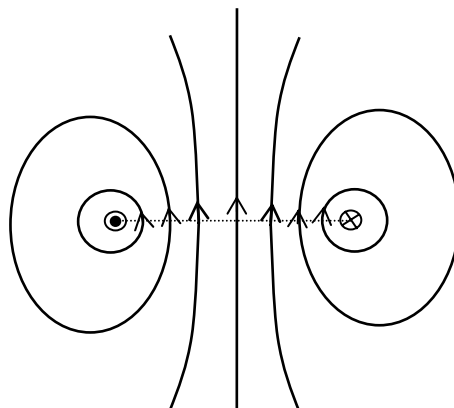
- Le plan contenant le point M et l'axe Az est un plan d'antisymétrie pour la distribution des courants, le champ magnétique  $\vec{B}_1(M)$  appartient à ce plan et n'a donc que des composantes suivant  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_z$ .
- On invoque ensuite l'invariance par rotation autour de l'axe Az pour justifier l'expression finale  $\vec{B}_1(M) = B_{1r}(r,z)\vec{e}_r + B_{1z}(r,z)\vec{e}_z$ .

- b. Si M appartient à l'axe Az, tout plan contenant cet axe est un plan d'antisymétrie pour la distribution des courants donc  $\vec{B}_1(M)$  est à l'intersection de tous ces plans et est colinéaire au vecteur  $\vec{e}_z$ .

- c. Champ sur l'axe :  $I_1 > 0$  donc  $B_{1z}(0,z) > 0$



- d. Allure des lignes de champ magnétique :



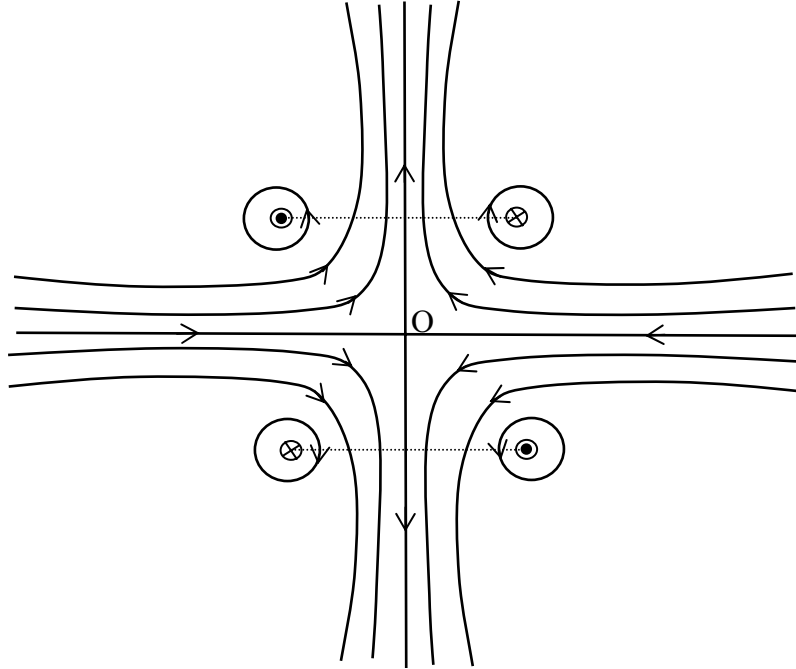
1.2.

a.

- Le plan contenant le point M et l'axe Oz est un plan d'antisymétrie pour la distribution des courants, et il y a invariance par rotation autour de l'axe Az : donc  $\vec{B}_0(M) = B_{0r}(r,z)\vec{e}_r + B_{0z}(r,z)\vec{e}_z$ .

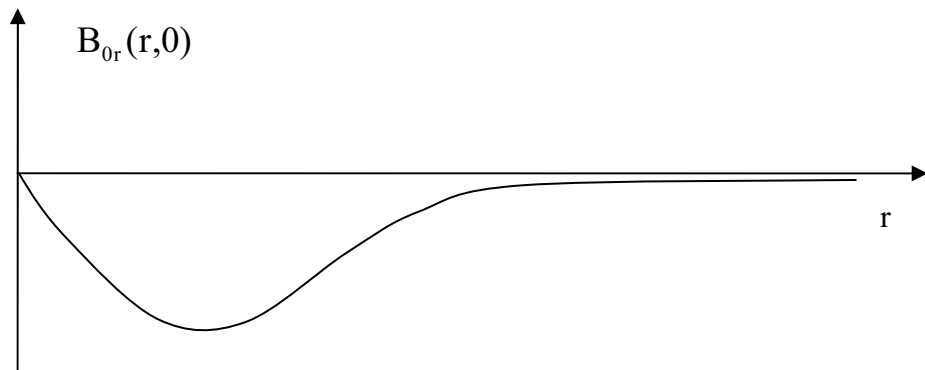
- Tout plan contenant l'axe Oz ainsi que le plan orthogonal en O à l'axe Oz sont des plans d'antisymétries pour la distribution des courants, ainsi  $\vec{B}_0(O) = \vec{0}$  car il doit appartenir à l'intersection de tous ces plans.
- b. Soit M un point de  $(Q_m)$ ,  $(Q_m)$  est un plan d'antisymétrie pour la distribution des courants, donc  $\vec{B}_0(M)$  n'a pas de composante suivant  $\vec{e}_z$  et en utilisant l'analyse conduite en 1.2.a., on justifie que le champ  $\vec{B}_0$  est « radial » :  $\vec{B}_0(M) = B_{0r}(r,0)\vec{e}_r$  en un point du plan  $(Q_m)$ .

c.

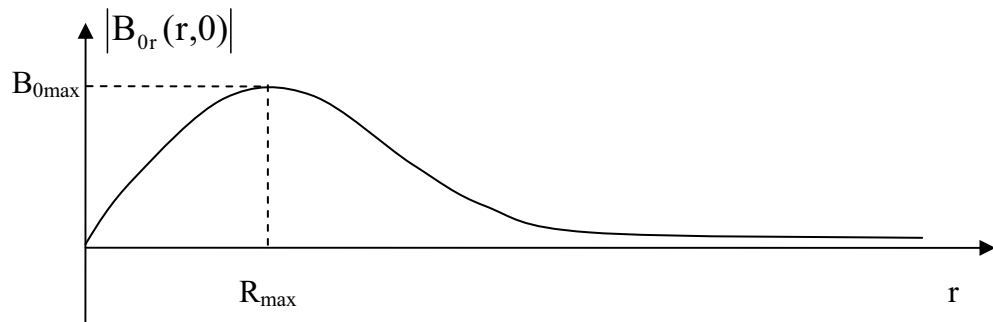


d. Champ dans le plan  $(Q_m)$

- On note que  $B_{0r}(r,0)$  est négatif, qu'il est nul à l'origine et tend vers zéro pour r grand. On peut donc pronostiquer l'allure suivante :



- Pour « visualiser »  $B_{0max}$  et  $R_{max}$ , on représente le module de  $B_{0r}(r,0)$  en fonction de r :



## 2. Force de Laplace.

### 2.1.

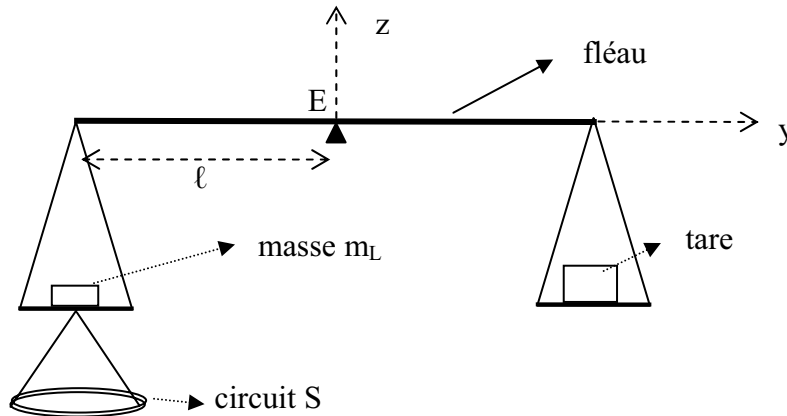
a. La force de Laplace élémentaire s'écrit :  $d\vec{F}_L = I d\vec{OP} \wedge \vec{B}_0(P)$ .

b.  $\vec{F}_L = \int_S I d\vec{OP} \wedge \vec{B}_0(P) = -2\pi R I B_{0r}(R,0) \vec{e}_z$

c. La force de la place est dirigée vers le haut.

### 2.2.

a. Schéma de principe du dispositif expérimental :



b. On traduit l'équilibre de la balance lorsque l'action de la masse additionnelle  $m_L$  compense exactement le moment des forces de Laplace par rapport à l'axe  $E_x$ . On a alors :

$$m_L g l + 2\pi R I B_{0r}(R,0) l = 0 \text{ soit l'équation [1] : } m_L = -\frac{2\pi R I B_{0r}(R,0)}{g}$$

c. *Application numérique* :  $m_L = 0,50 \text{ kg}$ .

### 2.3.

a.  $\vec{F}_L = \int_S I d\vec{OP} \wedge \vec{B}_0(P)$ .

b. On traduit une nouvelle fois l'équilibre de la balance en supposant que le point d'application de la force de Laplace est à la verticale du centre de masse de la masse  $m_L$  et que seules les actions verticales ont une influence, les autres étant parfaitement compensées. On obtient alors l'équation

$$[1'] : m_L = \frac{\int_S (I d\vec{OP} \wedge \vec{B}_0(P)) \cdot \vec{e}_z}{g}$$

### 2.4.

a. Il y a effet Joule, échauffement du fil et donc dilatation de l'ensemble, ce qui peut contribuer à augmenter la valeur du rayon  $R$ .

b.  $dF_{Lz} = F_{Lz}(R + dR) - F_{Lz}(R) = -2\pi(R + dR)I B_{0r}(R + dR,0) + 2\pi R I B_{0r}(R,0)$ , on fait un développement limité de cette différence et il vient :

$$dF_{Lz} = -2\pi I \left( B_{0r}(R,0) + R \frac{\partial B_{0r}}{\partial r}(R,0) \right) dR$$

c. Le champ magnétique est à flux conservatif, ce qui signifie que son flux à travers une surface fermée et orientée est nulle ; on peut traduire cela par l'équation locale :  $\text{div}(\vec{B}) = 0$ .

d.

- $\text{div}(\vec{B}_0) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_{0r})}{\partial r} + \frac{\partial B_{0z}}{\partial z} = 0$  ; au voisinage  $z=0$  et  $r=R$  cette relation s'écrit  

$$\frac{1}{R} \left( B_{0r}(R,0) + R \frac{\partial B_{0r}}{\partial r}(R,0) \right) + \frac{\partial B_{0z}}{\partial z}(R,0) = 0$$
 donc : 
$$\frac{dF_{Lz}}{dR} = 2\pi I \frac{\partial B_{0z}}{\partial z}(R,0) R$$
.
- En divisant par l'expression de  $F_{Lz}$  on établit : 
$$\frac{1}{F_{Lz}} \frac{dF_{Lz}}{dR} = - \frac{1}{B_{0r}(R,0)} \frac{\partial B_{0z}}{\partial z}(R,0)$$
.

e.

- Si on observe la cartographie du champ magnétique au voisinage d'un point M du plan ( $Q_m$ ) situé au voisinage du point O, on note que la composante suivant z du champ magnétique est d'abord négative puis positive lorsque z passe d'une valeur négative à une valeur positive. On peut donc justifier ainsi que  $\frac{\partial B_{0z}}{\partial z} > 0$  et d'après la question précédente :  $\frac{dF_{Lz}}{dR} > 0$ . La situation est inversée pour un point M du plan ( $Q_m$ ) situé loin des deux spires, les conclusions sont alors opposées.
- Il y a donc modification de la position d'état d'équilibre, il est donc préférable de limiter l'effet Joule et d'attendre la stabilisation du système en température. On peut également penser qu'il existe un rayon optimal qui minimise les variations relatives de la force avec le rayon.
- En  $R = R_{\max}$ ,  $\frac{\partial B_{0r}}{\partial r}(R_{\max},0) = 0$  et  $B_{0r}(R_{\max},0) = B_{\max}$ , donc 
$$\frac{1}{F_{Lz}} \frac{dF_{Lz}}{dR} = \frac{1}{R_{\max}}$$

## Partie B : Mesure d'une force électromotrice d'induction

### 1. Mouvements dans un champ magnétique uniforme et stationnaire.

#### 1.1. Particule :

a. 
$$\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}_u$$
.

- b. On peut prendre le cas d'un proton de vitesse initiale de  $100 \text{ m.s}^{-1}$  placé dans un champ magnétique de 1 T. Le rapport  $\frac{m_q g}{qvB_u} \approx 10^{-9}$ , l'action de pesanteur est donc bien négligeable. On peut aussi examiner celui d'un électron.

- c. On multiplie scalairement la relation fondamentale de la dynamique  $m_q \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_u$  par le vecteur vitesse, il vient  $m_q \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = 0$ , soit  $\frac{m_q v^2}{2} = C^{\text{ste}}$ . La norme de la vitesse est donc bien constante. Ceci traduit le fait que le travail de la force  $\vec{F}_B$  est nul donc que l'énergie cinétique est constante.

- d. On multiplie scalairement la relation fondamentale de la dynamique  $m_q \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_u$  par le vecteur unitaire  $\vec{e}_x$ , il vient  $m_q \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_x = 0$ , car le champ magnétique est colinéaire à  $\vec{e}_x$ ; la composante suivant x de la vitesse est constante, étant nulle initialement elle reste nulle. Le mouvement se fait bien dans le plan d'équation  $x=0$  orthogonal à  $\vec{B}_u = B_u \vec{e}_x$ .

- e. On peut projeter l'équation  $m_q \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_u$  suivant y et z, on établit le système :  

$$m_q \frac{dv_y}{dt} = qB_u v_z \text{ et } m_q \frac{dv_z}{dt} = -qB_u v_y$$
. On pose par exemple  $\underline{u} = v_y + iv_z$ , cette grandeur vérifie l'équation différentielle :  $\frac{d\underline{u}}{dt} = -i\omega \underline{u}$  avec  $\omega = \frac{qB_u}{m_q}$ , qui donne  $\underline{u} = iv_0 e^{-i\omega t}$  et par

intégration :  $y + iz = \frac{V_0}{\omega} (1 - e^{-i\omega t})$ . L'équation paramétrique de la trajectoire s'écrit :

$$y = \frac{V_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \text{ et } z = \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t). \text{ Le rayon du cercle vaut : } \boxed{R_u = \left| \frac{m_q V_0}{q B_u} \right|}$$

### 1.2. Barre rigide :

a. En régime transitoire et sous l'action du champ magnétique, les porteurs de charges (ici des électrons) se déplacent pour se « concentrer » au voisinage de Q', un déficit de charges négatives apparaît au voisinage de Q, il y a donc apparition d'un champ électrique qui va compenser en régime stationnaire l'action de la force magnétique.

b. La f.é.m. induite dans ce circuit vaut  $e = \int_{QQ'} (\vec{v} \wedge \vec{B}_u) dy \vec{e}_y$ . Le circuit étant ouvert, la différence

de potentiel  $V_H = V(Q) - V(Q') = -e$ , ce qui donne  $\boxed{V_H = -2\ell v_0 B_u}$ . Cette différence de potentiel est positive car les électrons se sont accumulés au point Q' conformément à l'analyse qualitative de la question précédente.

## 2. Force électromotrice.

### 2.1.

a. On a un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, il est le siège d'un phénomène d'induction, le circuit étant ouvert, cela se manifeste par l'apparition d'une différence de potentiel entre les bornes A<sub>1</sub> et A<sub>2</sub>.

b.  $U_S = V(A_1) - V(A_2) = - \int_{A_1 A_2} (\vec{v} \wedge \vec{B}_0(P)) \cdot d\vec{OP} = - \int_0^{2\pi} (v_0 \vec{e}_z \wedge B_{0r}(R,0) \vec{e}_r) R d\theta \vec{e}_\theta$ . Ce qui

donne :  $\boxed{U_S = -2\pi R B_{0r}(R,0) v_0}$  [2]

c. Application numérique :  $|U_S| = 6,79 \text{ mV}$ .

2.2. On a simplement l'équation [2'] suivante :  $\boxed{U_S = - \int_S (v_0 \vec{e}_z \wedge \vec{B}_0(P)) \cdot d\vec{OP}}$

### 2.3.

a. On utilise [2] et on établit que :  $\boxed{dU_S = -2\pi v_0 \left( B_{0r}(R,0) + R \frac{\partial B_{0r}}{\partial r}(R,0) \right) dR}$  comme pour

la question 2.4.b. de la partie A.

b.

- On utilise à nouveau le caractère conservatif du flux du champ magnétique pour établir que

$$\boxed{\frac{1}{U_S} \frac{dU_S}{dR} = - \frac{1}{B_{0r}(R,0)} \frac{\partial B_{0z}}{\partial z}(R,0)}$$

- On note que les variations relatives de la force et de la tension sont identiques.

Partie C : Mesure de la constante de Planck

1.

1.1. D'après l'équation [1] :  $m_L = -\frac{2\pi R I B_{0r}(R,0)}{g}$  et l'équation [2]  $U_S = -2\pi R B_{0r}(R,0)v_0$ , on

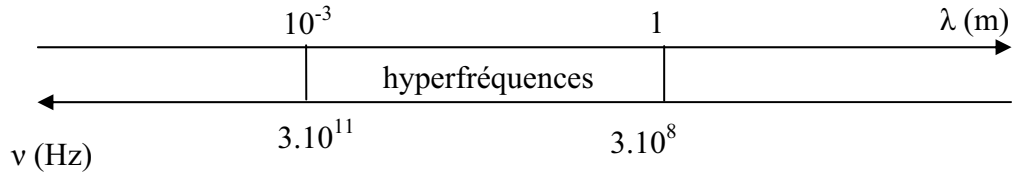
établit, en éliminant  $2\pi R B_{0r}(R,0)$  entre ces deux équations, que  $|U_S I| = |m_L g v_0|$  [3].

1.2.

- $m_L$  : [M] ;  $v_0$  : [L][T]<sup>-1</sup> ;  $g$  : [L][T]<sup>-2</sup> : domaine de la mécanique
- $I$  : [I] ;  $U_S$  : [L]<sup>2</sup>[M][T]<sup>-3</sup>[I]<sup>-1</sup> : domaine de l'électricité.
- Les deux membres de l'égalité sont homogènes à une puissance, l'une formée par des grandeurs mécaniques l'autre par des grandeurs électriques.

2.

2.1. Le domaine « des hyperfréquences » :



2.2.  $U_S$  est un multiple de  $\frac{h}{2e}v_{hf}$  soit :  $U_S = n \frac{h}{2e}v_{hf}$  où  $n$  est un entier. L'intensité du courant  $I$  peut

être déterminée en faisant le rapport d'une tension  $n' \frac{h}{2e}v'_{hf}$  où  $n'$  est un entier par une résistance

$\frac{h}{ie^2}$  où  $i$  est un entier. La relation [3] conduit à :  $\frac{nn'iv_{hf}v'_{hf}}{4}h = |m_L g v_0|$ , soit à  $h = \frac{|m_L g v_0|}{K v_{hf} v'_{hf}}$

avec  $K = \frac{nn'i}{4}$ .

2.3. Masse :  $\frac{\Delta m}{m} \approx 10^{-9}$  ; fréquence :  $\frac{\Delta f}{f} \approx 10^{-15}$  ; vitesse :  $\frac{\Delta v}{v} \approx 10^{-9}$  ; accélération :  $\frac{\Delta a}{a} \approx 10^{-9}$ .

3. Généralisation à un circuit  $S$  rigide, de forme géométrique quelconque.

D'après les équations [1'] :  $m_L = \frac{\int (\text{Id}\vec{OP} \wedge \vec{B}_0(P)) \cdot \vec{e}_z}{g}$  et [2'] :  $U_S = -\int_S (v_0 \vec{e}_z \wedge \vec{B}_0(P)) \cdot d\vec{OP}$  on déduit

que  $m_L = \frac{I}{g} \int_S (d\vec{OP} \wedge \vec{B}_0(P)) \cdot \vec{e}_z$  et  $U_S = v_0 \int_S (d\vec{OP} \wedge \vec{B}_0(P)) \cdot \vec{e}_z$  en permutant le produit mixte. On

retrouve bien la relation [3]  $|U_S I| = |m_L g v_0|$ .

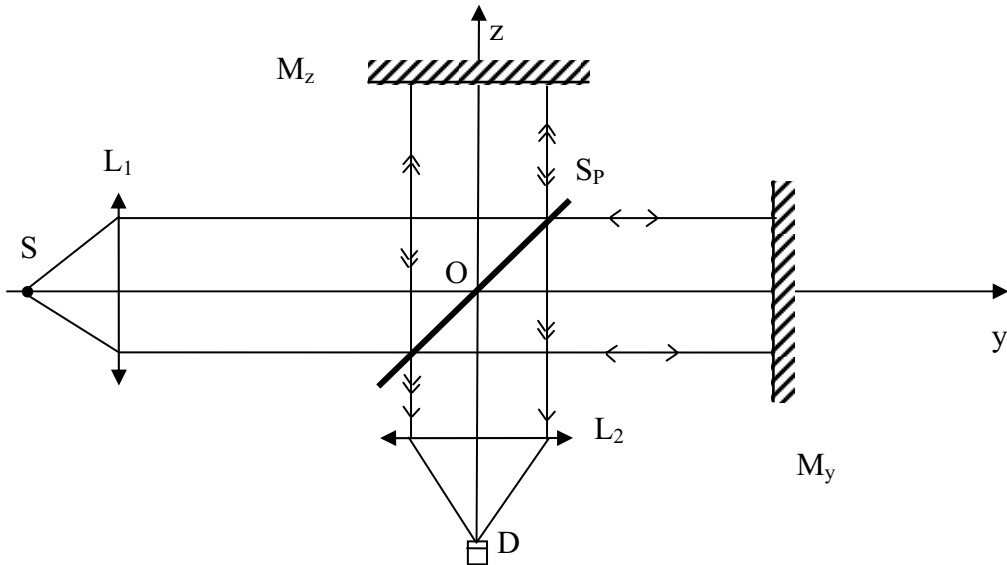
Partie E : Mesure d'un déplacement

1.

1.1.

a. 
$$v_0 = \frac{c_0}{\lambda_0}$$

b.



c. En D on a deux ondes cohérentes et déphasées, elles peuvent donc conduire à l'observation d'un phénomène d'interférence par division d'amplitude.

d.  $\delta = d_z - d_y = 2X = 2(z - y)$ .

e. 
$$p = \frac{2X}{\lambda_0}$$
. Le déphasage  $\phi$  en D entre ces deux ondes vaut 
$$\phi = \frac{4\pi X}{\lambda_0}$$
.

1.2. Allure de l'interférogramme.

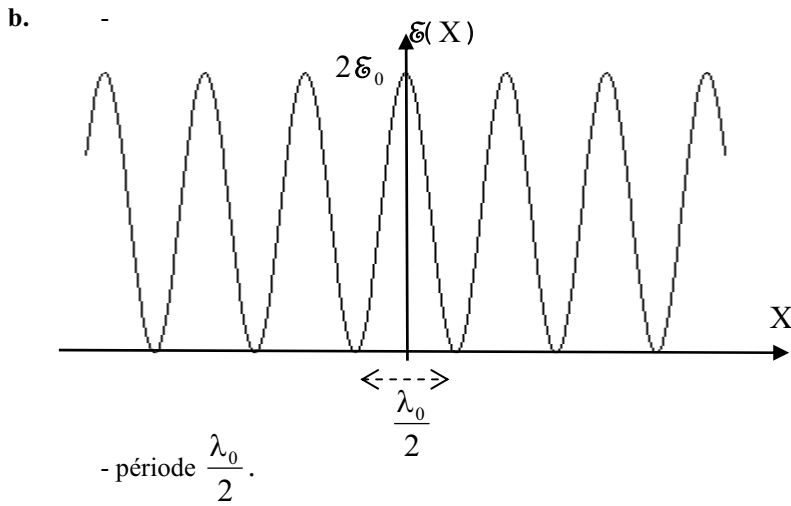
a. L'éclairement en D vaut : 
$$\mathfrak{E} = k \left\langle \left( A_y \cos \left( 2\pi\nu_0 t - \frac{2\pi}{\lambda_0} d_y \right) + A_z \cos \left( 2\pi\nu_0 t - \frac{2\pi}{\lambda_0} d_z \right) \right)^2 \right\rangle_t$$

où k est une constante de proportionnalité. Sachant que,

$$\left\langle \left( A_y \cos \left( 2\pi\nu_0 t - \frac{2\pi}{\lambda_0} d_y \right) \right)^2 \right\rangle_t = \left\langle \left( A_z \cos \left( 2\pi\nu_0 t - \frac{2\pi}{\lambda_0} d_z \right) \right)^2 \right\rangle_t = \frac{A_y^2}{2} \text{ et que}$$

$$\left\langle A_y \cos \left( 2\pi\nu_0 t - \frac{2\pi}{\lambda_0} d_y \right) \cdot A_z \cos \left( 2\pi\nu_0 t - \frac{2\pi}{\lambda_0} d_z \right) \right\rangle_t = \frac{A_y^2}{2} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} (d_z - d_y) \right) \text{ car}$$

$A_y = A_z$ , on obtient bien 
$$\mathfrak{E}(X) = \mathfrak{E}_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi X}{\lambda_0} \right) \right)$$
 avec  $\mathfrak{E}_0 = kA_y^2$ .

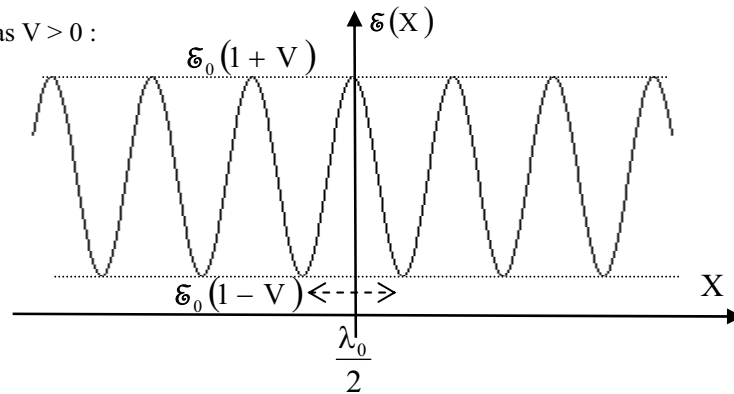


1.3.

a. Le même calcul conduit à :  $I(X) = I_0 \left( 1 + V \cos\left(\frac{4\pi X}{\lambda_0}\right) \right)$ , avec  $V = \frac{2A_y A_z}{A_y^2 + A_z^2}$  et

$$I_0 = k \frac{A_y^2 + A_z^2}{2}. \text{ On a bien } |V| < 1.$$

b. Dans le cas  $V > 0$  :



c.

$$V = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \approx 1 - 2\alpha^2.$$

- L'influence est du second ordre donc négligeable a priori.

d. Cet effet ne peut pas avoir pour origine une différence entre les facteurs R et T car chaque rayon arrivant en D subit une réflexion et une transmission sur la lame semi-réfléchissante  $S_p$ .

## 2. Mesure d'un déplacement.

### 2.1. Comptage des franges :

a.  $\Delta \ell = \frac{\lambda_0}{2} \Delta p$ , si on effectue un simple comptage de franges alors on peut avoir une estimation de

$$\Delta \ell \text{ par la relation : } \Delta \ell = \frac{\lambda_0}{2} P_E(\Delta p).$$

b. Application numérique :  $\Delta \ell = 9,9999 \text{ mm}$  avec une précision de  $\pm 0,0003 \text{ mm}$ .



c.

- Par un simple comptage, on peut estimer que  $\Delta\ell$  est connu à  $\frac{\lambda_0}{2}$  près.

- Application numérique :  $3.10^{-4}$  mm

2.2. Excédent fractionnaire :

a.

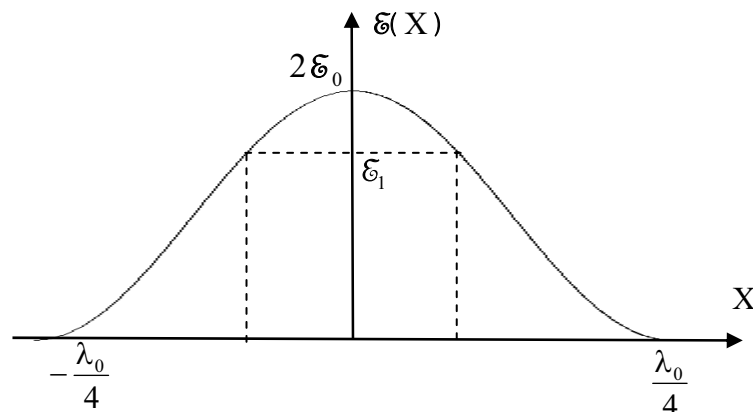
-  $X_1 - X_0 = \Delta p \frac{\lambda_0}{2}$  et  $\Delta p = P_E[\Delta p] + e_p$  donc  $\tilde{X}_1 = (e_p - \frac{1}{2}) \frac{\lambda_0}{2}$  ce qui donne bien

$$e_p = \frac{2\tilde{X}_1}{\lambda_0} + \frac{1}{2}$$

- Comme  $e_p$  est compris entre 0 et 1,  $\tilde{X}_1 \in \left[ -\frac{\lambda_0}{4}, \frac{\lambda_0}{4} \right]$ .

b.

-



Il y a donc bien deux solutions pour un éclairement donné dans l'intervalle considéré. Compte tenu de la translation effectuée, il suffit de connaître le signe de la variation de  $\epsilon(X)$  avec  $X$  au voisinage de la position  $X_1$  pour déterminer la solution à choisir.

- Si  $\tilde{X}_1 > 0$ ,  $\tilde{X}_1 = \frac{\lambda_0}{4\pi} \arccos\left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_0}\right)$

-  $e_p = \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_0}\right) + \frac{1}{2}$

c. Application numérique :  $\Delta\ell = 10,000047$  mm avec une précision de  $\pm 0,000003$  mm.

2.3. Résolution :

a.

-  $d\epsilon = -\epsilon_0 \frac{4\pi}{\lambda_0} \sin\left(\frac{4\pi X}{\lambda_0}\right) dX$

-  $d\epsilon = -\epsilon_0 \frac{4\pi}{\lambda_0} \sqrt{1 - \left(\cos\left(\frac{4\pi X}{\lambda_0}\right)\right)^2} dX$  car on sait que  $X$  appartient à  $\left[0, \frac{\lambda_0}{4}\right]$ . Sachant

que  $\cos\left(\frac{4\pi X}{\lambda_0}\right) = \frac{\epsilon(X) - \epsilon_0}{\epsilon_0}$ , on obtient  $d\epsilon = -\frac{4\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon(X)(2\epsilon_0 - \epsilon(X))} dX$ .

b. On utilise la relation  $e_p = \frac{2\tilde{X}_1}{\lambda_0} + \frac{1}{2}$  que l'on différentie on obtient  $de_p = \frac{2d\tilde{X}_1}{\lambda_0}$  et on établit que

$$\Delta e_p^{\min} \approx \frac{\Delta\epsilon_{\min}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\epsilon(X)(2\epsilon_0 - \epsilon(X))}}$$

en supposant que le dénominateur ne s'annule pas.

c.

- L'expression ci-dessus ne peut pas être utilisée pour  $X = 0$  ou bien  $X = \frac{\lambda_0}{4}$  ;  $e_p = 1/2$  ou voisin de 1.
- On a alors un éclaircissement maximum ou bien nul.
- Au voisinage de 0 par exemple, il faut effectuer un développement limité au second ordre :

$$\cos\left(\frac{4\pi X}{\lambda_0}\right) = \frac{\mathfrak{E}(X) - \mathfrak{E}_0}{\mathfrak{E}_0} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi X}{\lambda_0}\right)^2, \text{ on en déduit que } \Delta X_{\min} \approx \frac{\lambda_0}{4\pi} \sqrt{\frac{2\Delta\mathfrak{E}_{\min}}{\mathfrak{E}_0}} \text{ car}$$

$2\mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}(X) = \Delta\mathfrak{E}_{\min}$  à la limite de la détection. On utilise à nouveau  $de_p = \frac{2d\tilde{X}_1}{\lambda_0}$  et on

établit la relation demandée : 
$$\Delta e_p^{\min} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\Delta\mathfrak{E}_{\min}}{\mathfrak{E}_0}}.$$

d. Application numérique :

- $\Delta e_p^{\min} = 0,01$ .
- Il est bien légitime d'afficher deux chiffres significatifs pour l'excédent fractionnaire  $e_p$ .

3. Sigmatmètre,

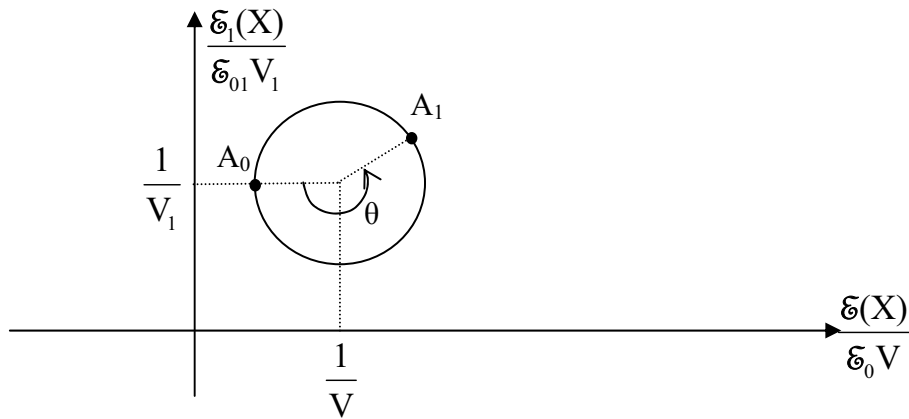
3.1. On peut éliminer le paramètre  $X$  et former l'équation suivante :

$$\left(\frac{\mathfrak{E}(X) - \mathfrak{E}_0}{\mathfrak{E}_0 V}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{E}_1(X) - \mathfrak{E}_{01}}{\mathfrak{E}_{01} V_1}\right)^2 = 1, \text{ on reconnaît ici l'équation d'un cercle de rayon unité et de}$$

centre  $\left(\frac{1}{V}, \frac{1}{V_1}\right)$ .

3.2. Pour  $X = X_0$ , on a un minimum d'éclaircissement comme le précise le texte, on part donc du point  $A_0$  et pour  $X = X_1$  on arrive au point  $A_1$  comme le montre le dessin ci-dessous. Entre deux minima on a fait

un tour, l'excédent fractionnaire est donc relié à l'angle  $\theta$  ci-dessous par la relation  $e_p = \frac{\theta}{2\pi}$ .



3.3. Application numérique : on doit mesurer l'angle à 0,01 près donc à  $3,6^\circ$  près.