

# CORRIGÉ

## A. APPLICATIONS DES PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

### A. I. Étude des systèmes fermés

#### A.I.1. Principes et définitions

##### A.I. 1.1.

###### Premier principe :

Pour un système macroscopiquement au repos, il existe une fonction d'état extensive  $U$  appelée énergie interne relative au système (S) telle que lors d'une transformation de ce système, sa variation est égale à la somme du travail  $W$  et du transfert thermique  $Q$  échangés avec l'extérieur :

$$\Delta(U) = W + Q$$

$$U = E_C(\text{microscopique d'agitation}) + E_p(\text{potentielle microscopique})$$

Pour un système en mouvement par rapport à un référentiel, on peut utiliser la notion d'énergie totale :

$$\Delta E = \Delta(U + E_c(\text{macroscopique}) + E_{p\text{ext}}) = W_{\text{autre}} + Q$$

$E_{p\text{ext}}$  = énergie potentielle d'interaction entre le système et l'extérieur,  $W_{\text{autre}}$  travail des forces extérieures ne dérivant pas d'une énergie potentielle, travail électrique, transfert de rayonnement.

#### A.I. 1.2. Deuxième principe de la thermodynamique

A tout système thermodynamique est associé une fonction d'état notée  $S$ , appelée entropie :

- l'entropie d'un système isolé croît jusqu'à l'établissement d'un état d'équilibre. Elle est alors maximale ;
- l'entropie est une grandeur extensive.

Dans une transformation quelconque d'un système (S) couplé à une source de chaleur idéale de température  $T_e$  et une source de travail idéale, la variation d'entropie se met sous la forme :

$$\Delta S = S_{\text{échange}} + S_{\text{créé}}$$

avec  $S_{\text{échange}} = \int_1^2 \frac{\delta q}{T_e}$ . L'intégrale est calculée le long du chemin réellement suivi par le système au cours de l'évolution.

$S_{\text{créé}}$  représente la création d'entropie due au caractère irréversible de l'évolution.

$S_{\text{créé}} > 0$  si transformation irréversible ;  $S_{\text{créé}} = 0$  si transformation réversible.

###### Remarques :

- *Source de chaleur idéale*

La variation d'entropie d'une source idéale de chaleur lors d'une transformation infinitésimale est donnée par  $dS = \delta Q_e/T_e$  car on admet que les transferts d'énergie interne sont réversibles.

Un thermostat de très grande capacité calorifique et dont la température reste constante peut être considérée comme une source idéale : sa variation d'entropie est alors donnée par :  $\Delta S = Q_e/T_e$ ,  $Q_e$  est l'énergie thermique reçue par le thermostat.

- *Source de travail idéal*

L'entropie d'une source de travail idéal reste constante au cours d'une transformation. Il n'y a aucune dissipation d'énergie par frottement à l'intérieur du système. Son évolution est totalement irréversible.

Cette démarche permet de ne tenir compte que des causes d'irréversibilité internes au système (S) en éliminant les causes d'irréversibilité externes.

- Dans le cas d'un chemin irréversible pour calculer  $S_{\text{échange}}$ , il faut modéliser l'échange ou alors connaître comment se fait le transfert, par convection, conduction (loi de Fourier ..)

### A.I.1.3.

Un gaz est dit parfait si les actions mécaniques exercées sur les molécules sont assimilables à des chocs, interactions infiniment brèves qui ne s'exercent qu'à l'occasion de leur contact.

Hypothèses du modèle :

- molécules assimilables à des points matériels ;
- vitesse d'agitation des molécules isotrope dans toutes les directions ;
- gaz en équilibre thermodynamique interne : les grandeurs statistiques ont la même valeur dans tout le gaz ;
- la vitesse des molécules n'est pas modifiée par la présence des parois ;
- pression du gaz parfait monoatomique  $p = \frac{1}{3} n m \overline{u^2}$   $\overline{u^2}$  vitesse quadratique moyenne.

$pV = \frac{1}{3} n^* M \overline{u^2}$  avec  $n^* = n N_A / V$   $n$  quantité de matière dans le volume  $V$   
 or  $\frac{1}{2} m \overline{u^2} = \frac{3}{2} k_B T$  d'après les statistiques.

soit  $P.V = n N_A k_B T = n.R.T$

Pour un gaz parfait monoatomique  $dU = \frac{3}{2} n R dT$

Plus généralement pour un gaz parfait son énergie interne  $U$  et son enthalpie  $H$  ne dépendent que de la température : la dépendance de  $C_V$  et  $C_p$  en fonction de la température ne pouvant pas être déterminée par les principes de la thermodynamique :  $dU = C_V(T).dT$  et  $dH = C_p(T).dT$

Si  $C_V$  et  $C_p$  peuvent être considérés comme constantes,

$U - U_0 = C_V(T - T_0)$  ;  $H - H_0 = C_p(T - T_0)$  ;  $C_p - C_V = R$  ;  $C_p / C_V = \gamma$

$dU = c_v dT = T dS - p dV$

$T dS = P dV + C_V dT$   $T dS = - V dp + C_p dT$

$S(T, V) = S(T_0, V_0) + C_V \ln(T/T_0) + R \ln(V/V_0)$  ;

$S(T, P) - S(T_0, P_0) = C_p \ln(T/T_0) - R \ln(P/P_0)$

## A.I.2. Application : transformation isotherme d'un gaz parfait

### A.I.2.1.1

Dans l'état final il y équilibre mécanique : le piston est au repos :  $P_1.S = P_0.S + Mg$

$P_1 = P_0 + Mg/S$

### A.I.2.1.2.

Première loi de Joule  $U(T)$  isotherme  $\Rightarrow \Delta U = 0$  ;

$$W = - \int P dV = - RT_0 \int \frac{dV}{V} = - RT_0 \ln(V_{\text{final}}/V_{\text{initial}}) = RT_0 \ln(P_1/P_0)$$

$$\Delta U = W + Q = 0 \Rightarrow Q = -W \quad Q = RT_0 \ln(P_0/P_1)$$

### A.I.2.1.3.

$$\Delta S = - R \ln(P_1/P_0)$$

entropie échangée :  $S_e = Q/T_0 = - R \ln(P_1/P_0)$

donc  $S_{\text{créée}} = S_i = \Delta S - S_e = 0$  conforme au caractère réversible de la transformation.

### A.I.2.2 Transformation brutale irréversible

A.I.2.2.1. On a toujours à l'équilibre final  $\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0$  (ne dépend pas du chemin)

Selon l'hypothèse la force extérieure appliquée est  $F = P_1.S = P_{\text{ext}}.S$

$$W = - \int P_{\text{ext}} dV = - P_1(V_{\text{final}} - V_{\text{initial}}) = -RT_0 + P_1(P_0 V_{\text{initial}})/P_0 = -RT_0 + P_1 RT_0 / P_0$$

$$W = RT_0 \left( \frac{P_1}{P_0} - 1 \right) \quad Q = \Delta U - W = -W \quad Q = -RT_0 \left( \frac{P_1}{P_0} - 1 \right)$$

### A1.2.2.2

On a toujours  $\Delta S = -R \ln (P_1/P_0)$  car fonction d'état

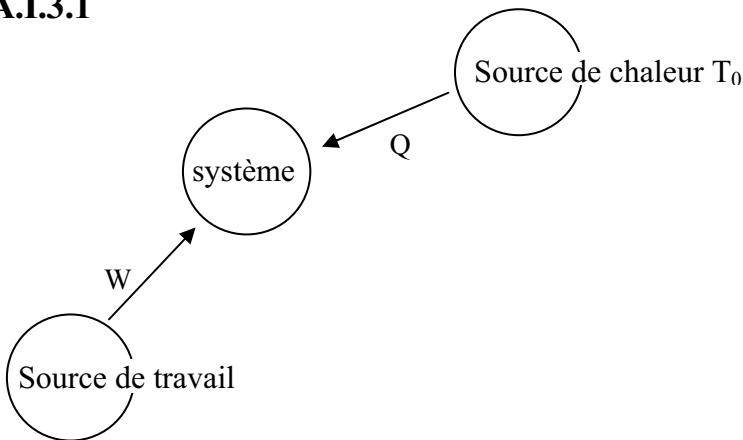
$$S_e = Q/T_0 = -R \left( \frac{P_1}{P_0} - 1 \right)$$

$$D'où S_{créée} = \Delta S - S_e = R \left( \frac{P_1}{P_0} - 1 \right) - R \ln \left( \frac{P_1}{P_0} \right) = R \left( \frac{P_1}{P_0} - 1 - \ln \frac{P_1}{P_0} \right)$$

$$\forall x = \frac{P_1}{P_0} > 1 \quad S_{créée} = R = (x-1) - \ln x > 0 \text{ car } x-1 > \ln x \Rightarrow S_{réée} \geq 0 \text{ conforme au 2}^{nd} \text{ principe}$$

## A.I.3. Application : étude théorique d'une machine thermique

### A.I.3.1



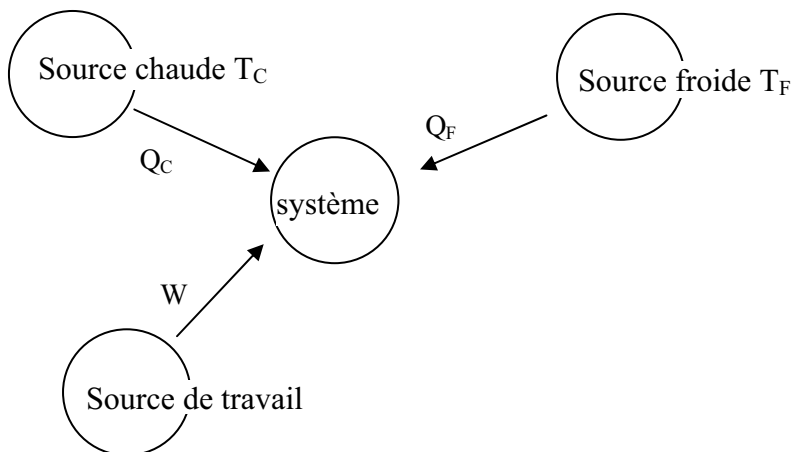
Soit  $W, Q$  les grandeurs énergétiques reçues par le système fluide pendant un cycle.

Alors au cours d'un cycle  $\Delta U = W + Q = 0$

$\Delta S = 0 = S_e + S_{créée} \quad S_e = Q/T_0 \Rightarrow Q \leq 0$ , car  $S_{créée} \geq 0$  donc cela entraîne :  $W \geq 0$

Le système ne peut que recevoir du travail. Impossibilité du moteur monotherme.

### A.I.3.2.



#### A.I.3.2.1.

Au cours d'un cycle, la machine thermique est telle que :  $\Delta U = 0$  et  $\Delta S = 0$

Or  $\Delta U = W + Q_F + Q_C = 0 \quad \Delta S = 0 = Q_C/T_C + Q_F/T_F + S_{créée}$ ;

$$\Leftrightarrow Q_C/T_C + Q_F/T_F \leq 0 \text{ (Inégalité de Clausius)}$$

### A.I.3.2.2.

Dans le cas du moteur ditherme :

$$W \leq 0 \Rightarrow Q_F + Q_C \geq 0 ; -Q_F - T_F/T_C Q_C \geq 0 ; Q_C(1 - T_F/T_C) \geq 0 \Rightarrow Q_C \geq 0 \text{ et } Q_F \leq 0$$

La source chaude transfère un flux thermique vers le moteur alors que le moteur transfère un flux thermique vers la source froide.

### A.I.3.2.3.

Rendement ou efficacité du moteur :  $\eta = |W| / Q_C = (Q_F + Q_C) / Q_C = 1 + Q_F / Q_C$

D'après l'inégalité de Clausius,  $Q_F / Q_C \leq -T_F / T_C$

$$\eta \leq \eta_{\max} = 1 - T_F / T_C$$

## A.I.4. Application : étude d'un climatiseur fonctionnant entre deux sources non idéales

La température de l'une des sources varie

### I.4.1.

L'air contenu dans le salon a une capacité thermique  $C$  ; sa variation d'énergie interne est  $\Delta U = C(T_1 - T_0)$

Elle a reçu un transfert thermique  $-Q_F$  de la part du climatiseur :

$$\Delta U = -Q_F ; Q_F = C(T_0 - T_1)$$

### A.I.4.2.

L'air extérieur est une source de capacité infinie.  $C$  est une source idéale.

**Considérons le système {air + climatiseur + salon}**

$\Delta S = 0 = \Delta S_{\text{air}} + \Delta S_{\text{climatiseur}} + \Delta S_{\text{salon}}$  : le climatiseur évolue de façon réversible

$\Delta S_{\text{air}} = -Q_C / T_0$  ;  $\Delta S_{\text{climatiseur}} = 0$  ;  $\Delta S_{\text{salon}} = C \ln(T_1 / T_0)$  car  $Ds = CdT/T$  (transformation isochore)

soit  $Q_C = T_0 C \ln(T_1 / T_0)$

**On peut considérer le climatiseur seulement**

$\Delta S_{\text{climatiseur}} = 0 = \Delta S_{eC} + \Delta S_{eF}$  car le climatiseur fonctionne de façon réversible

$$\Delta S_{eC} = Q_C / T_0 \quad \Delta S_{eF} = - \int_{T_0}^{T_1} C dT/T = -C \ln(T_1 / T_0) \quad \text{d'où} \quad Q_C = T_0 C \ln(T_1 / T_0)$$

### A.I.4.3.

$\Delta U = 0$  au cours des différents cycles donc :

$$W = -(Q_F + Q_C) = CT_0 (y - 1 - \ln y) \quad \text{avec} \quad y = T_1 / T_0 \quad \text{donc} \quad W > 0$$

### A.I.4.4.

AN/  $P = W/\Delta t = 122 \text{ W}$  raisonnable (0,5 A en 220 V). Trouver une dizaine de kilowatts ne l'est pas.

## A.II. Étude des systèmes ouverts en régime permanent

### A.II. 1. Principes et définitions

#### A.II.1.1.

La masse  $M(t)$  du fluide contenu dans ( $V$ ) est indépendante du temps car le régime est permanent  $M(t) = M(t+dt)$

La masse du système fermé  $\Sigma^*$  est invariante.  $m_{\Sigma^*}(t) = m_{\Sigma^*}(t+dt)$ , soit  $M(t) + dm_e = M(t+dt) + dm_s \Rightarrow dm_e = dm_s$

En régime permanent  $dm_e = dm_s$ , noté désormais  $dm$ .

#### A.II.1.2.

En amont, compression du fluide ; il reçoit un travail :  $\delta w_1 = P_1 dV_1 = P_1 v_1 dm$

En aval, détente du fluide : il fournit un travail :  $\delta w_2 = -P_2 dV_2 = -P_2 v_2 dm$

### A.II.1.3.

Premier principe appliqué à  $\Sigma^*$  fermé entre t et t+dt

$dU^* = \delta W + \delta Q$  et  $dU^* = U^*(t+dt) - U^*(t) = [U_\Sigma(t+dt) + dm u_2] - [U_\Sigma(t) + dm u_1] = dm (u_2 - u_1)$  car  $U_\Sigma$  indépendant du temps.

$\delta W_{\text{pression}} = \delta W_1 + \delta W_2 = (P_1 v_1 - P_2 v_2) dm$  sans oublier  $\delta W_{\text{indiqué}} = w_i dm$

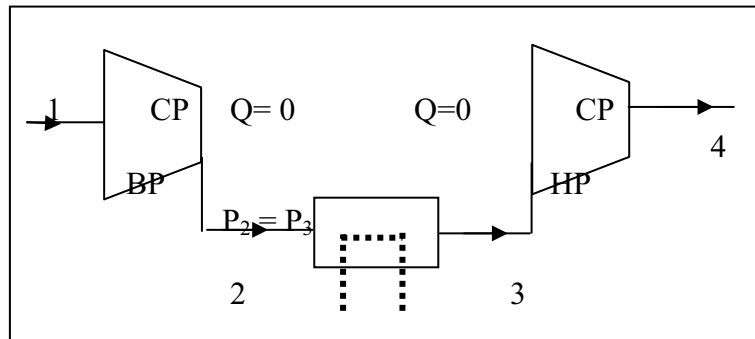
$\delta Q = q_e dm$

Donc  $(u_2 - u_1) dm = (P_1 v_1 - P_2 v_2) dm + w_i dm + q_e dm$

soit avec  $h = u + Pv$

$h_2 - h_1 = w_i + q_e$ .

## A.II.2. Application : compresseur à deux étages



### A.II.2.1.

Il faut appliquer le théorème démontré précédemment :

Transformation 1-2  $\Delta h_{12} = C_p(T_2 - T_1) = w_{i12} + q_{e12} = w_{i12}$

Transformation 3-4  $\Delta h_{34} = C_p(T_4 - T_3) = w_{i34} + q_{e34} = w_{i34}$

Le travail indiqué est le travail utile fourni aux deux compresseurs :  $w_i = w_{i12} + w_{i34} = C_p(T_2 + T_4 - 2T_1)$

On admet une évolution adiabatique et réversible dans les compresseurs ;

avec un gaz parfait et  $C_p = \text{constante}$  on peut appliquer la loi de Laplace  $PV^\gamma = \text{constante} \Rightarrow P^{(1-\gamma)}T^\gamma = \text{constante}$

$\Rightarrow P_1^{(1-\gamma)/\gamma} T_1^\gamma = P_2^{(1-\gamma)/\gamma} T_2^\gamma$  et  $P_2^{(1-\gamma)/\gamma} T_1^\gamma = P_4^{(1-\gamma)/\gamma} T_4^\gamma$  d'où

$T_2 = T_1 r^{(\gamma-1)/\gamma}$  et  $T_4 = T_1 (r/a)^{(1-\gamma)/\gamma}$

On en déduit donc  $w_i = C_p T_1 (r^{(\gamma-1)/\gamma} + (r/a)^{(1-\gamma)/\gamma} - 2)$

### A.II.2.2.

Posons  $\alpha = (\gamma-1)/\gamma$  ; il s'agit de rendre minimale l'expression  $f(r) = r^\alpha + (r/a)^{-\alpha}$

$\Rightarrow df/dr = \alpha r^{\alpha-1} - \alpha (r/a)^{-\alpha-1} = 0 \Rightarrow r^\alpha = (r/a)^{-\alpha} \Rightarrow r = \sqrt{a} = 5$

### A.II.2.3.

On a alors  $T_2 = T_1 5^\alpha$  avec  $\alpha = 2/7 \Rightarrow T_2 = 1,58 T_1 = 475 \text{ K}$  et  $T_4 = T_1 (5/25)^{-\alpha} = T_2$

$T_2 = T_4 = 475 \text{ K}$

### A.II.2.4

Réfrigérant calorifugé  $\Rightarrow P_{\text{thermique eau}} + P_{\text{thermique air}} = 0$

$d_{\text{eau}} c_{\text{eau}} \Delta t + d_{\text{air}} C_p (T_3 - T_2) = 0$  En effet  $P_{\text{thermique air}} = d_{\text{air}} q_e$ . Or  $\Delta h_{23} = w_{i23} + q_{e23} = C_p (T_3 - T_2) : w_{i23} = 0$

$\Rightarrow d_{\text{eau}} = d_{\text{air}} C_p / c_{\text{eau}} (T_2 - T_3) / \Delta t$

AN :  $d_{\text{eau}} = 5,4 \text{ kg.s}^{-1}$

## A.II.3. Application : cycle de Rankine d'une machine à vapeur

### A.II.3.1.

Estimation du travail reçu par la pompe :

$$\Delta h_{34} = w_{i34}. \quad \text{Or } dh = TdS + VdP$$

En négligeant la variation d'entropie de la phase liquide (très faible par rapport aux entropies gazeuses) on

en déduit que  $w_i \simeq \int VdP \simeq V\Delta P$

Or les volumes des liquides sont environ 1000 fois plus faibles que ceux des gaz.  $V \simeq 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

D'où  $w_i \simeq 10^{-3} \times 50 \times 10^5 = 5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

$w_i$  négligeable par rapport aux autres travaux mis en jeu  $\Rightarrow w_i \simeq 0$  et  $\Delta h \simeq 0$  compression isenthalpique du liquide

### A.II.3.2.

✚ **Point 1:** vapeur juste saturante à  $P = P_1 = 55 \text{ bar} \Rightarrow s_1 = s_{55} (55 \text{ bar}) = s'_{55} + L_v(55)/T_1$

Numériquement  $s_1 = 5,93 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

✚ Transformation 1-2 : transformation isentropique  $\Rightarrow s_2 = s_1 = 5,93 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Titre en vapeur : sous la pression saturante de 0,2 bar :  $s_2 = s'(p=0,2) + x_2 L_v/T_2$

$$x_2 = (s_2 - s'(0,2)) \times T_2 / L_v(0,2) = (5,93 - 0,83) \times 330 / 2350 \simeq 0,72 \text{ ou } 0,717$$

De même :  $h_2 = h'(0,2) + x_2 L_v(0,2) = 250 + 0,72 \times 2350 = 1934 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

$$s_2 = 5,93 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad h_2 = 1934 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

### A.II.3.3.1

Transformation. 4-1 :  $\Delta h_{41} = w_{i41} + q_1 = q_1$  (pas de partie mobile) donc  $q_1 = h_1 - h_4$

Or  $\Delta h_{34} = 0 \Rightarrow h_4 = h_3 = h'(P_2) = 250 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  (en 3 liquide saturant sous la pression  $P_2 = 0,2 \text{ bar}$ )

$$h_1 = h''(P_1) = h'(P_1) + l_v(T_1) = 1180 + 1600 = 2780 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\text{AN: } q_1 = 2780 - 250 = 2530 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

### A.II.3.3.2.

Transformation 2-3 :  $\Delta h_{23} = w_{i23} + q_{e23} = -q_2 = h_3 - h_2$

$$q_2 = h_2 - h_3 = 1934 - 250 = 1684 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$q_2 = 1684 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

### A.II.3.3.3.

Dans la turbine détente adiabatique  $q_{iT} = 0$  :  $\Delta h_{12} = w_{iT} + 0$

$$\Delta h_{12} = h_2 - h_1 = 1934 - 2780 = -846 \text{ J}$$

$$W_{iT} = -846 \text{ J}$$

### A.II.3.3.4.

Rendement :  $\eta = |w_{iT}| / q_1 \quad \eta = 846 / 2530 \simeq 0,33$

Rendement de Carnot :  $\eta_{\max} = 1 - T_{\min} / T_{\max} = 1 - 330 / 540 = 0,39$

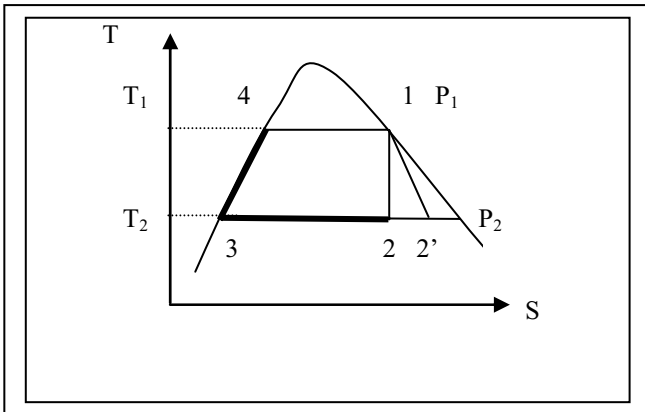
On obtient bien  $\eta \leq \eta_{\max}$

## A.II.3.4. Allure du cycle dans le diagramme entropique.

### A.II.3.4.1.

Les isobares à l'intérieur de la courbe de saturation sont des isothermes car  $P = f(T) \Rightarrow$  droites horizontales

### A.II.3.4.2.



### A.II.3.4.3.

Si l'évolution 1-2 est adiabatique irréversible, alors  $\Delta S_{12} > 0 \Rightarrow$  on aboutit à (2') situé « à droite » de (2) sur l'isobare  $P_2$  à  $T_2$

## B. DIFFUSION THERMIQUE

### B.I. Transfert par conduction thermique

#### B.I. 1. Équation de la chaleur

##### B.I.1.1.

$j_Q$  = puissance/surface s'exprime en  $W.m^{-2}$

grad T s'exprime en  $K.m^{-1}$

L'unité de  $\lambda$  :  $W.K^{-1} m^{-1}$

##### B.I.1.2.

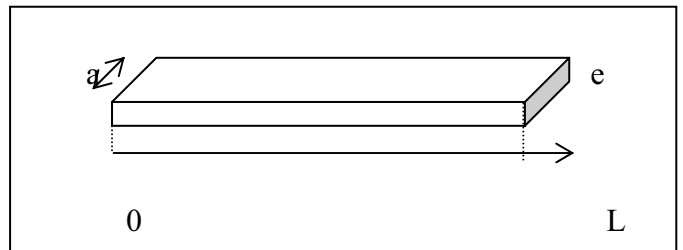
Puissance algébriquement sortante du système :  $[j_Q(x+dx) - j_Q(x)] S = \frac{\partial j_{Qx}}{\partial x} S dx$

Cette puissance = perte d'énergie du système /unité de temps =  $-\frac{\partial U}{\partial t}$  avec  $dU = \mu c T S dx$

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \mu c S dx \frac{\partial T}{\partial t} \quad \frac{\partial j_{Qx}}{\partial x} + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

##### B.I.1.3.

Or  $j_{Qx} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow D \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$  avec  $D = \lambda / \mu c \Rightarrow D$  s'exprime en  $m^2.s^{-1}$



## B.I.2. Contact avec deux sources de chaleur idéales

### B.I.2.1.

Régime permanent  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = Ax+B$  linéaire

$$T(x=0) = T_0 ; T(x=L) = T_1 \Rightarrow T(x) = T_0 + (T_1 - T_0)x/L$$

$$\Phi = j_Q S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S = \lambda S(T_0 - T_1)/L$$

### B.I.2.2

Électricité	Thermique
Potentiel V	$T_0 - T_1$
Intensité I	$\Phi$ ou puissance
Résistance électrique $R = V/I$	résistance thermique $R_{th} = (T_0 - T_1)/\Phi$
soit $R_{th} = L/\lambda S$ ( $R_{\text{électrique}} = L/\gamma S$ )	
Unité : $K \cdot W^{-1}$	

## B.I.3. Transfert convectif

### B.I.3.1.

$P_C = \alpha S(T - T_a)$  : unité de  $\alpha$  :  $W \cdot m^{-2} K^{-1}$

Résistance thermique de convection :  $R_C = (T - T_a)/P_C = 1/\alpha S$

### B.I.3.2.

$\delta^2 = \lambda e/2\alpha$  d'où  $\delta$  est homogène à une longueur

$\delta$  Bilan entre  $x$  et  $x+dx$

$S = ae$

$$\mu c S \frac{\partial T}{\partial t} dx dt = dt [j_Q(x) - j_Q(x+dx)] S - 2\alpha dx(a+e)(T - T_a) dt = -S \frac{\partial j_{Qx}}{\partial x} dt dx - 2\alpha dx(a+e)(T - T_a) dt$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x} - 2\alpha((a+e)/ae)(T - T_a) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - [2h(a+e)/ae](T - T_a)$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - (2h/e)(T - T_a) \quad \text{si } e \ll a$$

$$\theta(x) = [T(x) - T_a]. \quad \mu c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{2h\theta}{e}$$

En régime permanent, compte tenu de la définition de  $\delta$  :  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{\delta^2} \theta = 0$

$$\theta(x) = A \operatorname{sh}(x/\delta) + B \operatorname{ch}(x/\delta)$$

$$\text{En } x=0 : \theta = B = T_0 - T_a$$

$$\text{En } x=L : \theta(L) = T_1 - T_a = A \operatorname{sh}(L/\delta) + B \operatorname{ch}(L/\delta)$$

$$\text{D'où } B = T_0 - T_a \text{ et } A = [(T_1 - T_a) - (T_0 - T_a) \operatorname{ch}(L/\delta)]/\operatorname{sh}(L/\delta)$$

$$T(x) - T_a = (T_0 - T_a) \operatorname{ch}(x/\delta) + \operatorname{sh}(x/\delta) [(T_1 - T_a) - (T_0 - T_a) \operatorname{ch}(L/\delta)]/\operatorname{sh}(L/\delta)$$



✚ Cas particulier si  $L \gg \delta$

Alors  $T(x) - T_a = (T_0 - T_a) \operatorname{ch}(x/\delta) - (T_0 - T_a) \operatorname{sh}(x/\delta) = (T_0 - T_a) \exp(-x/\delta)$  : la température tend vers  $T_a$

On retrouve la relation directement en admettant que  $\theta(x) = C \exp(-x/\delta)$  et en écrivant les conditions aux limites

$$T(x) - T_a = (T_0 - T_a) \exp(-x/\delta)$$

## B.I.4. Application : comportement thermique d'un transistor de puissance

### B.I.4.1.

En régime permanent, le même flux thermique  $\Phi$  traverse les différents éléments aux interfaces transistor-radiateur et radiateur-air

Soit :  $(T - T_R) = R \Phi$  et  $(T_R - T_a) = R_{\text{rad}} \Phi \Rightarrow T - T_a = (R + R_{\text{ad}}) \Phi$  (association série)

$$R_{\text{ad}} = -R + (T - T_a)/\Phi$$

### B.I.4.2.

AN :  $\Phi = 40 \text{ W}$  ;  $T_a = 20^\circ\text{C}$  ;  $T = 140^\circ\text{C}$  ;  $R = 0,5 \text{ K.W}^{-1}$

$$R_{\text{ad}} = 120/40 - 0,5 = 2,5 \text{ K.W}^{-1} ; R_{\text{ad}} = 2,5 \text{ K.W}^{-1}$$

Par lecture sur la courbe, on en déduit qu'il faut commander un radiateur de longueur  $l = 60 \text{ mm}$

## BI.5. Analyse en régime transitoire

### B.I.5.1.

$$\text{Bilan énergétique du transistor : } C \frac{\partial T}{\partial t} = \Phi - (T - T_R)/R$$

$$\text{Bilan énergétique du radiateur : } C_R \frac{\partial T_R}{\partial t} = (T - T_R)/R - (T_R - T_a)/R_{\text{rad}}$$

### B.I.5.2.

$T \rightarrow V_T$  ;  $T_R \rightarrow V_R$  ;  $T_a \rightarrow V_a$  ;  $\Phi \rightarrow I$  ;

$C \rightarrow C_1$  ;  $C_R \rightarrow C_2$  ;  $R_1 = R$  ;  $R_2 = R_{\text{ad}}$

Loi des nœuds en  $T$  et  $T_R$

$$\color{blue}{\oplus} C_1 dV_T/dt = I + (V_R - V_T)/R_1$$

$$\color{blue}{\oplus} C_2 dV_R/dt = (V_T - V_R)/R_1 + (V_a - V_R)/R_2$$

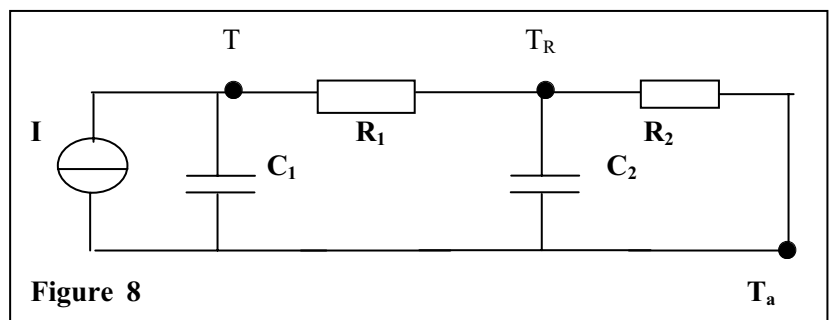


Figure 8

### B.I.5.3.

$$\underline{H}(p) = \underline{H}(j\omega) = \frac{(T - T_a)}{\Phi}$$

$$I.Z = V_T - V_a$$

$$\underline{Z} = R_1 + 1/(1/R_2 + jC_2\omega)$$

$$\underline{Z} = (R_1 + R_2 + jR_1R_2C_2\omega)/(1 + jR_2C_2\omega)$$

$$\underline{i}/I = 1/(1 + jC_1\omega\underline{Z}) \text{ (diviseur de courant) et } T - T_a = \underline{Z} \underline{i}$$

$$(T - T_a)/I = \underline{Z}/(1 + jC_1\omega\underline{Z}) \text{ soit } \underline{H} = (R_1 + R_2 + jR_1R_2C_2\omega)/(1 + j[(R_1 + R_2)C_1 + R_2C_2]\omega - R_1R_2C_1C_2\omega^2)$$

Finalement :

$$\underline{H} = (T-T_a)/\Phi = (R+R_{rad} + jRR_{rad}C_R\omega)/(1+j[(R+R_{rad})C+R_{rad}C_R] \omega - RR_{rad}CC_R\omega^2)$$

**B.I.5.4.**

$$RR_{rad}CC_R \omega^2 \ll 1$$

Alors  $\underline{H} = \underline{N}(\omega)/(1+j\omega\tau)$  avec  $\tau = (R+R_{rad})C+R_{rad}C_R$

La constante de temps  $\tau$  est caractéristique de l'évolution temporelle de la température  $T(t)$  du transistor.

AN :  $\tau = R_{rad}C_R + R C + R_{ad}C = 800s = 13,3 \text{ min}$   $\tau = 13,3 \text{ min}$

**B.I.5.5.**

$H(p) = N(p)/(1+\tau p)$   $p$  de l'ordre de grandeur de  $1/\tau$

$$RR_{rad}CC_R / \tau^2 = 3,9 \times 10^{-2} \ll 1$$

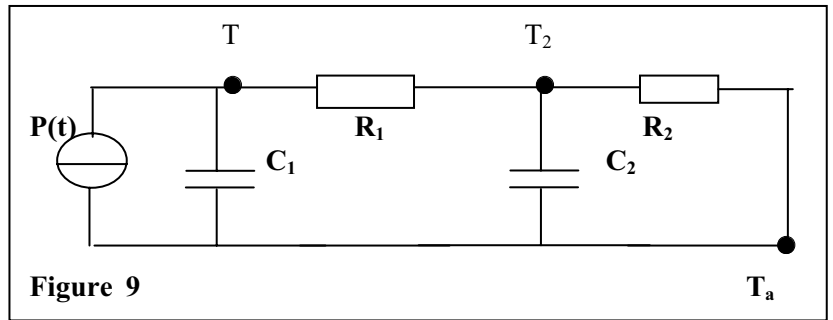
L'approximation à un 1er ordre est légitime.

**B.II. RÉGULATION DE TEMPÉRATURE**

$\theta = T_2 - T_a$  ;  $C_1 = 400 \text{ J.K}^{-1}$  ;  
 $C_2 = 1000 \text{ J.K}^{-1}$  ;  $R_1 = 1,0 \text{ K.W}^{-1}$  ;  
 $R_2 = 4,0 \text{ K.W}^{-1}$ .

L'action de la puissance électrique  $P(t)$  sur la différence de température  $\theta$  peut être représentée par la fonction de

transfert :  $B(p) = \frac{\theta(p)}{P(p)}$



**B.II.1.**

La fonction de transfert  $H(p) = (T-T_a)(p)/P(p)$  et  $\underline{\theta} = Z_2(T-T_a)/(R_1+Z_2)$  avec  $1/Z_2 = 1/R_2 + jC_2\omega$

Soit  $\theta = R_2/(R_1+R_2+jR_1R_2C_2\omega)$

On en déduit :  $B(p) = R_2/(1+[(R_1+R_2)C_1+R_2C_2]p+R_1R_2C_1C_2p^2)$

Soit  $B_0 = R_2$  ;  $\omega_0 = [R_1R_2C_1C_2]^{-1/2}$  ;  $m_0 = [(R_1+R_2)C_1+R_2C_2] \omega_0/2$

A.N :  $B_0 = 4 \text{ K.W}^{-1}$  ;  $\omega_0 = 7,9 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  ;  $m_0 = 2,37$

$$B(j \omega) = B(p) = \frac{4}{(1,6 \cdot 10^6 p^2 + 600p + 1)}$$

$$|B| = \frac{4}{(22,46x^2 + (1-x^2)^2)^{1/2}}$$

**B.II.2.**

Il s'agit d'un filtre passe-bas du second ordre

$x \rightarrow 0$   $B(p) \rightarrow B_0 = 4$   $\text{GdB} = 20 \lg|B(j\omega)| = 12$

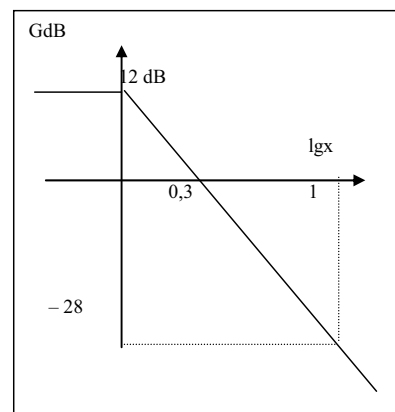
$x \rightarrow \infty$   $B(p) \rightarrow B_0\omega_0^2/p^2$   $\text{GdB} = 12,04 - 40 \lg x$

$x = 1$   $\lg x = 0$   $\text{GdB} = -14,47$

Pour  $x = 0,2$   $\text{GdB} = 9 \text{ dB}$  affaiblissement de 3 dB

$x=2$   $G=-15,8$   $x=10$   $G=-28,8$   $x=0,1$   $G=11,23$

$x=0,08$   $G=11,5$



### B.II.3.

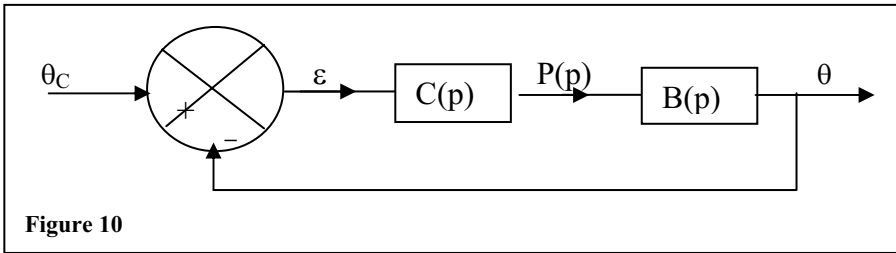


Figure 10

$C(p)$  représente le processus de commande de la résistance chauffante, assimilable à un système linéaire proportionnel :  $C(p) = \Gamma$ .

B.II.3.1. L'unité de  $\Gamma$

$$P(p) = \Gamma(\theta_C - \theta) \quad \text{unité } W.K^{-1}$$

### B.II.3.2.

$$\varepsilon = \theta_C - \theta \text{ et } \theta = \Gamma B \varepsilon$$

$$H(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_C(p)} = \frac{\Gamma B(p)}{1 + \Gamma B(p)}$$

$$H(p) = H(j\omega) = \frac{H_0}{\left( \frac{p^2}{\omega_1^2} + 2m \frac{p}{\omega_1} + 1 \right)}$$

$$H_0 = \Gamma B_0 / [1 + \Gamma B_0] \quad m = m_0 / (1 + \Gamma B_0)^{1/2} \quad \text{et } \omega_1 = \omega_0 (1 + \Gamma B_0)^{1/2}$$

### B.II.3.3.

Dans une réponse à un échelon  $m = 1$  critique  $m > 1$  apériodique amorti

$m < 1$  pseudo-périodique amorti

On veut  $\Gamma$  pour  $m \approx 0,7$ . Oscillation pseudo-périodique très amorti. Système rapide pour le retour à l'équilibre.

$$m = m_0 / (1 + \Gamma B_0)^{1/2} = 0,7 ; \Gamma = 2,616 W.K^{-1}$$

### B.II.3.4.

B.II.3.4.1.  $\theta_\infty$  de la température de la plaque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\theta(p) \text{ avec } \theta(p) = H(p) \theta_C(p)$$

$$\theta_\infty = H_0 \theta_C = 100 H_0 \text{ avec } H_0 = 2,62 \times 4 / (1 + 4 \times 2,62) = 0,9128. \text{ Soit } \theta_\infty = 91,3 K$$

L'écart statique  $\varepsilon_\infty$  entre la température de consigne et la température obtenue :  $\varepsilon_\infty = \theta_C - \theta_\infty = -8,7 K$

### B.II.3.4.2.

Lorsque

$t_r$  temps au bout duquel la réponse du système diffère de moins de 5% de sa valeur finale, dit « temps de réponse à 5% », sachant que pour  $m \approx 0,7$ ,  $t_r \approx 3/\omega_1$ .

$$\omega_1 = \omega_0 (1 + \Gamma B_0)^{1/2} = 2,68 \times 10^{-3} s^{-1}$$

$$t_r = 1120 s \approx 19 \text{ min}$$

### B.II.3.4.3.

Amplitude relative D du premier dépassement en % définie par  $D = (\theta_{\max} - \theta_{\infty}) / \theta_{\infty}$  et donné par l'expression :

$$D = 100 \exp \left[ -\frac{\pi \cdot m}{\sqrt{1 - m^2}} \right] = 4,6\%$$

B.II.3.4.4. Allure de  $\theta(t)$  : amorti fortement.

### B.II.3.5.

#### B.II.3.5.1.

Valeur de  $\Gamma$  permettant d'obtenir  $\varepsilon_{\infty} \approx -1$  K  $\Rightarrow \theta_{\infty} = 99$  K soit  $H_0 = 0,99 = \Gamma B_0 / [1 + \Gamma B_0]$

Donc  $\Gamma B_0 = H_0 / (1 - H_0) = 99 \Rightarrow \Gamma = 99/4 = 24,75$  W.K<sup>-1</sup>

#### B.II.3.5.2.

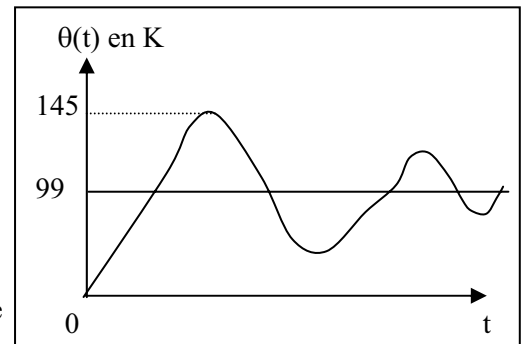
$$m = m_0 / (1 + \Gamma B_0)^{1/2} = m_0 / 10 = 0,237 < 0,7$$

#### B.II.3.5.3.

On obtient :  $D = 46,5\%$ , soit  $\theta_{\max} = 145$  K

#### B.II.3.5.4.

m a beaucoup diminué : la réponse est donc peu amortie  
Inconvénients grand dépassement, augmentation du temps de réponse  
Il est plus indiqué d'utiliser un correcteur intégral et proportionnel pour annuler l'erreur statique.



## C. UN EXEMPLE DE TRANSFERT THERMIQUE : CHAUFFAGE PAR INDUCTION

### C.I. En classe de première S

**C.I.1.** 3 activités. Par exemple :

visualisation de spectres, comparaison entre les spectres des courants et des aimants  
rotation d'un aiguille aimantée (expérience d'Oersted), influence du sens du courant,  
solénoïde parcouru par un courant : étude des différents paramètres ( $I$ ,  $N$  et  $\ell$ )

$B$  proportionnel à  $I$  en un point, utilisation d'un teslamètre

$B$  lié au sens de  $I$

#### **C.I.2. Mesure de la composante horizontale de $B_{\text{terrestre}}$**

- boussole orientée dans le champ  $B_T$ , placée perpendiculairement à l'axe d'un solénoïde parcouru par un courant ou utilisation des bobines d'Helmholtz

- Utilisation de la boussole des tangentes

- mesure de la déviation de la boussole lorsque l'on fait circuler un courant ; soit  $\alpha$ .

Alors  $\tan \alpha = B_{\text{solénoïde}} / B_T$

En faisant varier  $I$ , on trace  $\tan \alpha = f(I)$ . On vérifie le caractère rectiligne, on détermine la pente pour trouver  $B_T$ .

Ordres de grandeur :

$B_T = 2,0 \times 10^{-5}$  T (composante horizontale)

Solénoïde  $n = 1000$  spires par unité de longueur (500 spires sur 20 cm par exemple)

$I = 4$  mA,  $B = 2,0 \times 10^{-5}$  T

Alors  $\alpha$  proche de  $45^\circ$

## C.II. En classe de PCSI

- champ magnétique créé par une spire parcourue par le courant  $I_0$  en un point de son axe :  
analyse des symétries  
détermination de la direction de  $\vec{B}$   
écriture de la loi de Biot et Savart  
intégration
- passage au solénoïde fini :  
écriture de l'élément de courant  
intégration
  - passage au solénoïde infini sur l'axe
  - utilisation du théorème d'Ampère pour justifier le champ uniforme

Remarque : l'énoncé n'indiquant pas si le solénoïde est infini ou non, il est possible d'accepter la démarche suivante :

- champ créé par un solénoïde  
analyse des symétries  
analyse des invariances par translation, rotation  
 $\Rightarrow \vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$  en coordonnées cylindriques  
justification qualitative de  $B = 0$  à l'extérieur (cf programme)  
utilisation du théorème d'Ampère  
calcul de  $\vec{B}_{\text{intérieur}}$

## C.III. CHAUFFAGE PAR INDUCTION

### C.III.1.

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{champ électromoteur} \quad \vec{A} = A(r) \vec{e}_\theta \quad \text{pour le champ uniforme}$$

Conducteur placé dans un champ magnétique variable  $\Rightarrow$  existence d'un champ électrique induit, puis courants volumiques induits dits courants de Foucault.

Sources du champ  $\vec{E}$  : distribution de courant  $i(t)$  variable dans le solénoïde. Tout plan contenant l'axe Oz est plan d'AS pour ces courants  $\Rightarrow \vec{E}_{(M)} \perp \text{plan}(O, M, z) \Rightarrow \vec{E}$  orthoradial  
En supposant le cylindre suffisamment long : invariance par translation le long de Oz, invariance par rotation autour de Oz  $\Rightarrow \vec{E}$  ne dépend ni de  $z$ , ni de  $\theta$  :  $\vec{E} = E(r) \vec{u}_\theta$

### C.III.2. Théorème de Stokes :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

Prenons comme contour le cercle de rayon  $r = OM$ , centré sur Oz et pour surface le disque de rayon  $r$ .

$$E(r) \times 2\pi r = - \frac{dB}{dt} \times \pi r^2 = \omega B_0 \sin \omega t \times \pi r^2$$

$$\vec{E}(r, t) = \frac{1}{2} B_0 \omega \sin \omega t r \vec{u}_\theta$$

### C.III.3.

Puissance volumique instantanée cédée à la matière :  $P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$

Puissance volumique moyenne  $\langle P_{\text{vol}} \rangle = \gamma \langle E^2 \rangle = \gamma B_0^2 \omega^2 r^2 / 8$

$$\text{Puissance totale : } P = \iiint \langle P_{\text{vol}} \rangle d\tau = \int_{r=0}^a \langle P_{\text{vol}}(r) \rangle 2\pi r \ell dr$$

$$P = \gamma B_0^2 \pi \ell a^4 \omega^2 / 16$$

### C.III.4.

$$\text{AN : } \gamma = 10 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1} ; \omega = 2\pi f_0 = 6\pi \times 10^5 \text{ s}^{-1}$$

$$P = 2,8 \text{ GW}$$

Valeur un peu trop élevée, comparée à la réalité industrielle. Le champ B utilisé est en réalité plus faible.