

CORRIGÉ

PRINCIPE D'UNE METHODE DE RECHERCHE DE PLANETES EXTRA-SOLAIRES.

A. Influence de la présence d'une planète sur le mouvement de l'étoile

A.I. Mouvement d'une planète autour d'une étoile.

1.a.

L'étoile est à répartition sphérique de masse donc tout plan passant par E est un plan de symétrie ; \vec{g} est donc porté par l'intersection de ces deux plans : $\vec{g}(P) = g \vec{e}_r$

L'invariance par rotation implique que $\vec{g}(P) = g(r) \vec{e}_r$. On utilise le théorème de Gauss pour la gravitation, la surface fermée est une sphère de centre E, de rayon r.

$$g(r) \times 4 \pi r^2 = - 4 \pi G \iiint_V \rho \cdot d\tau = -4 \pi G M$$

$$\vec{g}(P) = - (GM/ r^2) \vec{e}_r$$

Tout se passe comme si la masse de l'étoile est concentrée au centre.

1.b.

$$\vec{F} = -(mM G /r^2) \vec{e}_r$$

1.c.

Théorème du moment cinétique en E dans R_E : $d \vec{\sigma}_E / dt = \vec{M}_E = \vec{0}$ (force centrale)

donc $\vec{\sigma}_E = m \vec{C}$ est un vecteur constant. La trajectoire se situe dans un plan perpendiculaire à \vec{C} et passant par E.

1.d.

$$v_p = 2 \pi a / T ; \quad v_p = (2 \pi G M / T)^{1/3} ; \quad a^3 = G M T^2 / 4 \pi^2$$

2.

$$AN : M_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg} ; \quad v_p = 3,0 \times 10^4 \text{ m.s}^{-1}$$

A.II. Référentiel barycentrique.

1. Le référentiel barycentrique est un référentiel dont le repère d'espace de centre I est en translation par rapport au référentiel galiléen (R_{gal}) avec la vitesse \vec{V} (I/R_{gal}). Ce référentiel est en général non-galiléen. Dans le cas où le système étoile- planète est isolé \vec{V} (I/R_{gal}) est constante ; le référentiel (R^*) est alors galiléen.

$$2.a. \vec{v}_I^* = \vec{0} \text{ donc } M \vec{v}_E^* + m \vec{v}_P^* = \vec{0}$$

2.b.

L'orbite de l'étoile est circulaire de centre I, homothétique, de rapport $-m/M$, de celle de la planète.

2.c.

Quand m devient très petit devant M , le mobile réduit de masse $\mu = mM/(m+M)$ tend vers la planète de masse m , le rayon de la trajectoire de l'étoile tend vers zéro, on revient au cas précédent où l'étoile est immobile.

$$v_p^* = v_p$$

$$v_E^* = (m/M) v_p^*$$

$$v_E^* = 2\pi \left(\frac{GM}{4\pi^2 T} \right)^{1/3} \times \frac{m}{M}$$

3.

$$m/M = 3,01 \times 10^{-3} ; m = 7,8 \times 10^{27} \text{ kg} ; m = 3,9 M_J$$

B. Obtention du spectre visible de l'étoile.

B.I. Interférences lumineuses à deux ondes.

1.a.

$$I_1 = k s_{10}^2/2$$

$$s^2 = s_{10}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_1) + s_{20}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_2) + 2s_{10} \cos(\omega t + \varphi_1) s_{20} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi) \rangle$$

1.b.

On obtient des interférences en M lorsque $\varphi = \text{constante}$ dans le temps.

1.c.

Pour des ondes incohérentes la moyenne temporelle de $\cos \varphi$ est nulle donc $I = I_1 + I_2$.

Les intensités des deux sources s'ajoutent en tout point du champ.

1.d

$$I(M) = 2I_0(1 + \cos\varphi)$$

$I(M)$ est une sinusoïde autour de la valeur moyenne $2I_0$ de période 2π .

Pour $\varphi = 2p\pi$ avec p entier on a : $I_{\text{Max}} = 4I_0$

2.

Définition de la différence de marche : $\delta = (S_2M - S_1M)$

$\delta = [(x+a/2)^2 + y^2 + D^2]^{1/2} - [(x-a/2)^2 + y^2 + D^2]^{1/2}$ avec les approximations on obtient : $\delta = ax/D$

$$\varphi = 2\pi \delta / \lambda ; I(M) = 2I_0 [1 + \cos(2\pi \delta / \lambda)]$$

Au voisinage de O on observe des franges rectilignes brillantes, parallèles à l'axe Oy.

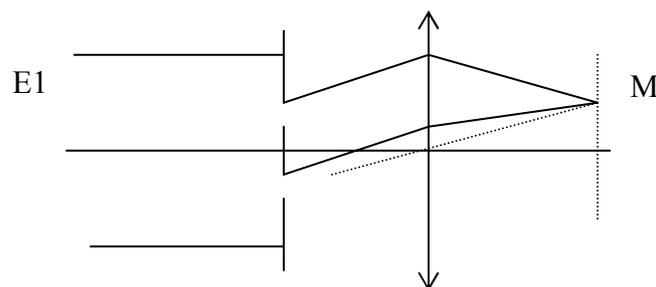
L'interfrange est l'intervalle entre deux points de même éclairement : $i = \lambda D/a$

Application numérique : on mesure $10i$ (quelques cm), on donne la longueur d'onde (visible) et D (ordre du mètre) puis par exemple on calcule a (quelques dixièmes de mm).

Dispositifs expérimentaux : miroirs de Fresnel éclairés par une source ponctuelle ; miroir de Lloyd ; bilentille de Billet ; Michelson éclairé par une source ponctuelle ; trous d'Young.

B.II. Mesure de la distance angulaire entre les deux composantes d'une étoile double.

1.



2.

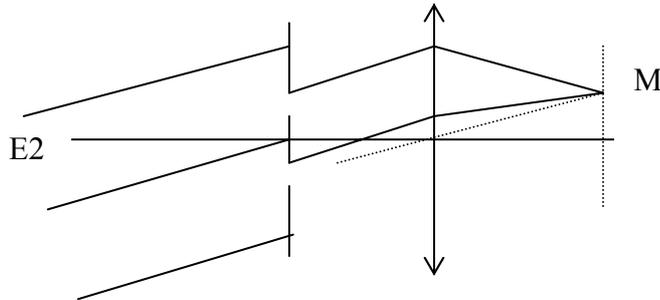
Dans les conditions de Gauss, la lentille est stigmatique pour des couples de points conjugués. Le chemin optique est identique pour tous rayons passant par un point A et son image A'.

3.

Dans les conditions de Gauss $\sin \theta = \tan \theta = \theta$ en radians d'où

$$\delta = a\theta = ax/f' \quad I_1(x) = 2I_0(1 + \cos 2\pi x/i) \quad \text{avec } i = \lambda f'/a$$

4.



Il y a une différence de marche avant les trous: $\delta' = \pm a \alpha$

$I_2(x) = 2I_0(1 + \cos 2\pi/\lambda(ax/f' \pm a \alpha))$. On obtient la même figure d'interférence que précédemment mais décalée d'une quantité $x_0 = \pm \alpha f'$.

5. $I = I_1(x) + I_2(x)$. La première disparition ou brouillage des franges s'effectue pour $x_0 = i/2$ soit $\alpha = \lambda/2a_1$

$$AN \alpha = 9,68 \cdot 10^{-7} \text{radian} = 0.20 \text{ seconde d'arc.}$$

B.III. Fentes de Young et influence de la diffraction.

1. Les fentes sont parallèles à O'Y donc on a une superposition des figures d'interférences. Les franges sont plus lumineuses. L'interfrange est inchangé.

2.a.

$$A = a_0 \int_{-b/2}^{+b/2} h \exp(-i2\pi x \sin \theta / \lambda) dx$$

$$A = a_0 h b \frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{(\pi b \sin \theta / \lambda)}$$

$$2.b. I = A A^* = I_0 \left[\frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{(\pi b \sin \theta / \lambda)} \right]^2$$

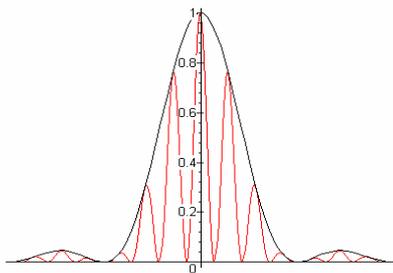
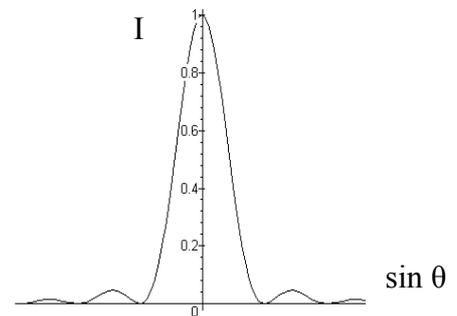
2.c.

Premier minimum : $(\pi b \sin \theta) / \lambda = \pi$; $\sin \theta = \lambda/b$

2d.

$$I = 2I_0 \left[\frac{\sin(\pi x / 3,5i)}{(\pi x / 3,5i)} \right]^2 (1 + \cos 2\pi x/i) \text{ on observe 7}$$

franges brillantes dans la tache centrale.



B.IV. Réseau

B.IV.1. Étude d'un réseau plan par transmission :

1.a. La différence de marche entre deux faisceaux successifs est $\delta = a(\sin\theta_k - \sin\theta_i)$
 $\delta = k\lambda$ avec $a = 10^{-3}/n$

1.b. $\theta_1 = 0$; $\sin \theta_k = k\lambda/a$; $-1 < \sin\theta_k < 1$;

On observe complètement les ordres : -2, -1, 0, 1, 2

On observe un recouvrement à partir du deuxième ordre :

Pour le rouge de l'ordre 2 : $\theta_2 = 79,5^\circ$ et pour le violet de l'ordre 3 : $\theta_3 = 54^\circ$

B.IV.2. Pouvoir de résolution.

2.a.

$$a \cos\theta_k d\theta_k = k d\lambda$$

2.b.

La largeur du faisceau est $b = L \cos\theta_k = Na \cos\theta_k$

La demi largeur du faisceau de diffraction est $d\theta = \lambda/b = \lambda/Na \cos\theta_k$

2.c.

Critère de Rayleigh : $d\theta_k = d\theta$; $nkd\lambda = \lambda/N a \cos\theta_k$; $R = kN$

N est le nombre de traits utiles : $N = L/a = nL$

Pour avoir un bon pouvoir de résolution : k élevé et N le plus grand possible.

2.d.

Dans ce type de réseau les spectres sont dans la tache de diffraction d'un trait, le maximum d'intensité est pour l'ordre zéro, les ordres suivants sont moins lumineux. D'autres réseaux de type échelle permettent d'obtenir le maximum d'intensité dans un ordre élevé.

C. Déplacement Doppler des raies émises par l'étoile.

C.I. Effet Doppler.

1. $t_1 c = x_E - V_0 t_1$

2. La durée est $t_2 - t_1$; $c(t_2 - t_1) = x_E + tV_E - V_0 t_2$

$$(t_2 - t_1) = \frac{1 + \frac{V_E}{c}}{1 + \frac{V_0}{c}} t$$

$$T' = \frac{1 + \frac{V_E}{c}}{1 + \frac{V_0}{c}} T ; \text{ pour } V_E = V_0 \text{ on a } T = T'$$

4. $T' = (1 + \frac{V_E - V_0}{c}) T$; $\Delta T/T$ ne dépend que de la vitesse relative de l'étoile par rapport à

l'observateur, ce résultat est lié à la relativité restreinte où la vitesse de la lumière est la même dans tout référentiel galiléen.

5. $\Delta T/T = \beta = \Delta\lambda/\lambda$ on a la même relation qu'à la question précédente.

6. $V = 1,1 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1}$. L'amas s'éloigne $\Delta\lambda > 0$

L'univers est en expansion.

C.II. Découverte d'une planète extra-solaire orbitant autour de τ Bootis.

1.a.

$\Delta\lambda/\lambda$ dépend du temps car :

- la vitesse de l'observateur par rapport au référentiel héliocentrique dépend du temps : mouvement diurne et annuel de la terre.
- $(\vec{v}_E)_R = (\vec{v}_I + \vec{v}_E^*)_R$ La vitesse radiale du centre d'inertie varie lentement, la vitesse radiale de l'étoile dans le référentiel barycentrique varie avec la période de rotation de la planète.

On les différencie par leur période.

1.b.

$$\Delta\lambda/\lambda = (v_E^*/c) \cos(2\pi t/T + \varphi)$$

1.c.

$$R = \lambda/\Delta\lambda = (1/10) (c/v_E^*) = 6,4 \times 10^4$$

Il faut un spectroscopie à très fort pouvoir de résolution, on utilise un système associant un réseau et un prisme dit à « dispersion croisée » où R peut atteindre 15×10^4

2.

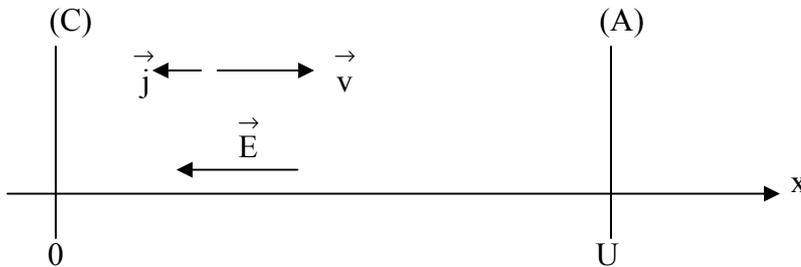
$$v_{RM} = v_E^* \sin i$$

On peut obtenir la période de la planète, mais on mesure par cette méthode « $m \times \sin i$ » seulement.

ONDES GUIDÉES DANS LE DOMAINE CENTIMÉTRIQUE

D. Production des ondes électromagnétiques dans le domaine des hyperfréquences

D.I.1.



$$\left[\begin{array}{l} \vec{j} = -ne \vec{v} = \rho \vec{v} \\ \frac{1}{2} m \cdot v^2 = eV \\ \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \\ \vec{j} = -\frac{I}{S} \cdot \vec{e}_x \Rightarrow j = -\frac{I}{S} \end{array} \right.$$

$$D.I.2. \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad \text{et} \quad \rho = -\frac{I}{Sv} \Rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{I}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot V^{-1/2} = 0$$

$$V = Kx^p \Rightarrow p(p-1)Kx^{p-2} - \frac{I}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2e}} \times \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot x^{-p/2} = 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad K = \left(\frac{9}{4} \frac{I}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2e}} \right)^{2/3}$$

D.I.3. On fait $x = a \Rightarrow I = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{\epsilon_0 S}{a^2} \cdot U^{3/2}$

$$\frac{4}{9} \sqrt{\frac{2e}{m}} \epsilon_0 = 2,35 \times 10^{-6} \text{ SI} \Rightarrow I = 0,232 \text{ A}$$

D.I.4. $v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$ or $V \propto x^{4/3} \Rightarrow v \propto x^{2/3} \Rightarrow v = v_A \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}$

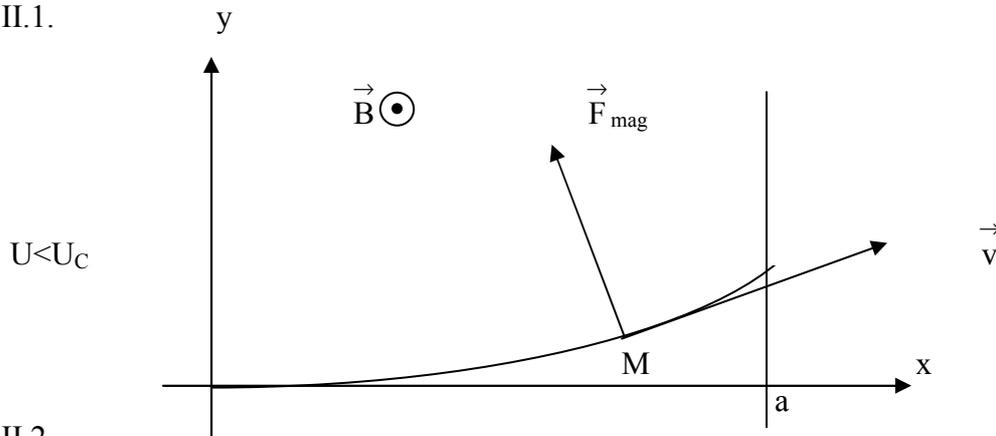
$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_A}{a^{2/3}} x^{2/3} \Rightarrow x^{-2/3} dx = \frac{v_A}{a^{2/3}} dt \Rightarrow 3 x^{1/3} = \frac{v_A}{a^{2/3}} t$$

$$\Rightarrow 3a^{1/3} = \frac{v_A}{a^{2/3}} T \Rightarrow T = 3 \frac{a}{v_A} = 3a \sqrt{\frac{m}{2eU}} = 0,64 \times 10^{-9} \text{ s.}$$

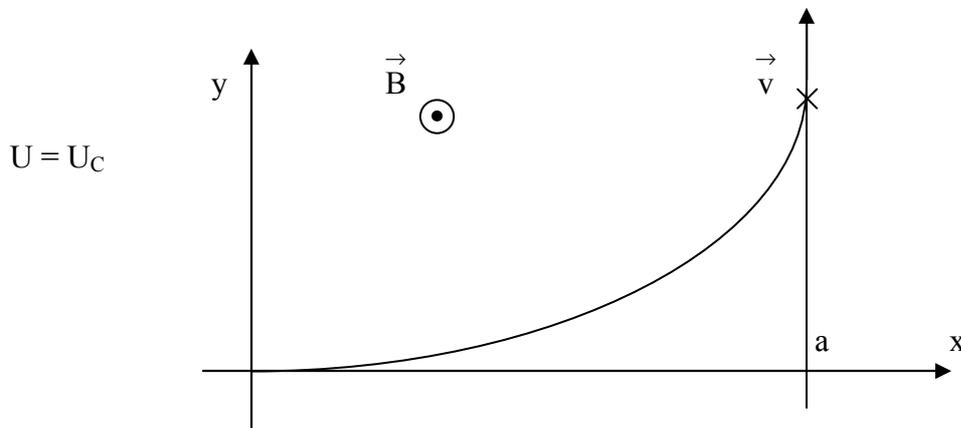
$$f = \frac{1}{T} \sim \text{GHz.}$$

D.I.5. Diode à vide : antique phanotron d'EDISON.

D.II.1.



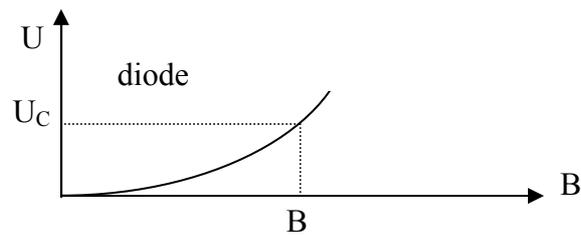
D.II.2



$$m \vec{a} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{mag} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{eU}{ma} - e \frac{B}{m} \dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = e \frac{B}{m} \dot{x} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \dot{y} = e \frac{B}{m} x \quad ; \quad x = a, \dot{x} = 0 \Rightarrow v_A = \frac{eB}{m} a \quad \text{Or, } v_A = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

On égale les 2 expressions de v_A : $U_C = \frac{ea^2}{2m} B^2 = 8,89 \times 10^{11} B^2 \cdot a^2$: parabole de coupure.



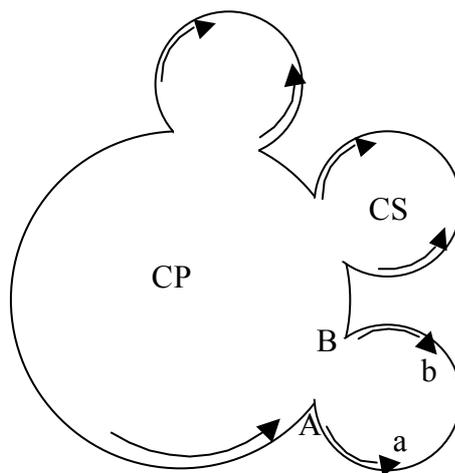
$U = 3 \text{ kV}$ donne $B = 0,015 \text{ T}$.

Un tel champ peut être créé par un aimant.

D.II.3. Oscillations à la fréquence $f \approx \frac{1}{T}$.

Naissance d'oscillations : c'est utile (c'est ce qu'on cherche à faire).

N.B. : (non demandé). Le mouvement des charges est évidemment très complexe : on admet en général le phénomène suivant. Le magnétron est en réalité constitué d'une cavité principale (CP) à laquelle sont adjacentes un certain nombre de cavités secondaires (CS) qui ne sont pas toutes représentées. Admettons que des électrons suivent la flèche dessinée dans CP ; quand ils s'approchent du point A, ils repoussent les électrons de CS (mouvement a) et, quand ils sont parvenus au voisinage de B, ils donnent aux électrons de CS le mouvement b. On comprend ainsi le mouvement oscillatoire qui peut naître.



E. Guide d'onde rectangulaire et cavité.

E.I.1. Aluminium très bon conducteur ; ce n'est pas le cas de l'alumine, la pellicule d'or évite l'oxydation de l'aluminium.

E.I.2. Conditions aux limites (champ nul en certains points quel que soit le temps) impossibles à satisfaire par une onde plane

E.I.3.a. Comme $\vec{E} = E_x \vec{e}_x$, $\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \underline{E} = E(y) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_x$

$$\square \underline{E} = \vec{0} \Rightarrow E''(y) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(y) = 0$$

Solutions sinusoïdales puisque $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0 \Rightarrow E(y) = A_1 \cos \alpha y + A_2 \sin \alpha y$.

E.I.3.b. Voir cours : champ électrique normal. En $y = 0$ ou $y = b$: $\vec{E} = \vec{E}_{\text{tangential}} = \vec{0} \Rightarrow E(0) = E(b) = 0$.

$E(0) = E(b) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$ et $\alpha \cdot b = n\pi$.

Modes : $\underline{E} = E_0^n \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_x$ $\vec{E} = E_0^n \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2 \quad n=1 \Rightarrow \omega = c \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2}{b^2}}$$

E.I.3.c. $x = 0$ ou $x = a$, $\vec{E} \perp$ parois $\Rightarrow \exists$ charges surfaciques.

$$\text{E.I.4.a. } \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} = k E_0 \sin \frac{\pi}{b} y \sin(\omega t - kz) \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\pi}{b} E_0 \cos \frac{\pi}{b} y \cos(\omega t - kz) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{B} \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \frac{k}{\omega} E_0 \sin \frac{\pi}{b} y \cos(\omega t - kz) \\ B_z = \frac{\pi}{b\omega} E_0 \cos \frac{\pi}{b} y \sin(\omega t - kz) \end{cases}$$

E.I.4.b. Voir cours. $B_y(0) = B_y(b) = 0$ continuité ; $B_z \neq 0 \Rightarrow \exists$ courants surfaciques.

NB (non demandé) : l'onde est TE car le champ électrique est perpendiculaire à Oz, direction de propagation.

Ce n'est pas une TM car le champ magnétique ne l'est pas : $\Rightarrow \exists B_z \neq 0$

E.I.5. $k^2 > 0 \Rightarrow \omega > \omega_c = \frac{\pi}{b} c$

$$f_c = \frac{c}{2b} \Rightarrow b = \frac{c}{2f_c} \Rightarrow b = \frac{c}{2f_c} = 12,2 \text{ cm}$$

$$E.I.6.a. \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \vec{\Pi} \begin{cases} 0 \\ -\frac{\pi}{\mu_0 b \omega} (E_0)^2 \sin \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi y}{b} \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz) \\ \frac{k}{\mu_0 \omega} (E_0)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{b} y \right) \cos^2(\omega t - kz) \end{cases}$$

$$E.I.6.b. \langle \vec{\Pi} \rangle \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{k}{2\mu_0 \omega} (E_0)^2 \sin^2 \frac{\pi y}{b} \end{cases} \quad \langle \Pi_z \rangle \neq 0 \Rightarrow \text{propagation de l'énergie selon Oz.}$$

$$E.I.6.c. P_m = \iint \langle \Pi_z \rangle dx dy = \frac{k}{2\mu_0 \omega} (E_0)^2 a \int_0^b \sin^2 \left(\frac{\pi}{b} y \right) dy = \frac{kab}{4\mu_0 \omega} (E_0)^2$$

$$E_0 = 14600 \text{ V.m}^{-1}$$

$$E.II.1. \text{ De même, comme } \vec{E} = E_x \vec{e}_x, \quad \text{div } \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow E_x(y, z) = f(y) \times h(z)$$

$$\square \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow f''(y)g(z) + f(y)g''(z) + \frac{\omega^2}{c^2} f(y)g(z) = 0$$

$$\left[\frac{f''}{f} \right](y) + \left[\frac{g''}{g} \right](z) = -\frac{\omega^2}{c^2} = \text{constante} \text{ donc } \frac{f''(y)}{f(y)} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{g''(z)}{g'(z)} = \beta.$$

f et g sont des exponentielles ou des fonctions sinusoidales.

E.II.2. $\omega^2 > 0$. Par ailleurs, les conditions aux limites font qu'il ne peut s'agir que de fonctions sinusoidales. Le champ électrique dans le métal conducteur supposé parfait est nul. Comme la composante tangentielle du champ électrique est continue, on en déduit :
 $f(0) = f(B) = g(0) = g(C) = 0$ donc f(y) de la forme $\sin k_2 y$ avec $k_2 B = \ell \pi$ et g(z) de la forme $\sin k_3 z$ avec $k_3 C = m \pi$:

$$\text{Modes } (\ell, m) : k_2 = \frac{\ell \pi}{B}, \quad k_3 = \frac{m \pi}{C} \quad \text{et} \quad \omega^2 = c^2 \left[\frac{\ell^2 \pi^2}{B^2} + \frac{m^2 \pi^2}{C^2} \right]$$

E.II.3. Un mode : il peut y avoir des nœuds où le champ est nul et où il n'y a pas de cuisson.

F. « Modélisation d'une substance à réchauffer »

$$F.I. q = -e \Rightarrow \vec{j} = nq \vec{v} \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = n \vec{v} \cdot (\vec{q} \cdot \vec{E}) = n \left(\vec{F}_{el} \cdot \vec{v} \right) = n P_{el} \text{ soit } \frac{dP_{el}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$F.II. \frac{dP_{el}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma \cdot E^2 + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E}. \text{ Si } \vec{P} \text{ est en phase avec } \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \text{ est en quadrature et}$$

$$\left\langle \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right\rangle = 0. \text{ Seul l'effet JOULE contribue à la dépense de puissance moyenne.}$$

$$\text{F.III.1. } \underline{\vec{P}} = \epsilon_0(\epsilon' - 1 - i\epsilon'')\underline{\vec{E}} \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 E_0 [(\epsilon' - 1)\cos\omega t + \epsilon''\sin\omega t]\vec{e}$$

$$\text{F.III.2. } \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \omega \epsilon_0 E_0 [-(\epsilon' - 1)\sin\omega t + \epsilon''\cos\omega t]\vec{e}$$

$$\Rightarrow \frac{dP_{el}}{d\tau} = \omega \epsilon_0 E_0^2 [-(\epsilon' - 1)\sin\omega t \times \cos\omega t + \epsilon''\cos^2\omega t] \Rightarrow \langle \frac{dP_{el}}{d\tau} \rangle = \frac{1}{2} \omega \epsilon_0 \epsilon'' E_0^2 \neq 0.$$

$$\text{F.III.3. } E_0 = 1880 \text{ V.m}^{-1}.$$