

Electrostatique

1- à 4-

Les lignes de champ sont des courbes orthogonales aux surfaces équipotentielles.

♦ Théorème de l'extremum : Il ne peut y avoir d'extremum local de potentiel dans une zone sans charges. En effet l'existence d'un extremum serait en contradiction avec  $\Delta V = 0$

♦ Exploitation des figures 1a et 1b (cf. énoncé).

- La figure 1b permet de conclure qu'à grande distance l'allure du champ est dipolaire, ce qui implique que la charge totale de la distribution est nulle.

- La figure 1a montre que :  $q_A < 0$ ,  $q_B > 0$ ,  $q_D > 0$  et  $E(C) = 0$ .

Cette dernière égalité conduit à la relation :  $q_A \frac{AC}{AC^3} + q_B \frac{BC}{BC^3} + q_D \frac{DC}{DC^3} = 0$ .

En projetant cette relation sur l'axe horizontal et en le combinant avec  $q_A + q_B + q_D = 0$ , il vient facilement :  $q_B = q > 0$ ,  $q_D = 4q$  et  $q_A = -5q$ .

5-

Un conducteur est dit en équilibre électrostatique s'il n'est le siège d'aucun courant —  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$  —. Cette relation entraîne qu'à l'intérieur du conducteur le champ électrique reste nul et que le potentiel est uniforme :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ V &= \text{cst} \end{aligned}$$

Compte tenu de  $\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  et  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  il vient facilement que  $\rho = 0$ .

♦ En régime variable, la loi d'Ohm  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$  et l'équation de conservation de la charge  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0$

conduisent à  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$  avec  $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$ .

$\tau$  est le temps de relaxation du métal. Pour un métal usuel on obtient  $\tau = 10^{-18} \text{ s}$ . Cette valeur de  $\tau$  est trop faible pour que l'on puisse considérer que les porteurs de charge ont atteint la vitesse limite — autrement dit  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$  n'est pas valable à cette échelle de temps —.

♦ Les charges portées par un conducteur en équilibre électrostatique sont localisées au niveau de sa surface. A l'intérieur du conducteur  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ , d'où, en utilisant les relations de passage,  $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}$  au

voisinage immédiat de la surface du conducteur.

♦ Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ. Les courbes A, I et E sont absurdes.

Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles. Il est donc impossible que C en soit une.  $Q_1$  positif entraîne que D et F sont absurdes. B étant correcte,  $V_1$  est positif.  $V_2$  négatif entraînerait une contradiction avec le théorème de l'extremum. En effet l'équipotentielle  $V = 0$ , qu'il faudrait alors compléter sur le schéma, entourerait le conducteur 2. Et comme  $Q_2$  est nulle on aurait alors  $V_2 = 0$ , ce qui est absurde.

Il apparaît donc que  $V_2$  est positif. Les bonnes lignes de champs sont J, G et B et il vient alors l'inégalité  $V_1 > V_2 > 0$ .

# Ondes- Propagation d'ondes acoustiques

Ultrasons : sons de fréquences supérieures à 20 kHz.

Applications pratiques des ondes ultrasonores :

- sonar,
- échographie.

## 2.2. Travaux pratiques : mesure de la vitesse du son.

### Mesure directe

Placer le récepteur d'ondes ultrasonores R face à l'émetteur E, fonctionnant en mode «Salves».

Visualiser à l'oscilloscope : en  $Y_A$ , la tension fournie par l'émetteur, en  $Y_B$ , la tension reçue par le récepteur.

Choisir la position initiale du récepteur, repérée par son abscisse  $d_1$  sur une règle graduée, de façon à ce que les deux oscillogrammes «démarrant au même instant».

Déplacer ensuite le récepteur à différentes abscisses  $d_2, d_3, \dots$

Observer la courbe de la voie  $Y_B$  à l'oscilloscope : celle-ci se décale par rapport à la position précédente, et «démarré» un temps  $t_2, t_3, \dots$  après celle de la voie  $Y_A$ .

Déterminer  $t_2, t_3, \dots$  connaissant la vitesse de balayage.

En déduire la vitesse des ondes ultrasonores, en effectuant une moyenne des valeurs obtenues pour les différentes positions :

$$v_k = \frac{d_k - d_1}{t_k}$$

### Mesure indirecte

Utiliser l'émetteur en mode «Permanents».

Placer le récepteur face à l'émetteur de façon à ce que les deux signaux  $Y_A$  et  $Y_B$  soient en phase.

Noter la position correspondante  $d_1$  du récepteur.

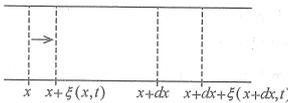
Déplacer ensuite le récepteur jusqu'à retrouver une première, puis une seconde, ... puis une dixième fois, le signal  $Y_B$  en phase avec  $Y_A$ .

Noter la position  $d_2$  correspondante.

En déduire la longueur d'onde  $\lambda$  :  $\lambda = \frac{d_2 - d_1}{10}$  puis la vitesse des ondes ultrasonores :  $v = \lambda f$ .

## 2.3. Propagation d'une onde sonore dans un fluide homogène non visqueux.

### 2.3.1.



Application Numérique :  $c = \sqrt{\frac{\lambda \cdot \rho_0}{\rho_0}} = 328 \text{ m.s}^{-1}$

2.3.3.  $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$  représente une onde plane progressive se propageant dans le sens des x croissants.

$g\left(t + \frac{x}{c}\right)$  représente une onde plane progressive se propageant dans le sens des x décroissants.

$p(x, t)$  satisfaisant aussi une équation de d'Alembert, peut s'écrire sous la forme :

$$p(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c} f_1'\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{1}{c} g_1'\left(t + \frac{x}{c}\right) = -\rho_0 \left[ f_1'\left(t - \frac{x}{c}\right) + g_1'\left(t + \frac{x}{c}\right) \right]$$

ce qui implique :

$$f_1' = \rho_0 c f' \quad \text{et} \quad g_1' = -\rho_0 c g'$$

D'où :

$$f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) = \rho_0 c \int f\left(t - \frac{x}{c}\right) dx + \Phi$$

$$g_1\left(t + \frac{x}{c}\right) = -\rho_0 c \int g\left(t + \frac{x}{c}\right) dx + \Psi$$

Au repos : u donc f et g sont nuls ainsi que p d'où :  $\Phi + \Psi = 0$  et :

$$p(x, t) = \rho_0 c \left[ f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right) \right]$$

### 2.3.4. Aspect énergétique.

#### 2.3.4.1.

$$p(x, t) = p_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$u(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho_0 c} = U_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{avec } U_0 = \frac{p_0}{\rho_0 c}$$

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{avec } \xi_0 = \frac{p_0}{\rho_0 c \omega}$$

#### 2.3.4.2.

$$e_c = \frac{1}{2} \rho_0 u^2$$

$$e_p = \frac{1}{2} \chi_S p^2 = \frac{1}{2} \rho_0 U^2$$

$$e = e_c + e_p = \rho_0 u^2$$

#### 2.3.4.3.

$$I = \rho_0 c \langle u^2 \rangle = \rho_0 c \frac{U_0^2}{2} = \frac{p_0^2}{2 \rho_0 c}$$

Equation traduisant le principe fondamental de la dynamique :

$$\rho S dx \frac{du}{dt} = S P(x, t) - S P(x + dx, t) = -S \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1$$

$$P = P_0 + p$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$$

2° ordre

En linéarisant au premier ordre :

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Au repos, le volume de la tranche de fluide considérée est :

$$dV_0 = S dx$$

Au passage de la perturbation :

$$dV = S [x + dx + \xi(x + dx, t) - (x + \xi(x, t))] = S dx \left[ 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]$$

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = -\frac{1}{dV_0} \frac{dV - dV_0}{P - P_0} = -\frac{1}{P} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$p(x, t) = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

### 2.3.2.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Équations de d'Alembert avec

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$$

Gaz parfait :

$$\chi_S = \frac{1}{\gamma P_0} \quad \rho_0 = \frac{M P_0}{R T}$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

Application numérique :  $\rho_0 = 1.2 \mu_0 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-3}$

$$u_0 = \frac{p_0}{\rho_0 c} = 6.7 \cdot 10^{-8} \text{ m.s}^{-1}$$

$$\xi_0 = \frac{p_0}{\rho_0 c \omega} = 0.11 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

### 2.3.4.4. Ordre de grandeur du niveau sonore :

- d'un bureau calme : 60 dB,
- d'une alarme de voiture : 90 - 100 dB,
- du seuil de douleur : 120 dB.

## 2.4. Réflexion et transmission des ondes sonores.

### 2.4.1.

$$k = \frac{\omega}{c_1}$$

### 2.4.2. Onde réfléchie :

$$P_r = \underline{P}_r P_0 e^{i(\omega t + kx)}$$

Onde transmise :

$$P_t = \underline{P}_t P_0 e^{i(\omega t - k_2 x)}$$

Les ondes incidente, réfléchie et transmise ont même pulsation.

Dans le milieu (1)

$$k = \frac{\omega}{c_1}$$

Dans le milieu (2)

$$k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

Vitesses vibratoires :

- onde incidente

$$\underline{u}_i = \frac{P_i}{\rho_1 c_1} = \frac{P_0}{\rho_1 c_1} e^{i(\omega t - kx)}$$

- onde réfléchie

$$\underline{u}_r = -\frac{P_r}{\rho_1 c_1} = -\frac{P_r}{\rho_1 c_1} e^{i(\omega t + kx)}$$

- onde transmise

$$\underline{u}_t = \frac{P_t}{\rho_2 c_2} = \frac{P_t}{\rho_2 c_2} e^{i(\omega t - k_2 x)}$$

### 2.4.3. En $x = 0$ continuité de la surpression vibratoire, et de la vitesse vibratoire.

Dans le milieu (1) :

$$P = \underline{P}_i + \underline{P}_r$$

Dans le milieu (2) :

$$P = \underline{P}_t$$

$\underline{P}_i(x=0) = \underline{P}_t(x=0)$

$$\Rightarrow$$

$\underline{u}_i(x=0) = \underline{u}_t(x=0)$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho_1}$$

$$\underline{r} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

$$\underline{t} = \frac{2 \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

$\underline{r} = t$  : réel, positif : aucun déphasage à la transmission.

$\underline{r} = r$  : réel  
 - si  $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$   $r > 0$  : aucun déphasage à la réflexion,  
 - si  $\rho_2 c_2 < \rho_1 c_1$   $r < 0$  : déphasage de  $\pi$  à la réflexion,  
 - si  $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$   $r = 0$  : pas d'onde réfléchie.

2.4.4.

$$I_i = \frac{P_0^2}{2 \rho_1 c_1}$$

$$I_r = \frac{r^2 P_0^2}{2 \rho_1 c_1}$$

$$I_t = t^2 \frac{P_0^2}{2 \rho_2 c_2}$$

$$R = \frac{I_r}{I_i} = r^2$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = t^2 \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}$$

$$R = \left( \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \right)^2$$

$$T = \frac{4 \rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}$$

$R + T = 1$  : conservation de la puissance totale.

2.4.5.  $\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2$

$r \rightarrow +1$

$R \rightarrow 1$

$t \rightarrow 2$

$T \rightarrow 0$

Le signal transmis est d'amplitude double, mais transporte une énergie très faible.

Application Numérique :  $T = \frac{4 \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} = 1,3 \cdot 10^{-3}$   $R = 0,9987$ .

Atténuation en dB :  $10 \log T = 29$  dB.

Il y a réflexion pratiquement totale de la puissance sonore. Le milieu sous-marin est « isolé » des bruits de la surface : c'est le « Monde du silence ».

Dans le domaine  $x < 0$  :

$$p_i = p_i + p_r = p_0 (e^{-ikx} + e^{+ikx}) e^{i\omega t} = 2 p_0 \cos kx e^{i\omega t}$$

$$u_i = u_i + u_r = \frac{p_0}{\rho_1 c_1} (e^{-ikx} - e^{+ikx}) e^{i\omega t} = -2 \frac{p_0}{\rho_1 c_1} \sin kx e^{i\omega t}$$

en réel :

$$p_i(x, t) = 2 p_0 \cos kx \cos \omega t$$

$$u_i(x, t) = \frac{2 p_0}{\rho_1 c_1} \sin kx \sin \omega t$$

2.4.6.  $\rho_1 c_1 \gg \rho_2 c_2$

$r \rightarrow -1$

$R \rightarrow 1$

$t \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

Le signal transmis transporte toujours une énergie très faible.

Application Numérique :  $T = 4 \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} = 1,3 \cdot 10^{-4}$ .

Atténuation en dB :  $10 \log T = 39$  dB.

Dans le domaine  $x < 0$

$$p_i = p_i + p_r = p_0 (e^{-ikx} - e^{+ikx}) e^{i\omega t} = -2 i p_0 \sin kx e^{i\omega t}$$

$$u_i = u_i + u_r = \frac{p_0}{\rho_1 c_1} (e^{-ikx} + e^{+ikx}) e^{i\omega t} = \frac{2 p_0}{\rho_1 c_1} \cos kx e^{i\omega t}$$

en réel :

$$p_i(x, t) = 2 p_0 \sin kx \sin \omega t$$

$$u_i(x, t) = 2 \frac{p_0}{\rho_1 c_1} \cos kx \sin \omega t$$

2.4.7. Réflexion quasi-totale de l'énergie dès que deux milieux sont d'impédances caractéristique différentes, quelque soit l'ordre de ces milieux.

### PARTIE 3

#### ÉTUDE D'UN ÉMETTEUR SONORE LA CORDE VIBRANTE

3.1. Équation d'onde pour un ébranlement le long de la corde.

3.1.1.

$$\mu dx \vec{a} = \vec{T}'(x+dx) - \vec{T}'(x)$$

En projection sur Oy :

$$\mu dx \frac{d^2 y}{dt^2} = T \sin \theta (x+dx, t) - T \sin \theta (x, t)$$

$\theta$  petit : au premier ordre :  $\sin \theta = \theta = \tan \theta = \frac{dy}{dx}$ .

$$\frac{dy}{dt} \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dy}{dt} = \frac{d^2 y}{dx dt}$$

2° ordre

## Optique- Etude d'une couche mince diélectrique

58. On en déduit 
$$U_T = t_{01} t_{12} \frac{1}{1 - r_{10} r_{12} e^{i\phi}} = \frac{t_{01} t_{12}}{1 + r_{01} r_{12} e^{-i\phi}}$$

1. Par définition : 
$$R = \frac{\Phi_{réfléchi}}{\Phi_{incident}} = \frac{n_0 |E_r|^2}{n_0 |E_i|^2} = \frac{(r_{01})^2 + (r_{12})^2 + 2 r_{01} r_{12} \cos \phi}{1 + (r_{01})^2 (r_{12})^2 + 2 r_{01} r_{12} \cos \phi}$$

et 
$$T = \frac{\Phi_{transmis}}{\Phi_{incident}} = \frac{n_2 |E_t|^2}{n_1 |E_i|^2} = \frac{n_2 (t_{01})^2 (t_{12})^2}{1 + (r_{01})^2 (r_{12})^2 + 2 r_{01} r_{12} \cos \phi}$$

ou 
$$(t_{01})^2 = \frac{n_0}{n_1} (1 - (r_{01})^2) \quad (t_{12})^2 = \frac{n_1}{n_2} (1 - (r_{12})^2) \quad \text{d'où } R + T = 1$$

5.  $n_0 < n_1 < n_2 \Rightarrow r_{01}$  et  $r_{12}$  sont négatifs,  $r_{01} r_{12}$  positif et

T maximum pour  $\cos \phi = -1$  T minimum pour  $\cos \phi = +1$

$$\Rightarrow T_{max} = \frac{n_2 (n_1)^2 (n_2)^2}{n_0 (1 - r_{01} r_{12})^2} \quad \Rightarrow T_{min} = \frac{n_2 (n_1)^2 (n_2)^2}{n_0 (1 + r_{01} r_{12})^2}$$

$T(\phi)$ , courbe oscillante entre  $T_{max}$  et  $T_{min}$  (cos)

6. R minimum  $\Leftrightarrow$  T maximum  $\Leftrightarrow \cos \phi = -1 \Leftrightarrow \phi = (2q+1)\pi \Leftrightarrow L = \frac{\lambda}{4n_1} + q \frac{\lambda}{2n_1} \quad q \in \mathbb{N}$

7. a. 
$$R_0 = \left( \frac{n_0 - n_2}{n_0 + n_2} \right)^2 = 0,042$$

b.  $L = 996 \text{ \AA} = \frac{\lambda}{4n_1} \Rightarrow \phi = \pi$  et R minimum

$$R = \frac{(r_{01} - r_{12})^2}{(1 - r_{01} r_{12})^2} \quad \text{avec } r_{01} = \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \quad \text{et } r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \Rightarrow R = 0,0126$$

La couche d'indice  $n_1$  est anti-réfléchissante.

Thermodynamique- Diffusion  
Evolution d'un système composé

25

On suppose  $\tau_D \ll$  temps caractéristique d'évolution de  $T_1$  et  $T_2$  :  $\uparrow$   
 Nous  $T(x,t) \approx T_1(t) + (T_2(t) - T_1(t)) \frac{x}{L} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_2(t) - T_1(t)}{L}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dT_1}{dt} = \frac{kS}{C_1 L} (T_2 - T_1) \\ \frac{dT_2}{dt} = -\frac{kS}{C_2 L} (T_2 - T_1) \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt} (T_2 - T_1) = -\frac{kS}{L} \left( \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) (T_2 - T_1)$$

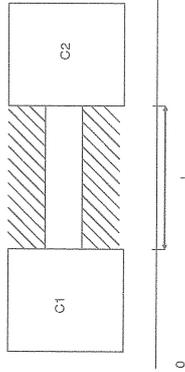
$$\Rightarrow T_2 - T_1 = (T_{20} - T_{10}) e^{-t/\tau} \quad \text{or} \quad \Delta T = \tau \ln 2$$

$$\text{De plus : } \frac{d}{dt} (C_1 T_1 + C_2 T_2) = 0$$

$$\Rightarrow T_1(t) = \frac{C_1 T_{10} + C_2 T_{20}}{C_1 + C_2} - \frac{C_2}{C_1 + C_2} (T_{20} - T_{10}) e^{-t/\tau}$$

$$T_2(t) = \frac{C_1 T_{10} + C_2 T_{20}}{C_1 + C_2} + \frac{C_1}{C_1 + C_2} (T_{20} - T_{10}) e^{-t/\tau}$$

Revenons au problème initial:  $\tau_D \ll \tau \Leftrightarrow LC_1 C_2 S \ll \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot \text{mK}$



1. Réponse du bloc 1: profil affine  $\Rightarrow T(x) =$

2. Lois d'évolution pour (1) et (2):

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = k S \frac{\partial T}{\partial x}$$

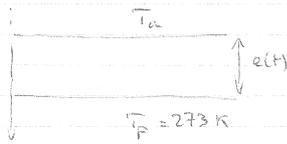
$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = -k S \frac{\partial T}{\partial x}(L,t)$$

Dans la limite  $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  D:

Temps caractéristique  $\tau_D \sim L^2 \frac{C_1 C_2}{k}$

# Gel d'un lac

Exo 2: gel d'un lac (X.p 73) <sup>air</sup>



Observations:  $e(t)$  augmente en  $T$   
 On se place a A.R.S.  $\tau \gg \tau_{diff}$   
 où  $\tau_{diff} = L^2 / D_H$

1<sup>ère</sup> étape: hypothèse où  $T(z=0, t) = T_a \Rightarrow e \frac{de}{dt} = \frac{\lambda}{\rho l_F} (T_F - T_a)$  et  $\tau \sim \frac{\rho l_F e^2}{\lambda (T_F - T_a)}$   
 A.R.S.  $\Rightarrow \tau \gg \tau_{diff} \Rightarrow \frac{\rho l_F e^2}{\lambda (T_F - T_a)} \gg \frac{e^2}{D_H}$  et  $T_F - T_a \ll \frac{l_F}{c} \sim 100 \text{ K} \Rightarrow$  négligeable

2<sup>ème</sup> étape: à court terme l'hypothèse précédente a conduit la diffusion n'est que la convection n'est  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ . Loi phénoménologique de Newton,  $\phi_{cc} = hS(T_s - T_a)$  avec  $T_s = T(z=0, t)$  et  $h$  - coef. qui  $\nearrow$  si le vent souffle fort

1<sup>ère</sup> étape: 1<sup>er</sup> peup à la couche d'eau d'épaisseur  $e$  qui gèle entre  $t$  et  $t+dt$ :  $dU = -\phi dt$  147

où  $\phi = \frac{\lambda S}{e(t)} (T_F - T_a) > 0$  (car  $T_F > T_a$ :  $\phi$  de l'eau vers l'air)

$dH = dm(-l_F) = -\rho S de l_F$  car  $l_F$ : enthalpie massique de congélation soit  $dH = dU$

$-\rho S de l_F = -\phi dt$  et  $e \frac{de}{dt} = \frac{\lambda}{\rho l_F} (T_F - T_a) \Rightarrow \frac{e^2(t)}{2} - \frac{e^2(0)}{2} = \frac{\lambda}{\rho l_F} (T_F - T_a) t$  soit  $e^2 \propto t$

Durée caractéristique?  $\frac{de}{dt} \sim \frac{e}{\tau}$  soit  $\tau = \frac{\rho l_F e^2}{\lambda (T_F - T_a)} \gg \tau_{diff} = \frac{e^2}{D_H} = \frac{e^2 c}{\lambda}$

soit  $T_F - T_a \ll \frac{l_F}{c}$

2<sup>ème</sup> étape: surface du lac =  $\Sigma$  sans masse soit  $U = 0 \forall t$ .  $\Sigma$  reçoit un flux diffusif de la part de la glace et cède un flux convection-convectif  $\phi_{cc}$  à l'air.  $dU = \delta Q \Rightarrow \phi - \phi_{cc} = 0$

On doit remplacer  $T_a$  par  $T_s$  (température de surface effective):

$\phi = \frac{\lambda S}{e} (T_F - T_s) = hS(T_s - T_a)$  soit  $T_s = \frac{T_a + (\lambda/ch) T_F}{1 + (\lambda/ch)}$

En particulier  $T_s \approx T_a$  si  $h \gg \lambda/e$  (vent fort)

On reprend:  $-\rho S de l_F = -dt \frac{\lambda S}{e} (T_F - T_s)$  soit  $e \frac{de}{dt} = \frac{\lambda}{\rho l_F} \left( \frac{T_F - T_a}{1 + \lambda/eh} \right)$

ie.  $\frac{de}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{T_F - T_a}{e + \lambda/h} \right) \left( e + \frac{\lambda}{h} \right) \frac{de}{dt} = \frac{\lambda}{\rho l_F} (T_F - T_a)$  ie.  $\frac{1}{2} \left( e + \frac{\lambda}{h} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( e(0) + \frac{\lambda}{h} \right)^2 = \frac{\lambda}{\rho l_F} (T_F - T_a) t$

$e \propto \sqrt{t}$

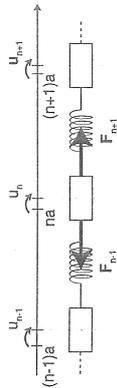


# Oscillateurs couplés

## A.1.c. Etude d'une chaîne d'oscillateur

### A.1.c.1. Etablissement de l'équation différentielle

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au point matériel  $M_n$  dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :



$$\begin{aligned}
 m\ddot{u}_n &= F_{n-1} - F_{n+1} \\
 F_{n-1} &= -K(u_n - u_{n-1}) \\
 F_{n+1} &= -K(u_{n+1} - u_n) \\
 \text{d'où : } m\ddot{u}_n &= -2Ku_n + K(u_{n-1} + u_{n+1}) \\
 \text{soit : } \ddot{u}_n + \left(\frac{2K}{m}\right)u_n - \frac{u_{n-1} - u_{n+1}}{2} &= 0
 \end{aligned}$$

on pose  $\omega_0^2 = \frac{2K}{m}$  et on obtient l'équation demandée.  $\omega_0$  est la pulsation propre du système fois dégénérée), elle s'exprime en  $s^{-1}$ .

### A.1.c.2. Approximation des milieux continus

Faisons un développement limité au premier ordre en  $x$  de la fonction  $u(x, t)$  en  $x + \frac{a}{2}$  et en  $x - \frac{a}{2}$

$$u(x + a, t) - u(x, t) \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}, t} a$$

$$u(x - a, t) - u(x, t) \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}, t} (-a)$$

L'équation différentielle précédente s'écrit alors :  $u_n - \frac{\omega_0^2}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}, t} a - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}, t} (-a) \right] \equiv a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_x$

et, en poussant le développement limité un ordre plus loin on déduit :  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}, t} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}, t} \equiv a \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_x$

Enfinement on obtient :  $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_x - \frac{a^2 \omega_0^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_x = 0$

La célérité  $c$  de l'onde s'exprime alors simplement par :  $c = \frac{a\omega_0}{\sqrt{2}}$ . Son unité est  $[m \cdot s^{-1}]$ .

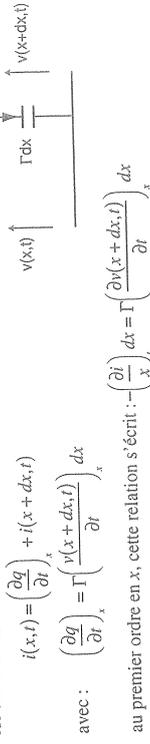
## B.3.b. Equation d'ondes — Impédance

L'approximation des régimes quasi permanents consiste à négliger le terme  $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$  dit « courant de déplacement » dans l'équation de Maxwell-Ampère.

Cette approximation est valable si ce terme est négligeable devant le courant de conduction :  $j = \sigma E$ , cela revient à comparer la fréquence du courant imposé dans la ligne à  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Le lecteur pourra reprendre

les calculs effectués dans l'application 3 de l'effet de peau de la session 1985.

Les équations couplées s'établissent en appliquant la loi des mailles et la loi des noeuds au noeud N :



$$\begin{aligned}
 i(x, t) &= \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_x + i(x + dx, t) \\
 \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_x &= \Gamma \left(\frac{\partial v(x + dx, t)}{\partial t}\right) dx
 \end{aligned}$$

au premier ordre en  $x$ , cette relation s'écrit :  $-\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_x dx = \Gamma \left(\frac{\partial v(x + dx, t)}{\partial t}\right) dx$

$$-\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_x = \Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_x \quad (1)$$

La loi des mailles conduit à :  $v(x, t) = \Lambda dx \left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)_x + v(x + dx, t)$

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_x = \Lambda \left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)_x \quad (2)$$

On dérive (1) par rapport à  $x$  et (2) par rapport à  $t$  :  $\left(\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}\right)_x = -\Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$  soit  $\Lambda \left(\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}\right)_x = -\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}$

Enfinement :  $\left(\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}\right)_x - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$

De même, on déduit l'équation de propagation correspondant à la tension :

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_x - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_x = 0$$

Ces deux grandeurs se propagent donc à la célérité  $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$

Si on admet des solutions de la forme  $i = f(x - ct)$  et  $v = g(x - ct)$  l'équation (1) conduit à :

$$(1) \Rightarrow -\frac{\partial f}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial g}{\partial t} = -\Gamma c \frac{\partial g}{\partial x} \text{ soit } \frac{\partial f}{\partial t} = \Gamma c \frac{\partial g}{\partial x}$$

on intègre cette relation par rapport à  $x$  :  $f = \Gamma c g$

on choisit la constante d'intégration nulle — c'est-à-dire pas de courant permanent — et on déduit :

$$Z_c = \frac{1}{\Gamma c} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$