Epreuve de Physique
Durée : 5 heures

I- Electrostatique : topographie du champ électrique

1- Quel est le lien géométrique entre les surfaces équipotentielles et les lignes de champ ?

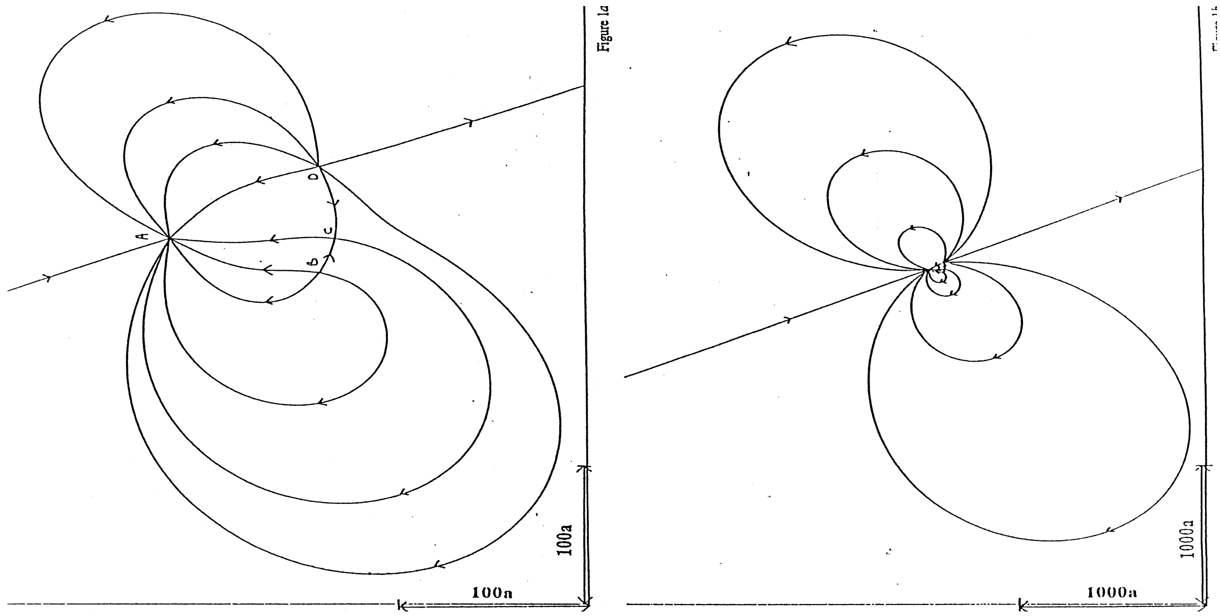


Figure 1 – a - b

Les figures $1a$ et $1b$ montrent à deux échelles différentes les lignes du champ $\vec{E}$ créé par un ensemble de charges ponctuelles. Toutes les charges créant ce champ sont dans le plan de la figure. Au moins un exemple de chaque type de ligne de champ est dessiné. On note q la valeur de la plus petite (en module) des charges. Les autres valeurs sont des multiples (positifs ou négatifs) de q. On donne les coordonnées cartésiennes des points $A \quad (24a, 75a)$, $B \quad (0, 0)$, $C \quad (24a, -8a)$ et $D \quad (75a, 0)$ où a est l'unité de longueur.

2- Commenter l'allure générale de la figure $1b$. De quelle distribution de charges particulière se rapproche la distribution étudiée ?

3- Déterminer le nombre et la position des charges utilisées. Justifier d'après les figures la nullité du champ $\vec{E}$ au point C.

4- Déterminer les valeurs des charges en fonction de q. Quel est le signe de q ?

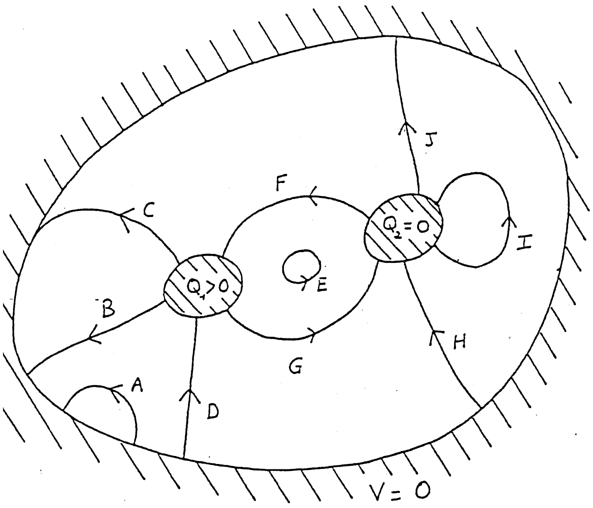
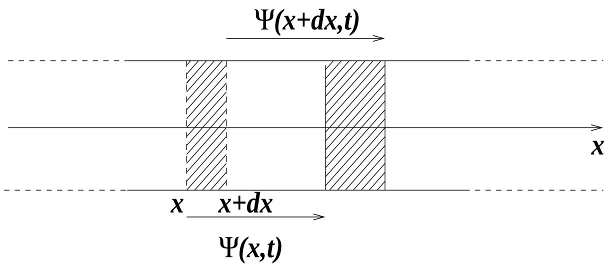


FIGURE 2 –

5- La figure 2 représente trois conducteurs. Le plus grand est creux, porté au potentiel $V = 0$ et entoure complètement une zone contenant les deux autres conducteurs. Le conducteur 1 porte une charge positive. Le conducteur 2 porte une charge globale nulle. Il n'y a pas de charge en dehors de celles qui sont portées par les conducteurs. Un certain nombre de courbes orientées sont dessinées. Certaines peuvent être des lignes de champ orientées par $\vec{E}$. D'autres ne peuvent pas l'être.
Donner la liste des bonnes et mauvaises lignes en justifiant les réponses. En déduire les signes des potentiels V_1 et V_2 de chacun des conducteurs internes et comparer $|V_1|$ à $|V_2|$.

<u>II- Ondes</u> : Propagation d'ondes acoustiques

On supposera que les parois des différents tuyaux qui interviennent dans ce problème n'exercent aucun frottement sur le(s) fluide(s). On néglige, de plus, l'action de la pesanteur. Un tuyau cylindre de section constante S, d'axe $x'x$, contient un fluide qui au repos est à la pression P_0, à la température T_0 ; sa masse volumique est ρ_0.



On considère une tranche de fluide qui, au repos, est située entre les abscisses x et $x + dx$. Le passage de l'onde acoustique s'accompagne d'un déplacement d'ensemble des molécules contenues dans le plan d'abscisse x : soit $\psi(x,t)$ ce déplacement à l'instant t ; ainsi la tranche de fluide considérée se trouve à l'instant t entre les plans $x+\psi(x,t)$ et $x+dx+\psi(x+dx,t)$. On note $u(x,t)$ la vitesse de déplacement de la section d'abscisse x à l'instant t, $\rho(x,t)$ la masse volumique du fluide de cette section, $p(x,t)$ la surpression liée au passage de l'onde en x à t. On se limitera aux mouvements de faibles amplitudes ; ainsi on pourra négliger dans la suite tous les infiniment petits d'ordre supérieur ou égal à deux.

1- En raisonnant sur la tranche de fluide considérée, établir, en précisant la loi utilisée que :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

2- Quelle hypothèse thermodynamique peut-on faire sur la nature de l'évolution du fluide ? Justifier. Montrer que cette hypothèse conduit à la relation :

$$p = -\frac{1}{\chi_s}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

3- Etablir l'équation à laquelle satisfait la grandeur $\psi(x,t)$. Montrer par un changement de variables approprié que cette équation s'écrit de manière équivalente :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0$$

Quelle est la solution générale de cette équation ? Quelle est l'interprétation de chacune des deux solutions à cette équation ? Quelle est l'expression de c, vitesse de propagation de l'onde ?
4- Montrer que les grandeurs $p(x,t)$ et $u(x,t)$ satisfont à la même équation de propagation que $\psi(x,t)$.
5- Le fluide considéré est de l'air considéré comme un gaz parfait :
- de $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.4$
- de masse molaire $M = 29\text{g.mol}^{-1}$
- de température $T_0 = 293\text{K}$

Justifier la valeur de γ. Calculer c.
6- On considère la propagation dans le fluide d'une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation ω qu'on représente en notation complexe par :

$$\underline{\psi_1}(x,t) = A_1 e^{i(\omega t - kx)}$$

où A_1 est une constante et k un réel positif (module du vecteur d'onde). On supposera dans cette question que le tuyau est infini et donc qu'il n'y a aucune onde réfléchie se superposant à ψ_1. Quel est le sens de propagation de cette onde ? Déterminer l'expression de k en fonction de ω et de c et calculer sa valeur pour l'air avec une fréquence de l'onde de 1kHz.
7- Exprimer alors $\underline{p_1}(x,t)$ et $\underline{u_1}(x,t)$, représentations complexes de la surpression et de la vitesse.
8- On appelle résistivité acoustique R la grandeur caractéristique du milieu définie par $R = \rho_0 c$. Montrer que le rapport $\frac{\underline{p_1}}{\underline{u_1}}$ s'exprime simplement en fonction de R.
9- Soit l'onde

$$\underline{\psi_1'}(x,t) = A_1' e^{i(\omega t + kx)}$$

$\underline{p_1'}$ et $\underline{u_1'}$ étant les ondes de surpression et de vitesse associées. Exprimer le rapport $\frac{\underline{p_1'}}{\underline{u_1'}}$ en fonction de la résistivité R du milieu.

Le tuyau est maintenant séparé en deux régions :
- la région (1) ($x < 0$) contient un fluide (1) de résistivité acoustique $R_1 = \rho_1 c_1$
- la région (2) ($x > 0$) contient un fluide (2) de résistivité acoustique $R_2 = \rho_2 c_2$

La surface de contact entre les deux fluides est donc le plan perpendiculaire en O à l'axe $x'x$. Une onde acoustique plane sinusoïdale se propage du milieu (1) vers le milieu (2) et est décrite en notation complexe par :

$$\underline{p_1}(x,t) = p_{O1} e^{i(\omega t - k_1 x)}$$

A l'interface entre les deux milieux, cette onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans le milieu (1) : $\underline{p_1}'$ et à une onde transmise dans le milieu (2) : $\underline{p_2}$. On admettra que les ondes réfléchie et transmise sont des ondes planes sinusoïdales d'amplitude respective p'_{O1} et p_{O2}. Justifier que la pression est continue en $x = 0$ et qu'il y a également continuité du débit volumique $S.u$.

10- Montrer que les ondes réfléchie et transmise sont de même pulsation ω que l'onde incidente.

11- Exprimer $\underline{p_1}'$ et $\underline{p_2}$.

12- En exploitant les conditions de continuité, exprimer en fonction de R_1 et R_2 les coefficients de réflexion r_{12} et de transmission t_{12} relatifs aux amplitudes des surpressions. Ces coefficients sont définis par les relations suivantes :

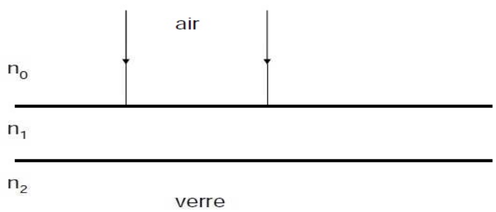
$$r_{12} = \frac{p'_{O1}}{p_{O1}} \quad t_{12} = \frac{p_{O2}}{p_{O1}}$$

13- On définit la puissance transportée par chaque onde par : $P = S|p.u|$. Déterminer les coefficients de réflexion R et de transmission T relatifs aux puissances acoustiques. Quelle relation lie R à T. Que traduit cette relation ?

14- Application numérique : le milieu (1) est de l'air et le milieu (2) est de l'eau. On prendra pour les résistivités acoustiques les valeurs suivantes : $R_1 = 4.5\,10^2$U.S.I et $R_2 = 1.4\,10^6$U.S.I. Déterminer R et T. Commenter.

III- Optique : Etude d'une couche mince diélectrique

Une couche mince diélectrique transparente d'indice de réfraction n_1 et d'épaisseur e est déposée sur du verre transparent d'indice n_2.



L'indice de l'air est n_0 . L'ensemble est éclairé en incidence normale par un faisceau parallèle de lumière monochromatique de longueur d'onde λ et d'amplitude unité. On note par r_{ij} le coefficient de réflexion de la surface séparant le milieu d'indice n_i du milieu d'indice n_j , la lumière venant du milieu d'indice n_i . On note par t_{ij} le coefficient de transmission correspondant.

1- On admettra que $r_{ij} = \frac{n_i - n_j}{n_i + n_j}$ et que $t_{ij} = \frac{2n_i}{n_i + n_j}$. Justifier brièvement comment on obtient ces deux expressions (la démonstration complète n'est pas demandée).

2- Quel phénomène d'optique ondulatoire se produit de part et d'autre de la lame de verre ?
3- On montre que l'amplitude complexe u_p du p$^{\text{ième}}$ rayon réfléchi par le système (p est un nombre entier quelconque) vaut :

$$u_p = t_{01}(r_{12})^{p-1}(r_{10})^{p-2}t_{10}e^{-(p-1)i\Phi}$$

Définir les différents paramètres intervenant dans la formule précédente. Φ désigne le déphasage du p$^{\text{ième}}$ rayon réfléchi par rapport au premier rayon réfléchi ? Quelle est son expression en fonction de λ, e et n_1 ?
4- En déduire la valeur de l'amplitude réfléchie totale $U_R = \sum_p u_p$.
5- Simplifier l'expression précédente en utilisant les relations suivantes (que l'on justifiera) : $r_{10} = -r_{01}$ et $t_{10} \times t_{01} = 1 - (r_{01})^2$. On montrera que :

$$U_R = \frac{r_{01} + r_{12}e^{-i\Phi}}{1 + r_{01}r_{12}e^{-i\Phi}}$$

6- En s'inspirant de ce qui a été vu précédemment, calculer l'amplitude v_p du p$^{\text{ième}}$ rayon transmis en prenant comme origine des phases la phase du premier rayon transmis. En déduire la valeur de l'amplitude totale $U_T = \sum_p v_p$ transmise par la couche mince.
7- Calculer les facteurs de réflexion $R = |U_R|^2$ et de transmission $T = \frac{n_2}{n_0}|U_T|^2$ de la couche mince d'indice n_1. Que vaut $R + T$? Interpréter.
8- On suppose que $n_0 < n_1 < n_2$. Représenter schématiquement les variations de T en fonction de Φ, déphasage introduit par la lame de verre.
9- En déduire les valeurs de Φ et donc de e pour lesquelles R est minimum.
10- Une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,55$mm tombe en incidence normale sur une lame de verre d'indice $n_2 = 1,52$ et d'épaisseur infinie. Calculer le facteur de réflexion R_0 de la surface de séparation air-verre.
11- On dépose sur cette lame une couche mince de fluorure de magnésium d'indice $n_1 = 1,38$ d'épaisseur $e = 996.10^{-10}$m. Calculer le facteur de réflexion de la lame de verre recouverte par cette couche mince en fonction de n_0, n_1 et n_2. Donner sa valeur numérique. Quelle l'application pratique de ce type de système ?

IV- Thermodynamique : Quelques problèmes de diffusion

A. Isolation d'un tube-

Un tube de rayon R_1 est entouré d'un manchon (de rayon intérieur R_1, extérieur R_2 et de conductivité thermique λ) qui l'isole du milieu extérieur supposé à la température T_0 constante.
Les échanges thermiques entre la surface du tube et l'isolant sont caractérisés par un coefficient de transfert h : la puissance thermique échangée par unité de surface est donnée par l'expression $h(T_1 - T_1')$ où T_1 représente la température du tube en $r = R_1$, et T_1' celle de l'isolant.
Les échanges thermiques isolant/air sont associés à un autre coefficient h'.
1- Quel nom attribue-t-on généralement à la loi d'échange : $\phi = h(T_1 - T_1')$?
2- Déterminer la puissance thermique échangée entre le tube et l'air en régime permanent. On supposera que la température ne dépend que de la distance à l'axe du tube.
3- Etudier les variations de cette puissance thermique lorsque h tend vers l'infini (conducteur parfait). Remarques ?

B. Evolution d'un système composé-

Une barre de longueur L, de section S, de capacité calorifique massique C_b, de masse volumique ρ et conductivité thermique K est reliée à deux corps (1) et (2). On admettra que la température est continue en

$x = 0$ et $x = L$, et que les volumes des corps et de la barre sont invariables.

1- On suppose que (1) et (2) sont deux sources de chaleur de températures fixées T_1 et T_2. Calculer le profil de température à l'intérieur de la barre en régime établi. Pour celà on démontrera que dans le cas général, la température est solution de l'équation dite de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

où D est un coefficient que l'on déterminera en fonction de C_b, ρ et K.
2- On suppose maintenant que (1) et (2) sont deux corps de capacités calorifiques finies C_1 et C_2 et de températures initiales T_{10} et T_{20}. Effectuer un bilan thermodynamique pour chacun des corps (1) et (2). Quelle hypothèse raisonnable peut-on faire quant aux transferts thermiques et à l'évolution des différentes températures de (1), (2) et de la barre ? **3**- Déterminer le temps au bout duquel

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}(T_{20} - T_{10})$$

en supposant que $C_{1,2} \gg \rho C_b LS$.

C. Diffusion de neutrons-
(Aucune connaissance n'est requise en physique nucléaire pour aborder cette partie).
On étudie la diffusion unidirectionnelle de neutrons dans un barreau de plutonium cylindrique d'axe Ox et de direction droite d'aire S, s'étendant entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$ et on note $n(M,t)$ le nombre de neutrons par unité de volume. Cette diffusion satisfait à la loi de Fick, avec un coefficient de diffusion $D = 22$ $\mathrm{m^2 s^{-1}}$.

1- Enoncer la loi de Fick en définissant tous les éléments qui y interviennent. Etablir l'équation aux dérivées partielles dont $n(x,t)$ est solution. Quel est le profil de $n(x)$ en régime stationnaire ?

On considére maintenant que, du fait de réactions nucléaires entre les neutrons et la matière, des neutrons sont produits : pendant une durée dt, dans un élément de volume dV, il apparaît $\delta N = Kn(M,t)dVdt$ neutrons, où $K = 3.510^4$ $\mathrm{s^{-1}}$ est une constante positive homogène à l'inverse d'un temps et caractéristique des réactions nucléaires.
2- Etablir l'équation aux dérivées partielles dont $n(x,t)$ est solution.
3- Déterminer $n(x)$ à une constante multiplicative près en régime stationnaire. Montrer que ce régime n'est possible que pour une valeur particulière L_s de L. Calculer L_s.

D. Evolution de la pellicule de glace d'un lac gelé-
On considère un lac surmonté d'une pellicule de glace uniforme. L'air au dessus du lac est à la température uniforme T_a de -10°C. On prendra la référence des altitudes au niveau de l'interface air/glace supposée immobile. L'interface eau/glace se situe à une profondeur x comptée positivement.
1- Faire un schéma et un bilan qualitatif des échanges thermiques entre la couche de glace et l'air ambiant.
2- On suppose que l'on a le bilan suivant pour la couche d'eau d'épaisseur dx et de surface s à la profondeur x : $dU \simeq -\rho S dx L = -\Phi dt$ où Φ est le flux de chaleur entre l'eau et la glace. Quelle approximation a été faite ?
On donne :
- Masse volumique de la glace : $\rho = 900$ $\mathrm{kg.m^{-3}}$.
- Conductivité thermique : $\lambda = 2.1$ $\mathrm{J.m^{-1}.s^{-1}.K^{-1}}$.

– Capacité calorifique massique : $c = 2100$ J.kg^{-1}.K^{-1} (considérée comme négligeable).
– Chaleur latente de fusion : $L = 330$ kJ.kg^{-1}.
– Coefficient d'échange glace/air : $h = 42$ J.m^{-2}.s^{-1}.K^{-1}.

3- On suppose que le transfert de chaleur par conduction se fait en régime stationnaire. En introduisant T_d la température de la glace à l'interface eau/glace T_u la température de la glace à l'interface air/glace, quelle est l'expression de Φ ?

4- Pour calculer T_u on écrit la continuité de Φ à l'interface air/glace avec le flux conducto-convectif. Justifier.

5- Montrer que :

$$T_u = \frac{T_a + (\lambda/xh)T_d}{1 + (\lambda/xh)}$$

6- Etablir l'équation différentielle en x permettant de déterminer l'évolution de l'épaisseur de glace.

E. Synthèse-
En s'appuyant sur les exemples des quatre exercices précédents, rédiger un document de cours permettant de mettre en évidence entre les différents phénomènes de conduction vus dans les programmes de lycée. Le choix de la forme (paragraphe argumenté, tableau récapitulatif etc) est libre.

V- Mécanique-Electrocinétique : Oscillateurs couplés

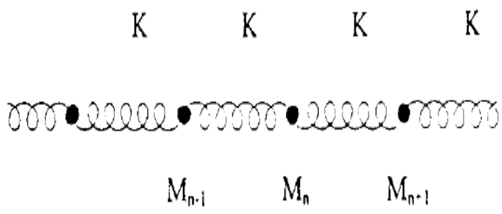
A. Oscillateurs mécaniques-

1- Décrire brièvement une expérience mettant en évidence les régimes libres d'oscillation de deux oscillateurs couplés en mécanique. Dégager la notion de mode propre.

2- Dans le cas d'oscillateurs faiblement couplés qu'observe-t-on lorsque à la date $t = 0$, on écarte un seul des oscillateurs de sa position de repose ; qu'illustre cette observation ? Quelle est l'influence qualitative des frottements (supposés faibles) ?

3- Décrire brièvement une expérience permettant d'étudier la réponse en régime sinusoïdal forcé de fréquence f de deux oscillateurs couplés en mécanique. Tracer l'allure des graphes donnant l'amplitude des oscillateurs en fonction de la fréquence f et dégager la notion de résonance et d'antirésonance. Quelle est l'influence qualitative des frottements (supposés faibles) ?

On considère la chaîne d'oscillateurs couplés représentée sur la figure ci-après. Tous les points matériels M_n ont même masse m ; à l'équilibre ils sont confondus avec les points A_n d'abscisse na où n est un entier quelconque et a une constante donnée ; hors d'équilibre, ils sont susceptibles de se déplacer le long de Ox et on note leut abscisse $x_n(t) = na + u_n(t)$. Chaque masse est reliée à ses deux voisines par des ressorts de même longueur à vide égale à a et de même raideur K. On ne tient pas compte de la pesanteur, u_n est assez petit pour qu'il n'y ait pas de choc entre deux points matériels M_n voisins.



4- Etablir l'équation différentielle du mouvement de M_n et la mettre sous la forme :

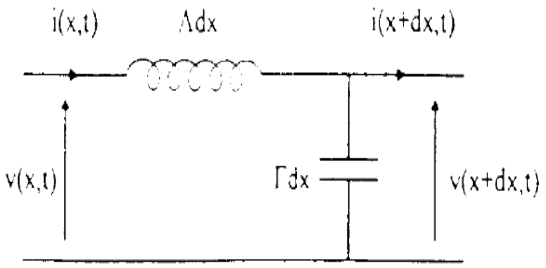
$$\frac{d^2u_n}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}}{2} = 0.$$

Donner l'expression de ω_0 (en fonction de m et K) et sa dimension.
5- La chaîne est infinie ($-\infty < n < \infty$). On fait l'approximation des milieux continus, c'est-à-dire qu'on définit une fonction $u(x,t)$ variant très peu à l'échelle de a et telle que $u_n(t) = u(x = na, t)$.
En faisant un développement de Taylor pour $u_{n+1}(t) - u_n(t) = u(x + a, t) - u(x, t)$ et pour $u_{n-1}(t) - u_n(t) = u(x - a, t) - u(x, t)$ (à l'ordre 2 en a), montrer que $u(x,t)$ est solution d'une équation de propagation de d'Alembert de la forme :

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

où c est une constante à exprimer en fonction de a et ω_0.

B. Ligne bifilaire-
Soit une ligne bifilaire d'axe $x'x$. On modélise sur la figure suivante une tranche de ligne comprise entre points d'abscisse x et $x + dx$. Le circuit comporte une inductance Λdx et une capacité Γdx. On admet que $\Lambda\Gamma = \frac{1}{c^2}$.



1- On traite ce circuit dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS). Définir.
2- On introduit les courants $i(x,t)$ et $i(x+dx,t)$ et les tensions $v(x,t)$ et $v(x+dx,t)$. Etablir deux équations couplées entre $\frac{\partial i}{\partial t}$ et $\frac{\partial v}{\partial x}$ d'une part, puis $\frac{\partial i}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$ d'autre part.
3- En déduire que i et v sont solutions d'une équation de d'Alembert avec la célérité c.
4- Montrer que pour des solutions de la forme $i = f(x - ct)$ et $v = g(x - ct)$, le rapport $\frac{v}{i}$ est une constante qu'on appelle impédance caractéristique Z_c de la ligne. On exprimera Z_c en fonction de Λ et Γ.

C. Synthèse- A partir des deux exemples précédents et en présentant éventuellement d'autres situations qui vous semblent pertinentes, mettre en évidence les caractéristiques générales des oscillateurs couplés en physique. En particulier on mettra en évidence comment les notions liées aux oscillateurs couplés classiques interviennent en mécanique quantique.
En s'appuyant sur des analogies avec une corde vibrante fixe à ses extrémités, présenter à un niveau PCSI, MPSI les caractéristiques d'un système quantique unidimensionnel, stationnaire, décrit par un puits de potentiel infini.