J. 5284

SESSION DE 1999

concours interne de recrutement de professeurs agrégés et concours d'accès à l'échelle de rémunération

section : sciences physiques

composition sur la physique et le traitement automatisé de l'information

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche (y compris programmable et alphanumérique) à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Tout document et autre matériel électronique sont interdits.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives personnelles qu'il est amené à prendre pour cela.

Tournez la page S.V.P.

Thème de l'épreuve

Le sujet traite de thermodynamique, de diffusion thermique et des ondes. Il est basé sur les programmes des classes de PCSI et de PC des lycées.

NB : Les trois parties sont indépendantes, on pourra, cependant, s'appuyer sur des résultats trouvés ou donnés, dans toutes les parties de l'épreuve.

Notations et données

Les capacités thermiques à volume constant et à pression constante sont notées C_V et C_P, les capacités thermiques molaires sont notées C_{vm} et C_{pm}, leur rapport $\gamma = \dfrac{C_{Pm}}{C_{Vm}}$ est constant dans tout le problème.

Les grandeurs massiques sont notées par une lettre minuscule, par exemple l'enthalpie de un kilogramme de corps pur est notée h, l'enthalpie de m kilogrammes est notée $H = m\,h$.

Constante molaire des gaz parfaits : $R = 8{,}314\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$.

Pression : 1 bar = 10^5 pascals.

Température : θ (degrés Celsius) $\approx$ T - 273 (kelvins).

PARTIE 1

THERMODYNAMIQUE

1.) Systèmes thermodynamiques.

1.1.) Quelle est la caractéristique essentielle d'un système en thermodynamique classique ? Donner deux exemples de système thermodynamique. Définir les notions suivantes: système fermé, système ouvert, système isolé.

1.2.) Préciser la notion de grandeur d'état (variable ou fonction). Qu'appelle-t-on grandeur intensive, grandeur extensive (donner des exemples) ? Définir à partir de deux exemples, l'un concernant un système isolé, l'autre un système échangeant de l'énergie avec le milieu extérieur, la notion d'état d'équilibre thermodynamique.

1.3.) Qu'appelle-t-on équation d'état du système (donner deux exemples) ?

1.4.) Définir les trois coefficients thermoélastiques α, χ_T et β. Indiquer leur nom, leur unité, leur caractère (intensif ou extensif) et leur signe. Quelle est leur utilité ?

- **Exercice :**

On considère un métal de coefficients constants :

$\alpha = 5 \times 10^{-5}$ SI et $\chi_T = 1{,}2 \times 10^{-6}\ \mathrm{bar^{-1}}$

à la pression $P_1 = 1$ bar et à une température de 20 °C.

Un matériau supposé indilatable et incompressible entoure exactement le métal.

a) Calculer la pression finale P_2 si la température est portée à 35 °C.

b) Le matériau extérieur pouvant supporter une pression maximale de 1200 bars, quelle est la température T_{max} à laquelle on peut porter le système ?

Tournez la page S.V.P.

2.) Bilans d'énergie pour un système fermé (Σ).

2.1.) Définir l'énergie interne (microscopique) U d'un système.

2.2.) Définir l'énergie totale E d'un système.

2.3.) Enoncer le premier principe de la thermodynamique pour un système fermé :

a) sous sa forme générale ;
b) dans le cas fréquent où la variation d'énergie macroscopique est nulle ou négligeable.

2.4.) Définir de façon élémentaire les notions de travail W et de transfert thermique (chaleur) Q.

2.5.) Préciser brièvement les notions de fonction d'état (exemple U) et de grandeurs d'échange (exemples W et Q).

2.6.) Critiquer l'affirmation suivante : " Cette tasse de café contient de la chaleur ".

• **Exercice :**

On lâche d'une hauteur h, sans vitesse, un morceau de plomb de masse m. Celui-ci s'écrase sur un autre morceau de plomb de même masse posé sur le sol. La température ambiante est T_0 . En précisant les hypothèses adaptées, calculer la température T_1 du plomb après la collision.

Données :

$m = 10$ kg, $h = 10$ m, $T_0 = 293{,}0$ K,
intensité du champ de pesanteur $g = 9{,}8$ m.s^{-2},
masse molaire atomique du plomb $M = 207$ g.mol^{-1}.
On suppose que le plomb suit l'approximation des corps condensés et que sa capacité thermique massique c est donnée par la loi de Dulong et Petit

$M.c \approx 25$ J.K^{-1}.mol^{-1}.

3.) La fonction d'état enthalpie H.

3.1.) Définir la fonction d'état enthalpie H.

3.2.) On considère un système fermé évoluant au contact d'un milieu extérieur dont la pression p_e est uniforme et constante ; en outre, dans les états initial (I) et final (F), le système est en équilibre à la pression $p_I = p_F = p_e$. On suppose que le système ne reçoit du travail que des forces de pression.

Etablir la relation entre la variation d'enthalpie ΔH et le transfert thermique Q. Cette relation est-elle valable pour une évolution isobare ? (Préciser ce qu'est une évolution isobare).

4.) Fonctions d'état U et H et capacités thermiques de quelques corps.

On considère un corps pur régi par l'équation d'état $f(p,V,T)= 0$.

4.1.) Définir les capacités thermiques respectivement à volume constant Cv et à pression constante Cp. Préciser leur caractère (intensif ou extensif). Quelle est leur utilité ?

4.2.) Le gaz parfait.

- Donner la définition macroscopique d'un gaz parfait.
A quelle condition le modèle du gaz parfait rend-il compte correctement du comportement d'un gaz réel ?
- Donner les expressions de U, H, Cv et Cp pour un gaz parfait monoatomique à l'état d'équilibre thermodynamique.
- Que peut-on dire de U, H, Cv et Cp pour un gaz parfait polyatomique ?
- Que vaut la différence Cp - Cv pour un gaz parfait ?
- Exprimer les différentielles dU et dH pour un gaz parfait.

4.3.) Corps (phase) condensé.

On considère un solide ou un liquide peu compressible, peu dilatable. Que peut-on dire de U, H et de Cv, Cp ? Exprimer U lorsque Cv est constante.

5.) Le deuxième principe de la thermodynamique pour un système fermé (Σ).

5.1.) A partir d'un exemple, expliquer la nécessité d'un deuxième principe.

5.2.) Définir les notions de transformation réversible, de transformation irréversible. Indiquer quelques causes d'irréversibilité.

5.3.) Enoncer le deuxième principe de la thermodynamique.

5.4.) Cas particulier d'un système en contact avec une seule source de chaleur.
- Qu'est-ce qu'une source de chaleur (ou thermostat) ?
Citer un système réel jouant le rôle de source de chaleur.
- La source de chaleur a une température thermodynamique T_S ; écrire le deuxième principe pour une transformation infinitésimale, puis pour une transformation finie. Quelle est la variation d'entropie du système pour une transformation réversible ?

5.5.) Que peut-on dire de l'entropie d'un système thermiquement isolé ?
Critiquer l'affirmation suivante : " On considère un système qui subit une transformation adiabatique irréversible entre les deux états d'équilibre thermodynamique initial (I) et final (F) ; il est possible de faire passer le système du même état initial (I) au même état final (F) par une transformation adiabatique et réversible ".

5.6.) Identité thermodynamique.

Pour un système (p,V,T) fermé, en équilibre thermodynamique, on définit la température et la pression thermodynamiques à partir de la fonction caractéristique

U (S, V) par : $T=\left(\dfrac{\partial U}{\partial S}\right)_V$ et $p=-\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_S$.

- Préciser la notion de fonction caractéristique.
- En déduire l'identité thermodynamique, c'est à dire l'expression de la différentielle de l'énergie interne dU en fonction de T, p, dS et dV.
En déduire une autre forme de l'identité thermodynamique donnant la différentielle de l'enthalpie dH.

• **Application** : entropie d'un gaz parfait.

On suppose que le rapport des capacités thermiques γ est constant.
- Etablir l'expression de la différentielle dS de l'entropie d'un gaz parfait sous la forme :

$$dS = n\frac{R\gamma}{\gamma-1}\frac{dT}{T} - nR\frac{dp}{p}$$ (n est le nombre de moles du gaz).

- En déduire la relation entre la température T et la pression p d'un gaz parfait au cours d'une évolution adiabatique et réversible. Comment appelle-t-on cette relation ?

• Application numérique : un gaz parfait diatomique (γ = 1,4) subit une évolution adiabatique et réversible entre l'état initial (p_1 = 5 bars, T_1 = 323K) et l'état final (p_2 = 1 bar). Calculer sa température finale T_2.

• **Application** : entropie d'un corps condensé liquide ou solide.

Etablir l'expression de la différentielle dS de l'entropie d'un corps condensé, puis de l'entropie S dans le cas où la capacité thermique massique c du corps condensé est considérée comme constante.

• **Exercice** : on place un morceau de fer de masse m, à la température T_1 , dans un très grand volume d'eau à la température T_2. Calculer littéralement la variation d'entropie du fer ΔS, l'entropie échangée Se, l'entropie créée Sc. Calculer la variation d'entropie de l'eau ΔS_{eau} . Faire les applications numériques.

Données : T_1 = 350 K, T_2 = 280 K, m = 0,1 kg, capacité thermique massique du fer : c = 460 $J.K^{-1}.kg^{-1}$.

5.7.) **Exercice : le moteur Diesel**

On étudie le modèle de moteur Diesel suivant : tout se passe comme si une quantité fixée (système fermé constitué de n moles) de gaz parfait diatomique (γ = 1,4) décrivait indéfiniment un cycle ABCD appelé cycle Diesel.

Le gaz subit les transformations suivantes :

A⟶B : compression adiabatique et réversible.

B⟶C : combustion isobare.

C⟶D : détente adiabatique et réversible.

D⟶A : refroidissement isochore (à volume constant).

A) On rappelle qu'au cours d'une transformation adiabatique et réversible d'un gaz parfait de coefficient γ constant la pression et le volume sont liés par la relation :
pV^{γ} = constante. En déduire que la température et le volume sont liés par la relation : $TV^{\gamma-1}$ = constante.

B) On donne le tableau suivant :

	A	B	C	D
p en Pa	$1{,}00 \times 10^5$			
T en K	300	723		
V en m^3	$2{,}49 \times 10^{-2}$		$8{,}32 \times 10^{-3}$	$2{,}49 \times 10^{-2}$

a) Calculer le nombre n de moles de gaz qui évolue. Exprimer les capacités thermiques à volume constant Cv et à pression constante Cp en fonction de n, R et γ. Les calculer numériquement.

b) Compléter le tableau.

c) Tracer l'allure du cycle dans un diagramme de Clapeyron (p en ordonnée, V en abscisse).

d) Calculer pour chacune des transformations AB, BC, CD et DA, littéralement puis numériquement, les travaux et les transferts thermiques (quantités de chaleur) algébriquement reçus par le gaz. En déduire le travail W algébriquement reçu par le gaz au cours d'un cycle complet.

On définit l'efficacité thermodynamique du moteur par le rapport : $\eta = \dfrac{-W}{Q_{BC}}$

où Q_{BC} est le transfert thermique algébriquement reçu par le gaz au cours de la combustion isobare BC. Justifier cette définition de l'efficacité thermodynamique.

Calculer η et la comparer à l'efficacité d'un moteur de Carnot fonctionnant entre deux sources de chaleur de températures égales à T_A et T_C.

6.) La détente de Joule et Gay Lussac.

6.1.) Décrire la détente de Joule et Gay Lussac ; faire un schéma. Préciser les caractères de cette détente. Quelle est la grandeur conservée dans cette détente ? Justifier ?

6.2.) Cas d'un gaz parfait.
- Quelle autre grandeur est conservée dans cette détente ?
- Qu'appelle-t-on première loi de Joule ?
- Un gaz parfait (n moles) subit une détente de Joule et Gay Lussac, le volume initial est V_1, le volume final est $V_2 = 2V_1$.

Calculer la variation d'entropie $\Delta S = S_2 - S_1$ du gaz et conclure.

6.3.) Cas d'un gaz réel.
On considère un gaz de Van der Waals dont l'équation d'état et l'énergie interne ont pour expression :

$$\left(p+\frac{n^2 a}{V^2}\right)(V-nb) = nRT \text{ et } U(T,V) = nC_{Vm}T - \frac{n^2 a}{V}.$$

(n moles, C_{vm} est constante).
- Commenter l'équation d'état ; quelle est la signification physique des termes correctifs ?
- Ce gaz suit-il la première loi de Joule ?
- Exprimer la variation de température du gaz dans la détente de Joule et Gay Lussac du volume V_1 au volume $V_2 = 2V_1$.

-Exprimer la différentielle dU, en déduire la différentielle de l'entropie $dS = nC_{Vm}\dfrac{dT}{T} + \dfrac{nR}{V-nb}dV$.

- Calculer la variation d'entropie $\Delta S = S_2 - S_1$. Quel est le signe de ΔS ? (On ne demande pas de le déduire de l'expression trouvée).

• Application numérique : on utilise le modèle du gaz de Van der Waals. On considère une mole d'argon occupant le volume $V_1 = 1$ L à la température $T_1 = 291{,}0$ K. Il subit une détente de Joule et Gay Lussac, le volume final est $V_2 = 2$ L.

Calculer la température finale T_2. Calculer la variation d'entropie du gaz $\Delta S = S_2 - S_1$.

Données : $a = 0{,}13$ J. m^3. mol^{-2}, $b = 3{,}8 \times 10^{-5}$ m^3. mol^{-1}, $C_{vm} = \dfrac{3}{2}R$.

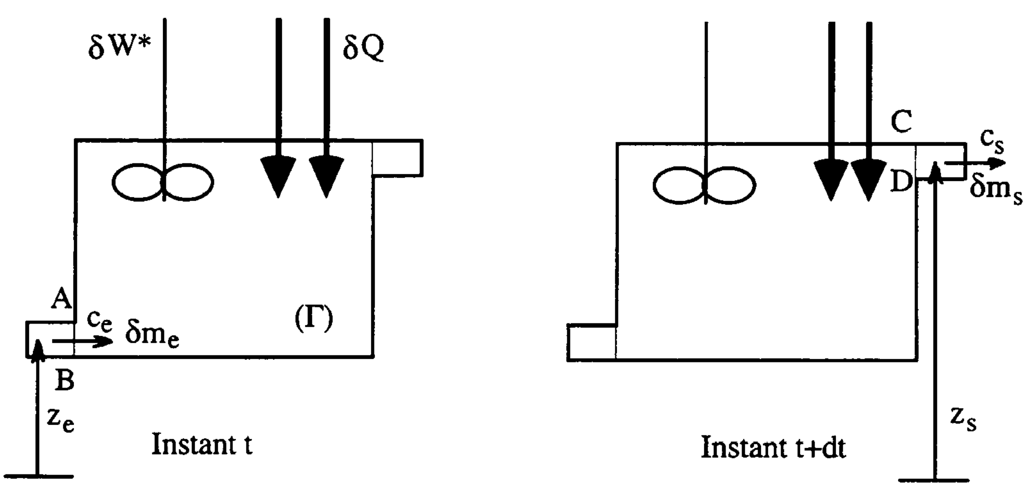
- Que pensez-vous de l'affirmation suivante : " La température du gaz est conservée dans une détente de Joule Gay Lussac, donc ce gaz est un gaz parfait " ?

7.) La détente de Joule-Thomson (Kelvin).

A l'occasion de cette étude, nous établissons les relations traduisant le bilan énergétique (premier principe) et le bilan entropique (deuxième principe) pour un fluide en écoulement stationnaire.

7.1.) Bilan énergétique.

On considère le système ouvert (Γ) délimité par les surfaces planes AB et CD, ses parois sont indéformables.



En entrée (avant AB), l'état du fluide est décrit par la pression p_e , la température T_e, uniformes et constantes, la vitesse c_e, l'altitude z_e, ainsi que par les grandeurs massiques volume v_e et énergie interne u_e. De même en sortie (après CD) il est décrit par p_s, T_s, c_s, z_s, v_s et u_s.

On délimite le système fermé (Σ) associé au système ouvert précédent.

- à l'instant t, (Σ) est constitué par le fluide contenu dans (Γ) et par la masse de fluide δm_e qui traverse AB pour entrer dans (Γ) entre les instants t et t+dt.
- à l'instant t+dt, (Σ) est constitué par le fluide contenu dans (Γ) et par la masse de fluide δm_s qui traverse CD pour sortir de (Γ) entre les instants t et t+dt.

On note M_Γ la masse de Γ et on étudie le régime stationnaire.

- Ecrire une relation entre $M_\Gamma(t)$, $M_\Gamma(t+dt)$, δm_e et δm_s.
- Compte tenu des hypothèses, quelle relation lie $M_\Gamma(t)$ et $M_\Gamma(t+dt)$? En déduire une relation entre δm_e et δm_s.
- Que peut-on dire de l'énergie interne de (Γ), de son énergie mécanique (macroscopique) au cours du temps?
- Exprimer l'énergie totale $E_\Sigma(t)$ de (Σ) à l'instant t , $E_\Sigma(t+dt)$ à l'instant t+dt, en déduire la variation d'énergie dE_Σ.
- En appliquant au système (Σ) le premier principe sous sa forme générale, déduire la relation :

$$(h_s - h_e).\delta m + (1/2).\delta m.(c_s^2 - c_e^2) + \delta m.g.(z_s - z_e) = \delta W^* + \delta Q$$

h est l'enthalpie massique, δW^* est le travail " utile " (autre que celui des forces de pression en entrée et sortie) algébriquement reçu par le fluide entre les instants t et t+dt, δQ est le transfert thermique algébriquement reçu par le fluide entre les instants t et t+dt. (on admettra qu'aucun transfert thermique ne se fait à travers les sections AB et CD).

7.2.) Bilan entropique.

Le système est en contact avec une source de chaleur à la température T_S. (On admet qu'aucun transfert thermique ne se fait à travers les sections AB et CD).

- Rappeler le deuxième principe de la thermodynamique pour un système fermé (Σ) en contact avec une source de chaleur T_S.

- On note l'entropie massique du fluide en entrée s_e (avant AB) et en sortie s_s (après CD). Calculer les entropies $S_\Sigma(t)$ du système (Σ) à l'instant t et $S_\Sigma(t+dt)$ à l'instant t + dt ; en déduire dS_Σ. En utilisant le deuxième principe, en déduire le bilan entropique:

$$\delta m.(s_s - s_e) = \frac{\delta Q}{T_S} + \delta S_C.$$

7.3.) **Application** à la détente de Joule-Thomson.

7.3.1.) Décrire et caractériser cette détente. Faire un schéma.

Quelle est la grandeur conservée dans cette détente ? Justifier en utilisant la relation établie à la question 7.1. Comment se comporte un gaz parfait dans cette détente ? Qu'appelle-t-on deuxième loi de Joule ?

7.3.2.) Rappeler pour un gaz parfait la différentielle de l'entropie dS en fonction de dT et dp, en déduire la différentielle ds de l'entropie massique.

On notera $c_p = C_{pm} / M$ et $r = R / M$, M est la masse molaire du gaz.

- Un gaz parfait subit une détente de Joule Thomson de l'état initial (pression p_1, température T_1) à l'état final (pression p_2, température T_2). Calculer l'entropie créée (δS_C / δm) par unité de masse ; conclure.
- Dire pourquoi une compression de Joule Thomson n'est jamais observée.
- Citer une application pratique de cette détente.

7.3.3.) Expliquer l'intérêt des deux détentes Joule Gay Lussac et Joule Thomson pour tester la validité du modèle du gaz parfait.

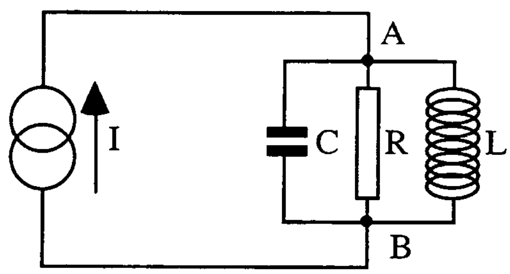
8.) **Détection de la vitesse d'écoulement du fluide.** (Question indépendante)

Pour étudier la détente de Joule-Thomson, on a supposé la vitesse V d'écoulement du fluide très faible, on se propose néanmoins de tenter de la mesurer.
On utilise pour cela une méthode interférométrique, qui ne sera pas étudiée dans ce problème.
Le système de franges à deux ondes obtenu est observé au moyen d'un capteur photo-électrique D qui délivre un courant proportionnel à l'intensité des franges d'interférences.
Ce courant, exprimé en ampère, peut s'écrire :

$$I = 0{,}4.10^{-3} \; [\; 1 + \cos(4\pi V.t\;)/\lambda_0\;] \qquad \text{avec } \lambda_0 = 632{,}8 \text{ nm}$$

8.1.) A votre avis, l'expression de ce courant peut-elle correspondre à un phénomène d'interférence « à deux ondes »? Expliquer pourquoi, citer un exemple.

8.2.) Le détecteur D est considéré comme un générateur de courant parfait débitant le courant d'intensité I. Il est branché en série avec un circuit LRC parallèle représenté sur la figure ci-dessous.



Ce circuit comporte une bobine d'auto-inductance L, de résistance propre nulle, un résistor de résistance R, un condensateur parfait de capacité C.

8.2.1.) Calculer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du circuit entre A et B à la pulsation ω.

8.2.2.) Pour quelle fréquence f_0 le module de cette impédance est-il maximum ? Quelle est cette valeur maximum Z_M ?

8.2.3.) On pose $\omega_0 = 2\pi f_0$; $x = \omega/\omega_0$ et $Q = R / L\omega_0$. Exprimer le module de $\underline{Z} = |\underline{Z}|$ en fonction de x, Q, et R.

8.2.4.) Calculer les pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquelles $|\underline{Z}| = Z_M/\sqrt{2}$.
Exprimer $|\omega_1 - \omega_2|/\omega_0$ en fonction de Q.

8.3.) Application numérique : $f_0 = 1000$ hertz ; $C = 1\ \mu F$ et $R = 10^4\ \Omega$.

8.3.1.) Calculer L

8.3.2.) Calculer Q

8.3.3.) Calculer $|\omega_1 - \omega_2|$

8.4.) On désigne par U la tension aux bornes AB de ce circuit.

8.4.1.) Calculer l'impédance $\underline{Z}$ à la fréquence nulle ; en déduire que la tension U est purement sinusoïdale.

8.4.2.) Calculer la vitesse d'écoulement du fluide qui donne à l'amplitude U sa valeur maximum.

8.5) Calculer les pulsations ω'_1 et ω'_2 pour lesquelles $|\underline{Z}| = 0{,}9.Z_M$

Exprimer $\Delta\omega = |\omega'_1 - \omega'_2|$ en fonction de ω_0 et de Q.

On admet que l'on ne peut détecter des variations relatives d'amplitude de U inférieures à 10% . Montrer qu'il en résulte une incertitude sur la pulsation ω_0 qui correspond au maximum d'amplitude, incertitude que l'on exprimera en fonction de $\Delta\omega$.
Si la longueur d'onde λ_0 est connue exactement, quelle sera l'incertitude sur la vitesse d'écoulement du fluide mesurée par cette méthode ?

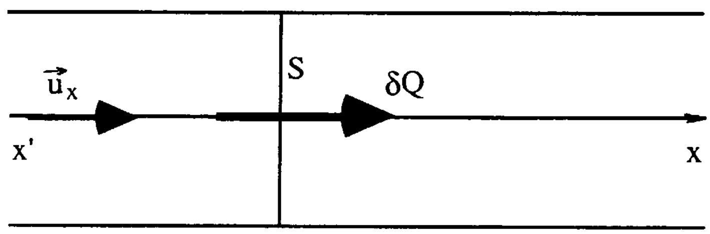
Tournez la page S.V.P.

PARTIE 2

Conduction ou diffusion thermique.

1.) Rappeler les trois modes de transfert thermique.
Illustrer chacun d'eux par un exemple.
Dans toute la suite on étudie uniquement la conduction thermique unidirectionnelle, c'est à dire dans un milieu homogène dont la température $T(x,t)$ varie dans la direction de l'axe $x'x$.

2.) Flux thermique.



La densité de courant thermique j_Q (algébrique) est le transfert thermique (quantité de chaleur) qui traverse par unité de temps une surface unité orthogonale à $x'x$. (j_Q s'exprime en $W.m^{-2}$)

- Exprimer le transfert thermique δQ qui traverse une section S en dt seconde.
- Quel est le flux thermique ϕ (puissance) qui traverse S ?

3.) Loi de Fourier.

- Ecrire la loi de Fourier (cas unidirectionnel), en notant K la conductivité thermique.
- Commenter cette loi (signe et domaine de validité).
- On introduit le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q = j_Q \vec{u}_x$

($\vec{u}_x$ vecteur unitaire de $x'x$). Relier le sens de $\vec{j}_Q$ au sens réel du transfert thermique.
Ecrire la loi de Fourier dans le cas général (à trois dimensions).

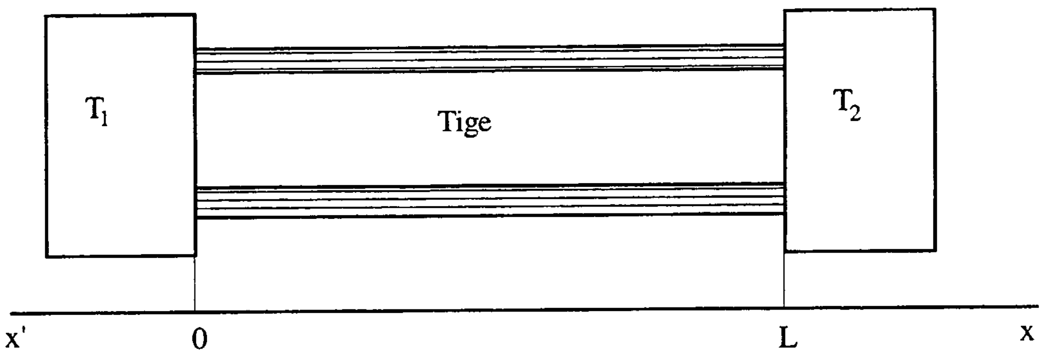
4.) Equation dite "de la chaleur" (ou de la diffusion thermique) :

Le milieu matériel est caractérisé par une capacité thermique massique c, une conductivité thermique K et une masse volumique ρ constantes.
En considérant une tranche élémentaire comprise entre les abscisses x et x+dx de section S et en lui appliquant le premier principe de la thermodynamique entre deux instants voisins t et t+dt, établir la relation : $-\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} = \rho\, c\, \dfrac{\partial T}{\partial t}$.

En déduire l'équation dite "de la chaleur" (équation de diffusion thermique) et la commenter brièvement.

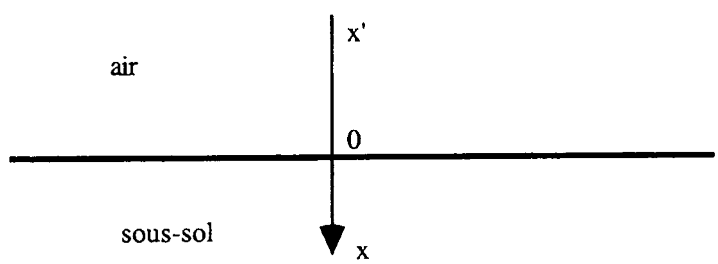
5.) Résolution de l'équation de la chaleur en régime stationnaire.

On considère une tige homogène isolée thermiquement sur sa paroi latérale.
Ses extrémités (en x = 0 et en x = L) sont maintenues à températures constantes $T(x = 0) = T_1$ et $T(x = L) = T_2$. Les conditions de la conduction unidirectionnelle sont ainsi réalisées.
On étudie le régime stationnaire.



- Ecrire l'équation de la chaleur en régime stationnaire.
- Comment appelle-t-on les conditions $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$?
- Déterminer la température T(x) dans la tige à l'abscisse x ; tracer le graphe de T(x). En déduire la densité de courant thermique j_Q et le flux thermique ϕ.
- Par analogie avec une tige conductrice de l'électricité de mêmes dimensions que la tige précédente, de conductivité électrique σ, soumise à la différence de potentiel $V_1 - V_2$ et parcourue par le courant I, définir la résistance thermique R_{TH} de la tige. Quel est l'intérêt de cette grandeur ?
- Faire un tableau résumant les analogies entre la loi de Fourier et la loi d'Ohm.

6.) **Exercice : onde thermique.**



On étudie la diffusion thermique en régime sinusoïdal établi. Son intérêt pratique est grand car tout régime variable peut être considéré comme une superposition de régimes sinusoïdaux ; d'autre part, c'est un bon modèle pour les variations de température observées sous terre au cours d'une journée ou d'une année.
Le sous-sol est considéré comme un milieu semi-infini homogène de conductivité thermique K, de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c (constantes) situé dans le demi-espace x positif.
On définit la diffusivité thermique par $a = K/\rho c$. On suppose que la surface du sol (plan x = 0) est soumise à la température :

$$T(0,t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t) \qquad \text{en kelvins.}$$

A) La solution de l'équation de diffusion est l'expression de la température T(x,t) d'un point à la profondeur x en régime sinusoïdal établi $T(x,t) = T_0 + A\, e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$.

Exprimer A en fonction de θ_0, exprimer $\delta = \sqrt{2}\, a^{\alpha}\, \omega^{\beta}$ (trouver α et β par l'analyse dimensionnelle).
Quel type d'onde est décrit par la fonction $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$?

Quelle est la signification physique de δ ?
Exprimer la vitesse de phase v de cette onde.

B) Influence des fluctuations quotidiennes de température.

- ω vaut $7{,}27 \times 10^{-5}\,s^{-1}$; retrouver cette valeur.
- Calculer numériquement δ. (On donne $a = 5 \times 10^{-7} m^2.s^{-1}$)
- Calculer numériquement v en $cm.jour^{-1}$.
- La température fluctue de 10°C (entre -5°C et +15°C autour de 5°C). Quelles sont les valeurs de T_0 et θ_0 ?
- A partir de quelle profondeur les variations de température sont-elles inférieures à 1°C ? Conclure.

C) Influence des fluctuations annuelles de température.

- ω vaut $1{,}99 \times 10^{-7}\,s^{-1}$. Retrouver cette valeur.
- Calculer numériquement δ et v (en $cm.jour^{-1}$)
(on donne $a = 5x10^{-7} m^2.s^{-1}$).
- La température fluctue de +20°C (entre -10°C et +30°C autour de 10°C). Quelles sont les valeurs de T_0 et θ_0 ?
- A partir de quelle profondeur les variations de température sont-elles inférieures à 1°C ? Conclure.
- Avec quel retard s'effectue la variation de température et dans quel rapport est-elle atténuée à une profondeur d'environ 4m ?

D) On se propose de retrouver l'expression de la température T(x,t) d'un point à la profondeur x en régime sinusoïdal établi. Il est commode de résoudre l'équation différentielle (équation de la chaleur) par la méthode complexe. Pour cela on introduit la fluctuation

$$\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$$

autour de la température moyenne T_0 et on utilise la notation complexe $\underline{\theta} = \underline{f}(x)e^{j\omega t}$
avec θ = partie réelle de ($\underline{\theta}$).

-Vérifier que $\underline{f}(x)$ satisfait à l'équation $\frac{d^2\underline{f(x)}}{dx^2} - j\frac{\omega}{a}\underline{f(x)} = 0$

-Déterminer $\underline{f}(x)$, puis en déduire T(x,t) sous la forme $T(x,t) = T_0 + A\,e^{-\frac{x}{\delta}}\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$.

PARTIE 3

ONDES

On s'intéresse dans cette question à la propagation d'ondes scalaires à une dimension spatiale , notée « x », le vecteur unitaire de la direction de propagation sera noté $\vec{i}$.

1.1) A tous points de l'espace M(x,y,z), on associe une fonction scalaire s(x,t) qui n'est fonction que du temps et de la coordonnée x ; s(x,t) est solution de l'équation différentielle ci-dessous, dite « équation de d'Alembert » ou équation de propagation à une dimension spatiale.

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

où c représente la célérité de l'onde.
On propose les changements de variables suivants

$$u = ct - x \quad \text{et} \quad v = ct + x$$

En exprimant les deux membres de l'équation différentielle précédente en fonction des dérivées partielles de s par rapport à u et à v, montrer que :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v}=0$$

En déduire que la solution générale de l'équation de d'Alembert à une dimension spatiale est :

$$s(x,t) = f(ct - x) + g(ct + x)$$

1.2.) Montrer que f(x,t) et g(x,t) décrivent deux ondes planes, vérifier que l'axe des x est bien la direction de propagation, dans quel sens pour chacune des deux ondes ? Avec quelles vitesses? Expliquez toutes vos affirmations.

1.3) Proposer une écriture de f et g si celles-ci représentent deux ondes planes monochromatiques de pulsation ω. Qu'est-ce que la longueur d'onde ? Expliquez sa signification en français.

1.4.) Pour résoudre l'équation de d'Alembert précédente, peut-on envisager une méthode différente de celles des ondes progressives, par exemple en essayant de séparer les variables x et t ? A quel concept ondulatoire aboutit cette recherche ? Cette méthode est-elle équivalente à la précédente ? Connaissez-vous des situations où cette méthode « à variables séparées » est particulièrement bien adaptée ?

2.1.) On considère une mole de gaz parfait, de pression P, de volume V, de température T et d'entropie S. Le travail, éventuellement échangé avec l'extérieur, est limité au seul travail des forces de pression.
Au repos, les variables P, V, T valent respectivement P_0,V_0, T_0. On considère une transformation réversible à partir de l'état de repos, entraînant des variations petites par rapport aux valeurs de repos, dP, dV, dT et dS.
Ecrire les relations différentielles exprimant la variation d'entropie au cours de la transformation, d'une part, en fonction de dV et dT et d'autre part, en fonction de dP et dT.

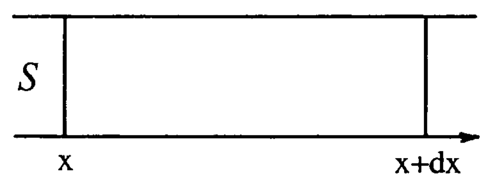
2.2.) Exprimer dS en fonction de dV et dP, à l'aide de P_0,V_0 et de $\gamma = \dfrac{C_{Pm}}{C_{Vm}}$.

2.3.) En déduire que le coefficient de compressibilité <u>isentropique</u> du gaz $\chi_S = -\dfrac{1}{V_0}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_{S_0}$

s'exprime en fonction de P_0 et de γ.

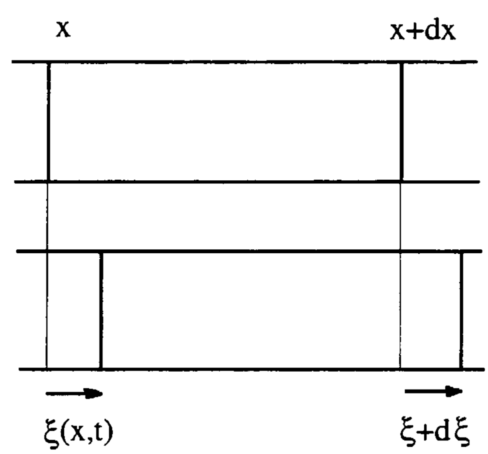
Application numérique : Calculer χ_S avec $\gamma = 1{,}4$ et $P_0 = 1{,}1$ bar.

3.1.) On considère maintenant le gaz parfait, a priori illimité dans toutes les directions. Au repos, la pression est uniforme et vaut P_0, la masse volumique également uniforme est notée ρ_0. Les effets de la pesanteur sont négligés.
On envisage une onde acoustique plane qui se propage dans le gaz suivant la direction Ox et dans le sens de $\vec{i}$
Cette onde acoustique se manifeste en un point M(x,y,z) par une variation de la pression p(x,t), très petite devant P_0 ; p(x,t) est appelée « surpression acoustique ». La transformation élémentaire, dont le gaz est le siège au passage de l'onde acoustique, est supposée isentropique.
On considère un petit élément de gaz, délimité par un cylindre de génératrices parallèles à Ox et par deux sections droite d'aire S et d'abscisse x et x + dx.



Quel est le bilan des forces de pression exercées sur cet élément ?

3.2) Pendant le temps dt, il résulte, entre autres, du passage de l'onde, un petit déplacement $\xi(x,t)$ de l'élément fluide.



Etablir la relation liant la dérivée partielle par rapport à x, de la surpression acoustique au déplacement $\xi(x,t)$.

3.3.) A l'instant t + dt, le volume de l'élément de fluide a varié. En déduire la relation liant la dérivée partielle, par rapport à x du déplacement $\xi(x,t)$ à la surpression p(x,t).

3.4.) Etablir l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la fonction $\xi(x,t)$. Qualifier cette équation.

3.5.) Etablir l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la fonction p(x,t). Remarque ?

3.6.) On appelle « vitesses acoustique » la fonction $u(x,t) = \dfrac{\partial \xi\ (x,t)}{\partial t}$

Etablir l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la fonction u(x,t). Vérifier que l'on a une équation de d'Alembert. En déduire la célérité de l'onde en fonction de ρ_0 et χ_S ; vérifier l'homogénéité.

3.7) En déduire l'expression de la célérité de l'onde acoustique dans le fluide en fonction de γ, P_0 et ρ_0.

Application numérique : calculer c, avec :

$$\gamma = 1,4 \ ; \ P_0 = 1,1 \text{ bar et } \rho_0 = 1,3 \text{ Kg.m}^{-3}.$$

3.8.) Exprimer cette même célérité à l'aide de la température T_0, de la masse molaire M du gaz parfait considéré, de γ et de R la constante du gaz parfait.

Application numérique : M = 29 $g.mol^{-1}$, calculer T_0.

3.9.) A votre avis, de quel gaz s'agit-il ? justifiez précisément votre affirmation.

3.10.) Au lieu de prendre l'hypothèse « isentropique » pour les transformations élémentaires dont le gaz est le siège, on prend l'hypothèse « isotherme ». Quelle serait, dans ce cas, l'expression de la célérité et sa valeur numérique dans les conditions du problème.

4.1.) Le fluide possède par ailleurs une conductivité thermique K, une capacité thermique massique à pression constante notée ici c_P, la masse volumique au repos est toujours notée ρ_0. En reprenant la question 6 de la 2ème partie, écrire l'équation différentielle dite « de la chaleur » et faire apparaître la diffusivité thermique D_{th} en précisant son unité.

4.2.) On se propose d'expliquer l'utilisation de la compressibilité <u>isentropique</u> χ_S dans l'expression de la célérité des ondes acoustique dans le fluide.
Donner une explication qualitative sommaire, puis, dans le cas d'ondes sinusoïdales, comparer la distance parcourue par une onde acoustique pendant une période temporelle et la distance parcourue par les échanges thermiques (ondes thermiques) pendant le même temps.
Application numérique : avec :
$\gamma = 1,4$; $\rho_0 = 1,3$ $kg.m^{-3}$; R = 8,314 $J.K^{-1}.mol^{-1}$; $T_0 = 22°C$; M = 29 $g.mol^{-1}$;
K = $2,5.10^{-2}$ $W.m^{-1}.K^{-1}$; $c_P = 10^3$ $J.K^{-1}.kg^{-1}$.
Discuter.

4.3.) En revenant au cas isentropique et à l'approximation acoustique ; une onde plane progressive sinusoïdale se propage suivant Ox, dans le sens de $\vec{i}$ avec une pulsation ω et à la célérité c. Exprimer la puissance moyenne P_m qui traverse une section S en fonction de S, ρ_0 et à l'aide de $p(x,t) = p_0.\cos(\omega t - kx)$ avec $k = \omega/c$. On utilisera la relation : $p = \rho_0 .c.u$, que l'on établira.

4.4.) Calculer la valeur efficace de la surpression acoustique notée p_{eff} pour une <u>intensité</u> sonore égale à $I_0 = 10^{-12}$ $W.m^{-2}$ (l'intensité sonore se définit par le rapport $I = P_m /S$).

4.5.) Que vaut la valeur efficace de la surpression acoustique p'_{eff}, pour un niveau sonore de 120 dB (le niveau sonore en décibel se définit par $N = 10 \log_{10}(I/I_0)$.

4.6.) En fait, le gaz est dans un tuyau sonore cylindrique, de section S et d'axe confondu avec Ox. Ce tuyau sonore a une longueur L = 1m et il est fermé à l'une de ses extrémité et ouvert à l'autre. Déterminer les fréquences du fondamental ν_0 et du premier harmonique ν_1.

4.7.) A ν_1, on a une amplitude maximale des déplacements dans l'air égale à ξ_0 =1 mm. Déterminer l'amplitude maximale de la surpression acoustique p_0 et, dans l'hypothèse isentropique, déterminer l'amplitude maximale des variations de température ΔT_0.

5.1.) On s'intéresse, pour conclure, à la propagation d'une onde électromagnétique dans un matériau bon conducteur comme le cuivre. La conductivité électrique du cuivre est $\sigma = 6.10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$; sa permittivité diélectrique et sa perméabilité magnétique sont celles du vide, c'est à dire, respectivement ε_0 et μ_0.
Le milieu occupe le demi-espace $x \geq 0$ et on se limite à une propagation monodimensionnelle suivant x croissant, de x = 0 jusqu'à l'infini. On considérera la densité volumique de charge électrique comme nulle sans justification.
Ecrire les équations de Maxwell dans le cas de ce milieu conducteur qui obéit à la loi d'Ohm (en fonction de σ, ε_0, μ_0 et $\rho_{charge} = 0$).

5.2.) On s'intéresse plus particulièrement au champ électrique $\vec{E}$. Ecrire l'équation différentielle relative à $\vec{E}$ en découplant le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ dans les équations de Maxwell.

5.3.) En régime sinusoïdal de pulsation ω, on recherche des solutions de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(kx-\omega t)}$$

où ω est réel et k, *a priori*, complexe ; on posera $k = k' + jk''$.
Quelle est la signification de k' et, respectivement, de k''.
A l'aide de l'équation différentielle relative à $\vec{E}$, donner l'expression de k^2.

5.4.) Dans l'équation différentielle ci-dessus, on souhaite ne conserver que le terme « diffusif », identifier ce terme et proposer une approximation portant sur ω et les caractéristiques du milieu. Dans le cas du cuivre ($\sigma = 6.10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ SI ; $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}$ SI), cette approximation est-elle très restrictive ?

5.5.) Résoudre l'équation différentielle en $\vec{E}$, donner l'expression réelle de $\vec{E}$ sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\frac{-x}{\delta_P}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta_P}\right)$$

Quelle est la signification de δ_P. Calculez-le pour 1 kHz, 1 MHz, 1GHz.

5.6.) Comparer avec les ondes thermiques de la partie 2 (question 6). Un matériau comme le cuivre possède une conductivité électrique élevée et une conductivité thermique élevée par rapport à d'autres matériaux usuels. Il est réputé « bon conducteur de la chaleur » pourquoi ? Pouvez-vous expliquer qualitativement ce phénomène? De même, le cuivre est « bon conducteur de l'électricité » , expliquez-le qualitativement. En revanche, ce matériau s'oppose au passage des ondes électromagnétiques, et ce, d'autant plus que la fréquence est élevée. Expliquez cette constatation en précisant le phénomène physique qui en est à l'origine.