Agreg Interne de Sciences-Physique **2012-2013**

Epreuve de Physique
Durée : 5 heures

I- Electrostatique : topographie du champ électrique

I-1) Quel est le lien géométrique entre les surfaces équipotentielles et les lignes de champ ?

I-2) Les figures $1a$ et $1b$ montrent à deux échelles différentes les lignes du champ $\vec{E}$ créé par une ensemble de charges ponctuelles.

Toutes les charges créant ce champ sont dans le plan de la figure. Au moins un exemple de chaque type de ligne de champ est dessiné. On note q la valeur de la plus petite (en module) des charges. Les autres valeurs sont des multiples (positifs ou négatifs) de q. On donne les coordonnées cartésiennes des points $A \quad (24a, 75a)$, $B \quad (0, 0)$, $C \quad (24a, -8a)$ et $D \quad (75a, 0)$ où a est l'unité de longueur.

I-2a) Commenter l'allure générale de la figure $1b$. De quelle distribution de charges particulières se rapproche la distribution étudiée ?

I-2b) Déterminer le nombre et la position des charges utilisées.

I-2c) Justifier d'après les figures la nullité du champ $\vec{E}$ au point C.

I-2d) Déterminer les valeurs des charges en fonction de q.

I-2e) Quel est le signe de q ?

I-3) La figure 2 représente trois conducteurs. Le plus grand est creux, porté au potentiel $V = 0$ et entoure complètement une zone contenant les deux autres conducteurs. Le conducteur 1 porte une charge positive. Le conducteur 2 porte une charge globale nulle. Il n'y a pas de charge en dehors de celles qui sont portées par les conducteurs.

Un certain nombre de courbes orientées sont dessinées. Certaines peuvent être des lignes de champ orientées par $\vec{E}$. D'autres ne peuvent pas l'être.

Donner la liste des bonnes et mauvaises lignes en justifiant les réponses. En déduire les signes des potentiels V_1 et V_2 de chacun des conducteurs internes et comparer $|V_1|$ à $|V_2|$.

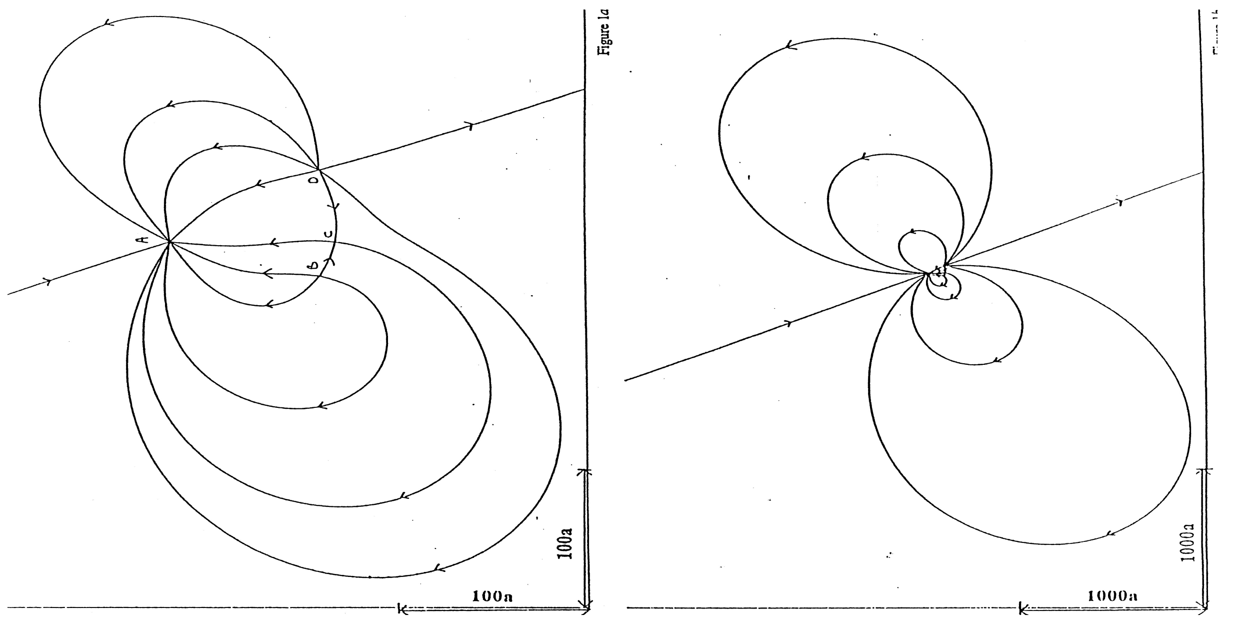


FIGURE 1 – a - b

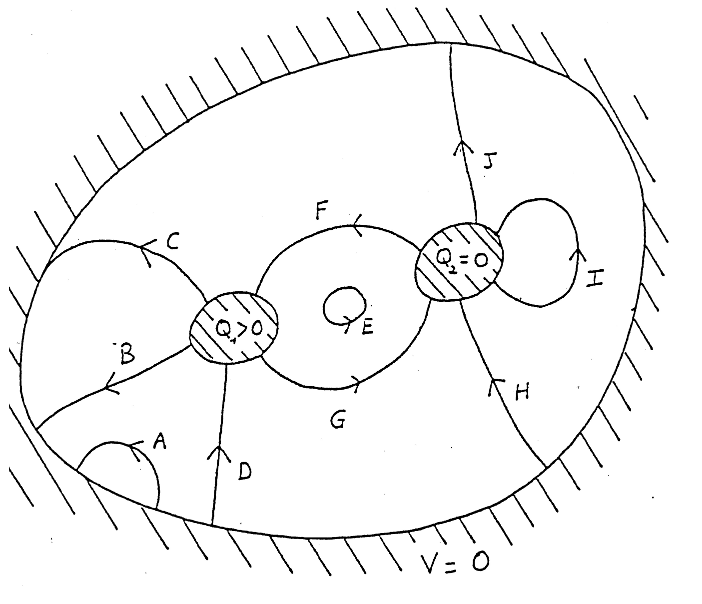
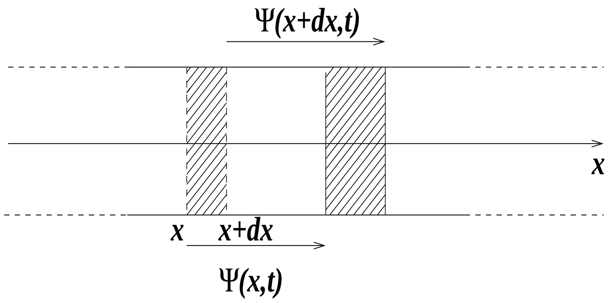


FIGURE 2 –

<u>II- Ondes</u> : Propagation d'ondes acoustiques

On supposera que les parois des différents tuyaux qui interviennent dans ce problème n'exercent aucun frottement sur le (les) fluide(s). On néglige, de plus, l'action de la pesanteur.
Un tuyau cylindre de section constante S, d'axe $x'x$, contient un fluide qui au repos est à la pression P_0, à la température T_0 ; sa masse volumique est ρ_0.
On considère une tranche de fluide qui, au repos, est située entre les abscisses x et $x+dx$. Le passage de l'onde acoustique s'accompagne d'un déplacement d'ensemble des molécules contenues dans le plan d'abscisse x : soit $\psi(x,t)$ ce déplacement à l'instant t ; ainsi la tranche de fluide considérée se trouve à l'instant t entre les plans $x+\psi(x,t)$ et $x+dx+\psi(x+dx,t)$. On note $u(x,t)$ la vitesse de déplacement de la section d'abscisse x à l'instant t, $\rho(x,t)$ la masse volumique du fluide de cette section, $p(x,t)$ la surpression liée au passage de l'onde en x à t.
On se limitera aux mouvements de faibles amplitudes ; ainsi on pourra négliger dans la suite tous les infiniment petits d'ordre supérieur ou égal à deux.



1) En raisonnant sur la tranche de fluide considérée, établir, en précisant la loi utilisée que :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

2) Quelle hypothèse thermodynamique peut-on faire sur la nature de l'évolution du fluide ? Justifier. Montrer que cette hypothèse conduit à la relation :

$$p = -\frac{1}{\chi_s}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

3) Etablir l'équation à laquelle satisfait la grandeur $\psi(x,t)$. Montrer par un changement de variables approprié que cette équation s'écrit de manière équivalente :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0$$

Quelle est la solution générale de cette équation ? Quelle est l'interprétation de chacune des deux solutions à cette équation ? Quelle est l'expression de c, vitesse de propagation de l'onde ? **4**) Montrer que les grandeurs $p(x,t)$ et $u(x,t)$ satisfont à la même équation de propagation que $\psi(x,t)$.
5) Le fluide considéré est de l'air considéré comme un gaz parfait :

– de $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.4$
– de masse molaire $M = 29\text{g.mol}^{-1}$
– de température $T_0 = 293\text{K}$
Justifier la valeur de γ. Calculer c.
6) On considère la propagation dans le fluide d'une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation ω qu'on représente en notation complexe par :

$$\underline{\psi_1}(x,t) = A_1 \exp i(\omega t - kx)$$

où A_1 est une constante et k un réel positif (module du vecteur d'onde). On supposera dans cette question que le tuyau est infini et donc qu'il n'y a aucune onde réfléchie se superposant à ψ_1.
7) Quel est le sens de propagation de cette onde ? Déterminer l'expression de k en fonction de ω et de c et calculer sa valeur pour l'air avec une fréquence de l'onde de 1kHz.
Exprimer alors $\underline{p_1}(x,t)$ et $\underline{u_1}(x,t)$, représentations complexes de la surpression et de la vitesse.
8) On appelle résistivité acoustique R la grandeur caractéristique du milieu définie par $R = \rho_0 c$. Montrer que le rapport $\frac{\underline{p_1}}{\underline{u_1}}$ s'exprime simplement en fonction de R.
9) Soit l'onde

$$\underline{\psi'_1}(x,t) = A'_1 \exp i(\omega t + kx)$$

$\underline{p'_1}$ et $\underline{u'_1}$ étant les ondes de surpression et de vitesse associées. Exprimer le rapport $\frac{\underline{p'_1}}{\underline{u'_1}}$ en fonction de la résistivité R du milieu.

Le tuyau est maintenant séparé en deux régions :
– la région (1) ($x < 0$) contient un fluide (1) de résistivité acoustique $R_1 = \rho_1 c_1$
– la région (2) ($x > 0$) contient un fluide (2) de résistivité acoustique $R_2 = \rho_2 c_2$
La surface de contact entre les deux fluides est donc le plan perpendiculaire en O à l'axe $x'x$. Une onde acoustique plane sinusoïdale se propage du milieu (1) vers le milieu (2) et est décrite en notation complexe par :

$$\underline{p_1}(x,t) = p_{O1} \exp i(\omega t - k_1 x)$$

A l'interface entre les deux milieux, cette onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans le milieu (1) : $\underline{p_1}'$ et à une onde transmise dans le milieu (2) : $\underline{p_2}$. On admettra que les ondes réfléchie et transmise sont des ondes planes sinusoïdales d'amplitude respective p'_{O1} et p_{O2}.
Justifier que la pression est continue en $x = 0$ et qu'il y a également continuité du débit volumique $S.u$.
10) Montrer que les ondes réfléchie et transmise sont de même pulsation ω que l'onde incidente.
11) Exprimer $\underline{p_1}'$ et $\underline{p_2}$.
12) En exploitant les conditions de continuité, exprimer en fonction de R_1 et R_2 les coefficients de réflexion r_{12} et de transmission t_{12} relatifs aux amplitudes des surpressions. Ces coefficients sont définis par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{p'_{O1}}{p_{O1}} \\ t_{12} &= \frac{p_{O2}}{p_{O1}} \end{aligned}$$

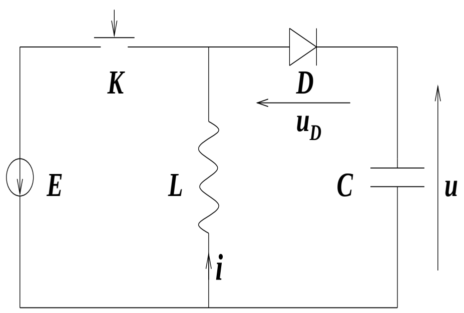
13) On définit la puissance transportée par chaque onde par : $P = S|p.u|$. Déterminer les coefficients de réflexion R et de transmission T relatifs aux puissances acoustiques. Quelle relation lie R à T. Que traduit cette relation ?

14) **Application numérique :** le milieu (1) est de l'air et le milieu (2) est de l'eau. On prendra pour les résistivités acoustiques les valeurs suivantes : $R_1 = 4.5\,10^2$U.S.I et $R_2 = 1.4\,10^6$U.S.I. Déterminer R et T. Commenter.

Soit un tuyau sonore composé de deux parties cylindriques de même axe $x'x$ de sections respectives S_1 et S_2, raccordées par la surface perpendiculaire en O à l'axe $x'x$. Les deux régions sont remplies des fluides (1) et (2). Par définition, on appellera impédance acoustique du milieu i la grandeur $Z_i = \frac{R_i}{S_i}$, rapport de la résistivité acoustique par la section correspondante. On considère une onde plane acoustique incidente $\underline{p_1}$ se propageant dans le milieu (1) dans le sens des x positifs. Elle donne naissance à une onde réfléchie $\underline{p_1}'$ et à une onde transmise $\underline{p_2}$ à l'interface entre les deux milieux.
15) Déterminer en fonction de Z_1 et Z_2 les coefficients de réflexion r_{12} et de transmission t_{12} relatifs aux amplitudes des surpressions.
16) Déterminer les coefficients de réflexion R et T relatifs aux puissances acoustiques.
17) En supposant que les fluides (1) et (2) sont identiques y a-t-il réflexion à l'interface entre les deux milieux ? Si oui, calculer r_{12} et t_{12} et préciser s'il y a changement de phase.
18) Dans le cas où les deux fluides sont de nature différente retrouve-t-on les résultats précédents si $S_1 = S_2$.

III- Electrocinétique : étude de quelques montages simples

1^{er} montage. On étudie l'évolution de la tension u aux bornes du condensateur dans le circuit représenté sur la figure ci-dessous. L'interrupteur a un fonctionnement périodique, de période T (fermé pendant la durée t_1 et ouvert pendant $T - t_1$). La diode D est supposé parfaite.

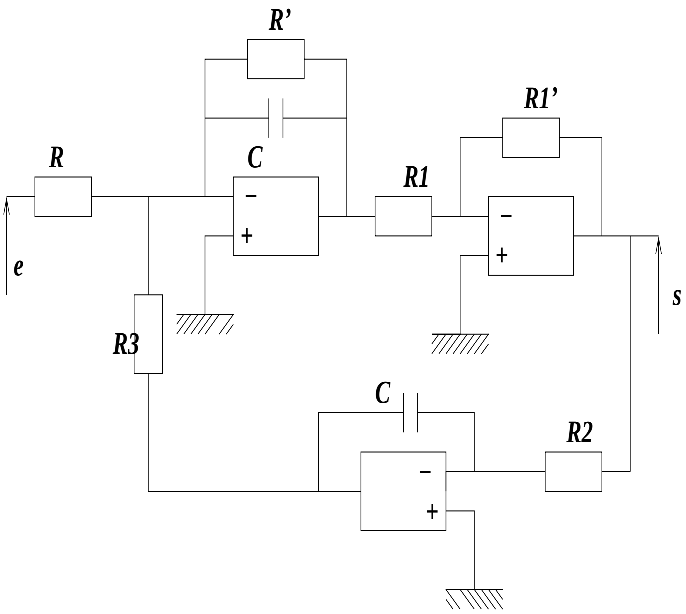


1) Le condensateur étant initialement déchargé et le courant i nul, l'interrupteur est fermé à $t = 0$. Déterminer la loi $u(t)$ pour $0 \leq t \leq T$.
2) Déterminer alors la suite $u_n = u(nT)$ et discuter le résultat obtenu.

On donne $C = 8\ \mu$F, $E = 12$ V, $L = 0.02$ H, $t_1 = 1.25\,10^{-3}$ s, $T = 2\,10^{-3}$ s.

2^{nd} montage. On considère le circuit suivant dans lequel les AO sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

1) Calculer, en régime sinusoïdal établi, la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$. En déduire la nature du montage et donner ses caractéristiques en prenant les valeurs suivantes :



C=680 nF, R_2=R_3=47 Ω, R=R'=6,8 kΩ, R_1=R'_1=6,8 kΩ.
On tracera le diagramme de Bode $G_{dB} = \log(\frac{\omega}{\omega_0})$ où ω_0 est une pulsation à préciser.
2) Quelle est la réponse du circuit à un signal carré de valeur moyenne nulle, d'amplitude E=10 V (variant entre $+E$ et $-E$) et de fréquence f'=1650 kHz.

IV- Optique : Diffraction d'une onde E.M. par un réseau métallique

L'espace est rapporté au trièdre orthonormé direct $Oxyz$ dont les vecteurs unitaires sont notés $\boldsymbol{u}_x$, $\boldsymbol{u}_y$ et $\boldsymbol{u}_z$. j désigne le nombre complexe défini par $j^2 = -1$.
On se propose d'étudier la diffraction d'une onde électromagnétique par un réseau plan métallique utilisé par réflexion.
La surface $y = f(x)$ est celle du réseau dont le pas a est la période de la fonction $f(x)$. Cette surface, infinie dans les directions x et z, sépare l'espace en deux parties (voir figure) :

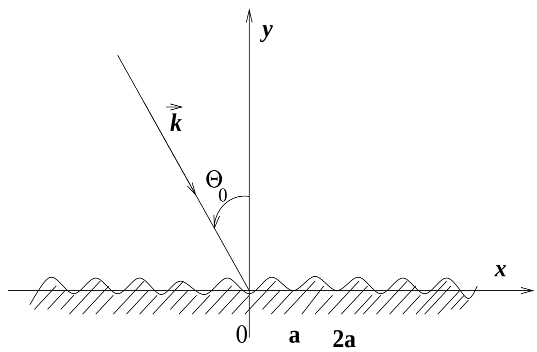
- la région $y > f(x)$ est vide
- la région $y < f(x)$ est remplie d'un métal parfaitement conducteur.

On pose $K = \frac{2\pi}{a}$. Une onde incidente plane monochromatique de pulsation ω polarisée rectilignement, progressive de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ (appartenant au plan xOy) tombe sur la surface du réseau avec un angle d'incidence $\theta_0 = (\boldsymbol{u}_y, -\boldsymbol{k})$.
En un point M de coordonnées x, y, z le champ électrique $\boldsymbol{E}_i$ de cette onde s'écrit, en notation complexe :

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 e^{j(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}-\omega t)} \boldsymbol{u}_z$$

E_0 désigne une constante complexe. Sur lé réseau cette onde donne naissance à une onde diffractée, monochromatique de pulsation ω, dont le champ électrique $\boldsymbol{E}_D$ est aussi polarisé rectilignement suivant Oz et on pose :

$$\boldsymbol{E}_D = E(x, y, z) e^{-j\omega t} \boldsymbol{u}_z$$



On appelle $\boldsymbol{E}_T = \boldsymbol{E}_D + \boldsymbol{E}_i$ le champ électrique total qui règne au-dessus du réseau.

I.a) Rappeler les équations de Maxwell que doivent vérifier le champ électrique total $\boldsymbol{E}_T$ et la champ magnétique total $\boldsymbol{B}_T$ dans le vide (en l'absence de toute charge et de tout courant). en fonction de la vitesse c de la lumière dans le vide.
b) En déduire l'équation de propagation que doit vérifier le champ électrique total $\boldsymbol{E}_T$.
c) Ecrire la condition aux limites à laquelle doit satisfaire le champ électrique total $\boldsymbol{E}_T$ à la surface du réseau.

II.) Déterminer une relation entre le module k du vecteur d'onde incident $\boldsymbol{k}$, ω et c.

III.a) Montrer que la fonction scalaire E ne dépend pas de la variable z.
b) Déterminer l'équation différentielle que doit vérifier la fonction E.
c) Déterminer une relation entre $E(x+a, f(x))$, $E(x, f(x))$, k, a et θ_0.

IV.) On cherche si la fonction $E(x,y) = Ae^{j(\alpha x+\beta y)}$ où les coefficients A, α et β sont des constantes réelles et complexes, est solution pour la détermination de $\boldsymbol{E}_D$.
a) Montrer que nécessairement

1. α et β sont liés par une relation à k (relation (1))
2. α, θ_0 k et K sont liés par une relation qui fait intervenir un nombre entier n (relation (2)).

b.1) Montrer que si a est suffisamment grand (ce que l'on supposera dans la suite du problème), il existe deux entiers positifs (ou nuls) N_1 et N_2 tels que, pour $-N_1 \leq n \leq N_2$, on peut poser

$$\alpha = k \sin\theta \quad (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

Déterminer alors β en fonction de k et de θ et caractériser l'onde ainsi obtenue.
A.N. calculer N_1 et N_2 pour un réseau possédant 500 traits par mm, éclairé par une onde de longueur d'onde $\lambda = 0.55$ μm arrivant sous une incidence de $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$.
b.2) Caractériser le champ électrique de l'onde obtenue lorsque $n < -N_1$ ou $n > N_2$. Que devient cette onde dès qu'elle s'écarte du réseau ? Préciser ce résultat par une application numérique (pour $n = -N_1 - 1$ ou $n = N_2 + 1$ par exemple avec les valeurs numériques précédentes).
c) Montrer en fait que la fonction proposée ne convient pas.

V.) A chaque entier n, on associe la fonction $E_n(x,y) = A_n e^{j(\alpha_n x+\beta_n y)}$ où on a indicé par n les coefficients A, α et β de la question précédente. α_n et β_n satisfont donc aux relations (1) et (2) de la question précédente et on pose de même $\alpha_n = k \sin\theta_n$ lorsque l'entier n est compris entre $-N_1$ et N_2. On admet alors que la solution du problème proposé s'écrit sous la forme d'une somme des solutions précédentes :

$$E(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j(\alpha_n x + \beta_n y)}$$

a) En général on observe l'onde diffractée assez loin du réseau (y grand). Dans ces conditions expliquer pourquoi il suffit de ne considérer, dans la somme précédente, que les termes en n compris entre $-N_1$ et N_2.
b) Vérifier alors que l'on retrouve bien un résultat connu pour les réseaux et retrouver la relation entre θ_n, θ_0, λ, a et n d'une manière plus "classique".

V- E.M. : Propagation d'une onde E.M. dans un milieu matériel

On se propose d'étudier le modèle simplifié suivant de la propagation d'une onde dans un milieu neutre peu dense.
On appelle n^* le nombre d'électrons par unité de volume et on suppose que seul le mouvement des électrons dans le champ électrique extérieur est à prendre en compte.
Sous l'action du champ électrique $\boldsymbol{E}$, les électrons ont un mouvement qui lui est colinéaire et que l'on peut caractériser par l'équation différentielle :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - f\frac{dx}{dt} - eE$$

où x est le déplacement de l'électron par rapport à sa position de repos.
On considère une onde plane monochromatique de pulsation ω de polarisation selon l'axe des x, se propageant selon l'axe des z et on se place en régime forcé.
On utilisera la notation complexe : $E(z,t) = E_0 e^{j(kz-\omega t)}$ et on posera $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_c^2 = \frac{n^* e^2}{\varepsilon_0 m}$.

1) Déterminer $x(z,t)$;
2) En déduire la densité volumique de courant due au mouvement des électrons.
3) En utilisant les équations de Maxwell et en assimilant le milieu au vide, donner la relation entre ω, k et les grandeurs caractéristiques du milieu.
4) Quel phénomène est traduit par le fait que k est complexe ?
5) On suppose que f est négligeable et que $\omega_0 \gg \omega$. Montrer que si n est l'indice du milieu on a :

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

où A, B et C sont des constantes caractéristiques de ce milieu que l'on explicitera en fonction de ω_0, ω_c et c.
La forme générale de l'indice d'un milieu matériel est souvent bien vérifiée par une formule de ce type.
6) Donner la relation entre la vitesse de groupe $\omega_g = \frac{d\omega}{dt}$ d'une onde E.M. dans un milieu matériel en fonction de c, de n (indice du milieu), de λ (longueur d'onde dans le vide) et de la dérivée $\frac{dn}{d\lambda}$.
7) On donne les résultats expérimentaux suivants pour l'eau et le sulfure de carbone, à $\lambda_{\text{vide}} = 657$ nm :
- $v_g = 2.227 \pm 0.01110^8$ ms^{-1} (eau), $v_g = 1.775 \pm 0.01510^8$ ms^{-1} (CS_2)
- $n = 1.331$, $\frac{dn}{d\lambda} = -2.510^4$ m^{-1} (eau) ; $n = 1.614$, $\frac{dn}{d\lambda} = -1.210^5$ m^{-1} (CS_2)

Calculer les vitesses de groupe et de phase théoriques pour $\lambda_{\text{vide}} = 657$ nm. Conclure.