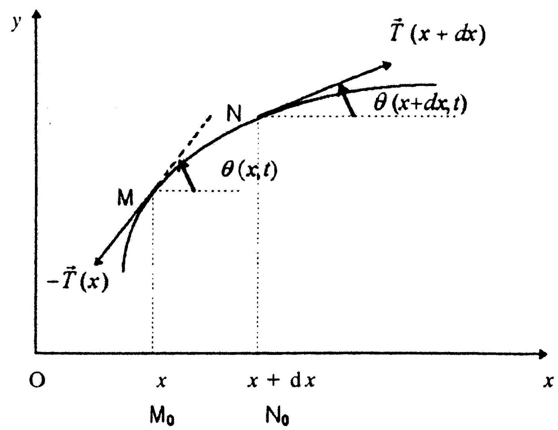
PARTIE 3

ÉTUDE D'UN ÉMETTEUR SONORE
LA CORDE VIBRANTE



On considère une corde initialement au repos, sans raideur, de masse m, de longueur L (masse linéique constante μ), tendue par une tension T.

Cette corde se confond alors avec l'axe Ox.

On étudie les petits mouvements transversaux de la corde dans le plan xOy, de part et d'autre de cette position d'équilibre.

L'élongation à l'instant t d'un point M d'abscisse x est notée $y(x, t)$.

La tangente en M à la corde fait avec l'axe Ox un angle $\theta(x, t)$. Les déplacements restant petits, θ demeure petit, c'est-à-dire que $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$.

On suppose de plus que la tension reste pratiquement uniforme et constante, égale à T.

On néglige l'action du champ de pesanteur sur le mouvement ainsi que toute cause d'amortissement.

3.1. Équation d'onde pour un ébranlement le long de la corde.

3.1.1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à un élément de corde MN d'abscisse comprise entre x et $x + dx$, et en déduire l'équation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Exprimer la constante v en fonction de T et μ et en donner la dimension.

Que représente-t-elle ?

3.1.2. *Application numérique :*

Calculer v pour une corde d'acier de masse volumique $7,2 \cdot 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}, de rayon 1 mm, sous une tension de 3 000 N (corde de piano).

3.2. Recherche des solutions en ondes stationnaires.

La corde est fixée rigidement en ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = L$.

On cherche les solutions de l'équation d'onde (1) sous la forme :

$$y(x, t) = f(x)\, g(t).$$

3.2.1. Montrer que f et g doivent être des fonctions sinusoïdales.

On notera k et ω leurs pulsations respectives.

Quelle relation lie ω et k ?

3.2.2. Montrer que ω ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes :

$$\omega_n \ (n \in N).$$

Exprimer ω_1.

De même, en déduire que, pour des valeurs L et v données, la longueur d'onde λ ne peut prendre qu'une série de valeurs λ_n. Exprimer λ_n en fonction de L.

3.2.3. À chaque valeur de ω_n correspond un mode propre.

Le mode $n = 1$ porte le nom de mode fondamental. Les modes correspondant aux valeurs $n \geqslant 2$ sont les harmoniques.

Exprimer l'élongation du mode de vibration d'indice n.

Donner une représentation graphique de la corde en mouvement pour les trois premiers harmoniques.

3.2.4. *Exercice.*

La guitare classique comporte six cordes (en boyau ou en nylon) alors que les guitares électriques sont équipées de cordes d'acier.

Le tableau de données ci-dessous fournit, notamment, pour chaque corde, la valeur de sa fréquence fondamentale et de son diamètre.

Corde n°	1	2	3	4	5	6
Fréquence fondamentale (Hz)	82,5	110	147	196	247	330
L (cm)	63					
Diamètre (mm)	1,12	0,89	0,70	0,55	0,35	0,25
Masse volumique (kg $\cdot$ m^{-3})	Boyau Nylon Acier	975 1 180 7 800				

3.2.4.1. Calculer les tensions nécessaires pour que la guitare soit parfaitement accordée (mode fondamental) lorsqu'elle est équipée de cordes en acier.

Pour une fréquence donnée, et pour des cordes de même diamètre, quelle est l'influence de la nature du matériau sur la tension à exercer ?

Application numérique.

Pour f = 196 Hz, quelles sont les tensions à exercer dans le cas d'une corde en boyau, en nylon ou en acier ?

3.2.4.2. Quelle variation relative peut être tolérée sur la tension de la corde n° 4 pour que la fréquence relative du fondamental correspondant ne varie pas plus de 1 %.

Application numérique pour la corde en acier.

3.3. Aspect énergétique.

On se place toujours dans le cas des ondes stationnaires.

3.3.1. Donner l'expression générale de l'énergie cinétique totale de la corde.

3.3.2. Exprimer l'allongement total ΔL de la corde.
L'énergie potentielle élastique totale de la corde est donnée par $T\Delta L$.
Justifier cette expression.
En déduire l'expression générale de l'énergie potentielle.

3.3.3. On considère le mouvement de la corde dans le mode de vibration n représenté sous la forme :

$$y_n(x,t) = A_n \sin k_n x \sin(\omega_n t + \psi_n) \qquad \text{avec } k_n = \frac{\omega_n}{v} = \frac{n\pi}{L}.$$

Calculer l'énergie totale de la corde.
Montrer qu'elle s'écrit :

$$E_n = \frac{n^2\pi^2}{4L} T A_n^2.$$

Commenter le résultat obtenu.

3.3.4. La solution générale de l'équation de propagation est une combinaison linéaire des divers modes de vibration. Compte tenu de l'orthogonalité de la fonction sinus, soit :

$$\int_0^L \sin k_n x \sin k_m x \, dx = \frac{L}{2}\delta_{n,m} \qquad \text{avec :} \quad \delta_{n,m} = 1 \text{ si } n = m, \quad \delta_{n,m} = 0 \text{ si } n \neq m$$

exprimer l'énergie totale E de la corde en fonction des E_n.

Conclure.

3.4. Analyse spectrale.

La solution générale de l'équation de propagation peut se mettre sous la forme :

(2) $$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)\right].$$

Les coefficients a_n et b_n étant déterminés à partir des conditions initiales, et donnés par :

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L y_{(x,t=0)} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx ;$$

$$b_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{(x,t=0)} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx .$$

3.4.1. *Analyse spectrale d'une corde frappée* (piano).
La corde étant initialement immobile, on la frappe avec un petit marteau de largeur e ($e \ll L$) situé entre les abscisses $x = a$ et $x = a + e$.
On admettra que les conditions initiales correspondantes sont :

$$x \in [0, L] \quad : \quad y_{(x,t=0)} = 0$$

$$x \in [a, a+e] \quad : \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{(x,t=0)} = v_0$$

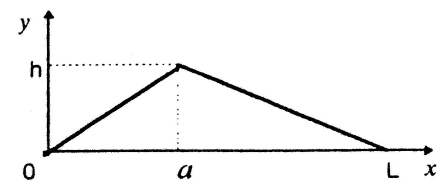
$$x \in [0, a[\ \text{ et } \ ]a+e, L] \quad : \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{(x,t=0)} = 0 .$$

3.4.1.1. Déterminer les coefficients a_n et b_n en fonction de v_0, e, n, L, v et a.

3.4.1.2. Quelle application musicale peut-on tirer du fait que ces coefficients dépendent de a ?
En quel point faut-il frapper la corde pour supprimer le 7[e] harmonique dissonant ?

3.4.1.3. Quels sont les harmoniques présents dans le son émis par la corde frappée, dans le cas où $a = \frac{L}{2}$?
Ce résultat était-il prévisible ?
Donner l'expression de $y(x,t)$.
Exprimer l'énergie E_n de vibration du mode n.
Conclure quant à la variation de l'amplitude et de l'énergie en fonction de n.

3.4.2. *Analyse spectrale d'une corde pincée* (guitare).
La même corde de longueur L est à présent pincée comme schématisée sur la figure et abandonnée sans vitesse initiale.



3.4.2.1. Écrire les fonctions : $y_{(x,t=0)}$ et $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{(x,t=0)}$ correspondant à ces conditions initiales.

On distinguera les domaines : $0 \leqslant x \leqslant a$
$a \leqslant x \leqslant L$.

3.4.2.2. Calculer les coefficients a_n et b_n en fonction de a, L, h, n.
En déduire l'énergie de vibration E_n. Comment varie E_n avec n ?

3.4.2.3. L'endroit ($x = a$) où l'on pince la corde joue vis-à-vis des harmoniques présents le même rôle que pour la corde frappée.

Reprendre, dans le cas $a = \frac{L}{2}$, les questions du paragraphe 3.4.1.3.

3.5. Conclusion musicale.

3.5.1. Comparer les spectres d'une corde de piano et d'une corde de guitare.

3.5.2. Conclure quant à la différence de timbre sonore de ces deux instruments.