Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Direction générale pour l'enseignement supérieur et l'insertion professionnelle

Service de la stratégie de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle

Département de l'architecture et de la qualité des formations de niveau licence

NOTE DE PRÉSENTATION

Les présents arrêtés, au nombre de huit, vous sont soumis pour visa avant présentation devant les instances consultatives.

Ils s'inscrivent dans la seconde phase du chantier de rénovation des programmes des classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE) de la filière scientifique, phase consacrée aux programmes de seconde année.

Cependant, l'écriture des nouveaux programmes de seconde année d'informatique et de langues vivantes étrangères, ainsi que de sciences industrielles de l'ingénieur (SII), pour les voies MP, PC, PT, PSI et TSI, ayant pu être menée à bien en même temps que celle des programmes de première année, cette seconde phase ne concerne plus, en fait, que les programmes de mathématiques, de physique et de chimie pour les voies MP, PC, PT, PSI, TPC et TSI, et que ceux de mathématiques, de physique, de chimie et de sciences de la vie et de la terre (SVT) pour les voies BCPST et TB (pour cette dernière voie, un enseignement de biotechnologies étant, en outre, adjoint à celui de SVT). On notera que, pour des raisons de cohérence scientifique, les programmes des deux années de SVT, pour la voie BCPST, et de SVT et biotechnologies, pour la voie TB, n'ont pas été scindés et font l'objet d'une publication globale, la présente version des programmes de première année annulant et remplaçant, sans la modifier, celle publiée dans les arrêtés du 4 avril 2013.

Ces programmes de seconde année ont été élaborés selon les mêmes principes et les mêmes modalités que les programmes de la filière scientifique publiés au printemps dernier. Du 20 mai au 30 juin 2013, ils ont fait l'objet d'une consultation publique en ligne, sur le site du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche. Les 233 commentaires recueillis ont donné lieu à des corrections et ajustements.

Ces programmes entrent en vigueur à la rentrée 2013 pour ceux qui concernent la première année de CPGE, et à la rentrée 2014 pour ceux qui concernent la seconde année.

Les présents arrêtés n'affectent en rien les volumes horaires des enseignements concernés.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche

Arrêté du 2013

relatif aux programmes de mathématiques et de physique-chimie de la classe préparatoire scientifique physique et sciences de l'ingénieur (PSI)

NOR ESRS A

Le ministre de l'éducation nationale et la ministre de l'enseignement supérieur et de la recherche,

Vu le code de l'éducation, et notamment ses articles D. 612-19 à D. 612-29 ;
Vu l'arrêté du 10 février 1995 modifié, définissant la nature des classes composant les classes préparatoires scientifiques aux grandes écoles ;
Vu l'arrêté du 20 juin 1996 modifié, définissant les objectifs de formation et le programme des classes préparatoires de seconde année de physique et sciences de l'ingénieur (PSI) et de physique et sciences de l'ingénieur* (PSI*) ;
Vu l'avis du ministre de la défense en date du 2013 ;
Vu l'avis du Conseil national de l'enseignement supérieur et de la recherche en date du 2013 ;
Vu l'avis du Conseil supérieur de l'éducation en date du 2013,

Arrêtent :

Article 1er

Les programmes de seconde année de mathématiques, de physique et de chimie de la classe préparatoire scientifique physique et sciences de l'ingénieur (PSI), figurant respectivement aux annexes 1, 2 et 3 de l'arrêté du 20 juin 1996 modifié susvisé, sont remplacés par ceux figurant respectivement aux annexes 1 et 2 du présent arrêté.

Article 2

Les programmes du présent arrêté entrent en vigueur à compter de la rentrée universitaire 2014.

Article 3

Le directeur général de l'enseignement scolaire et la directrice générale pour l'enseignement supérieur et l'insertion professionnelle sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au *Journal officiel* de la République française.

Fait le 2013

Pour le ministre de l'éducation nationale et par délégation :
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
J.-P. DELAHAYE

Pour la ministre de l'enseignement supérieur et de la recherche et par délégation :
Par empêchement de la directrice générale pour l'enseignement supérieur et l'insertion professionnelle,
J.- M. JOLION

NB : Le présent arrêté et ses annexes seront consultables au *Bulletin officiel* du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche et au *Bulletin officiel* du ministère de l'éducation nationale du mis en ligne sur les sites www.enseignementsup-recherche.gouv.fr et www.education.gouv.fr

ANNEXE 1

Classe préparatoire PSI
Projet de programme de mathématiques

Table des matières

Le programme de mathématiques de PSI, dans le prolongement de ceux de première année, s'inscrit entre deux continuités : en amont avec les programmes rénovés du lycée, en aval avec les enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études universitaires. Il est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, et aussi pour leur permettre de se former tout au long de la vie.

Objectifs de formation

La formation mathématique en classe préparatoire scientifique vise deux objectifs :
- l'acquisition d'un solide bagage de connaissances et de méthodes permettant notamment de passer de la perception intuitive de certaines notions à leur appropriation, afin de pouvoir les utiliser à un niveau supérieur, en mathématiques et dans les autres disciplines. Ce degré d'appropriation suppose la maîtrise du cours, c'est-à-dire des définitions, énoncés et démonstrations des théorèmes figurant au programme ;
- le développement de compétences utiles aux scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs ou enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour les résoudre, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.

Pour répondre à cette double exigence, et en continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires définissent un corpus de connaissances et de capacités, et explicitent six grandes compétences qu'une activité mathématique permet de développer :
- **s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique…) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel…), contrôler les résultats ;
- **communiquer à l'écrit et à l'oral** : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

S'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique.
La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît comme un champ d'utilisation des concepts développés en algèbre linéaire et euclidienne ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et illustrent certains résultats d'analyse.
Percevoir la globalité et la complexité du monde réel exige le croisement des regards disciplinaires. Ainsi, les mathématiques interagissent avec des champs de connaissances partagés par d'autres disciplines. Aussi le programme valorise-t-il l'interprétation des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure de grandeurs, incertitudes...)
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec les autres disciplines.
Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces euclidiens, les fonctions d'une ou plusieurs variables réelles, les fonctions vectorielles.

Le programme d'algèbre comprend deux volets. Le premier prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année et aboutit à la théorie de la réduction dont il développe quelques applications. Le second, consacré aux espaces préhilbertiens réels et à l'algèbre euclidienne, met l'accent sur les relations entre les points de vue vectoriel, matriciel et géométrique, notamment à travers une étude spécifique aux dimensions deux et trois, et à l'énoncé du théorème spectral.
Le vocabulaire sur les structures algébriques est introduit au fur et à mesure des besoins.

Le programme d'analyse est introduit par un chapitre de topologie des espaces vectoriels normés. Celui-ci s'attache à développer et illustrer les notions générales dans le cadre de la dimension finie avant d'aborder celui des espaces fonctionnels. L'introduction des normes de la convergence uniforme, en moyenne ou en moyenne quadratique pose le cadre topologique de l'étude des suites et séries de fonctions, qui aboutit aux théorèmes classiques de régularité et d'interversion. Cette étude bénéficie de l'introduction de nouveaux outils relatifs aux séries numériques, permettant de compléter l'approche qui en a été faite en première année.
Le chapitre sur les séries entières permet de construire des fonctions de variable complexe et de fournir un outil pour la résolution d'équations différentielles linéaires.
La généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ des résultats d'analyse réelle étudiés en première année fournit, avec une étude modeste des arcs paramétrés, une nouvelle occasion de relier les registres analytique et géométrique.
L'étude de l'intégration, entamée en première année dans le cadre des fonctions continues sur un segment, se poursuit dans celui des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque. L'intégrale généralisée est un intermédiaire à l'introduction de la notion de fonction intégrable, qui permet d'énoncer les théorèmes classiques sur l'intégration des suites et séries de fonctions et sur les intégrales à paramètre.
Le chapitre relatif au calcul différentiel à plusieurs variables est limité au cas des fonctions numériques de deux ou trois variables réelles. Il fournit des méthodes et des outils opérationnels pour résoudre des problèmes pouvant être issus d'autres disciplines scientifiques (recherche d'extremums, équations aux dérivées partielles). Il comporte un paragraphe présentant les premières notions de géométrie différentielle et favorise ainsi les interprétations et visualisations géométriques.
L'étude des équations et des systèmes différentiels est limitée au cas linéaire, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. L'utilisation dans ce cadre du théorème de Cauchy permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'origine analytique. Le cas particulier où les coefficients sont constants permet de mettre en œuvre des techniques de réduction matricielle.

L'enseignement des probabilités présente brièvement le formalisme de Kolmogorov qui sera repris dans le cursus ultérieur des étudiants. Son objectif majeur est l'étude des variables aléatoires discrètes, en prolongement des variables finies étudiées en première année, ce qui permet d'élargir aux processus stochastiques à temps discret le champ des situations réelles se prêtant à une modélisation probabiliste.
La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants. L'inégalité qui la sous-tend précise la vitesse de convergence de cette approximation et valide l'interprétation de la variance comme indicateur de dispersion.
Ce chapitre a vocation à interagir avec le reste du programme.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.
Le programme est décliné en chapitres. Chaque chapitre comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes.
En particulier, l'ordre de présentation des différents chapitres ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

– celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents chapitres ;
– celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
– celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.
Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les autres disciplines scientifiques.
Les liens avec les disciplines scientifiques et technologiques sont identifiés par le symbole ⇆ PC pour la physique et la chimie, ⇆ SI pour les sciences industrielles de l'ingénieur et ⇆ I pour l'informatique.

Usage de la liberté pédagogique

Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :
– pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est en effet d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Quel que soit le contexte (cours, travaux dirigés), la pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants.
– didacticien, il choisit le contexte favorable à l'acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective d'une problématique avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, mais aussi des questions d'actualité ou des débats d'idées, permet de motiver son enseignement.

Programme

Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :
- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables, polynômes de matrices, trace, formes linéaires, hyperplans ;*
- *passer du point de vue géométrique au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques et préconise l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit et somme d'espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels ; sous-espaces supplémentaires.	
Base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel F de E ; base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à une décomposition en somme directe $E = \bigoplus E_i$.	Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base.
Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors : $$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	
Si $E_1, \dots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$ pour tout i, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $u_{\mid E_i} = u_i$ pour tout i.	
b) Matrices et endomorphismes	
Polynôme d'une matrice carrée, d'un endomorphisme. Polynôme annulateur.	Applications au calcul de l'inverse et des puissances.
Matrices définies par blocs, opérations.	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.	Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interpréter en termes d'endomorphismes une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
Si f et g commutent alors le noyau et l'image de f sont stables par g.	
Matrices semblables. Interprétation en termes d'endomorphisme.	La notion de matrices équivalentes est hors programme.
Trace d'une matrice carrée. Linéarité, trace d'une transposée, d'un produit. Invariance de la trace par similitude.	
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Déterminants	
Exemples de déterminants.	Les étudiants doivent savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, et connaître l'expression d'un déterminant de Vandermonde. ⇆ I : calcul d'un déterminant.
d) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie	
Formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.	L'étude de la dualité est hors programme.
Hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.	Les étudiants doivent savoir caractériser un hyperplan comme noyau d'une forme linéaire non nulle, supplémentaire d'une droite, sous-espace de dimension $n-1$.
Équations d'un hyperplan dans une base.	Deux équations linéaires définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.
Exemples des droites et des plans en dimension 2 et 3.	

B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées permet d'approfondir les notions étudiées en première année. Elle sera appliquée à l'étude des isométries et des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien. Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux points de vue suivants :

- *l'aspect géométrique (sous-espaces propres, sous-espaces stables) ;*
- *l'aspect algébrique (critères de réduction reposant sur les polynômes annulateurs).*

L'application des résultats de la réduction à la recherche des solutions d'une récurrence linéaire à coefficients constants crée un nouveau pont entre l'algèbre et l'analyse et anticipe l'étude des équations différentielles linéaires dont la résolution repose sur des outils similaires.

L'étude des classes de similitude est hors programme ainsi que la notion de polynôme minimal.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres	
Droite stable par un endomorphisme.	
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.	Les étudiants doivent savoir que si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme. ⇆ SI : matrice d'inductance : inductance cyclique et inductance homopolaire.
Les sous-espaces propres sont en somme directe.	
Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u.
Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.	
Expressions du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé.	
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre.	
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit sur un sous-espace stable.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Diagonalisation	
Un endomorphisme est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Interprétation matricielle de ces résultats.
Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.	
Application à la résolution des récurrences linéaires à coefficients constants.	Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement une relation de récurrence linéaire.
c) Diagonalisation et polynômes annulateurs	
Théorème de Cayley-Hamilton.	Démonstration non exigible.
Un endomorphisme de E est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.	Démonstration non exigible. Interprétation matricielle de ce résultat. Le théorème de décomposition des noyaux est hors programme.
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$ pour polynôme annulateur. L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.	
d) Trigonalisation	
Un endomorphisme est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbb{K}$.	Démonstration non exigible. Interprétation matricielle de ce résultat.
En particulier, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication. $\leftrightarrows$ I : calcul de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux puissances itérées consécutives.

Espaces préhilbertiens réels et euclidiens

L'objectif de ce chapitre est triple :

- *généraliser les outils de géométrie vectorielle euclidienne du plan et de l'espace à des dimensions quelconques ;*
- *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, notamment dans le cas des dimensions* 2 *et* 3 *en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *aborder la réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles.*

A - Espaces préhilbertiens réels

L'objectif majeur est le théorème de projection orthogonale et l'existence de la meilleure approximation quadratique. On s'appuie sur des exemples de géométrie du plan et de l'espace pour illustrer les différentes notions.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire et norme associée	
Espace préhilbertien réel, espace euclidien.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$. Les étudiants doivent savoir manipuler les identités remarquables sur les normes (développement de $\\|u \pm v\\|^2$, identité de polarisation).
Exemples de référence : produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produits scalaires définis par une intégrale sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.	Application géométrique dans le cas du produit scalaire usuel du plan ou de l'espace, équations de plans et de droites.
Inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas d'égalité.	
Norme associée au produit scalaire.	Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.
b) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore.	
Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	⇆ I : calcul d'une base orthonormée de polynômes pour différents exemples de produit scalaire. ⇆ I : décomposition QR d'une matrice inversible.
c) Bases orthonormales d'un espace euclidien	
Existence de bases orthonormales. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale.	
Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale.	Expression $X^{\mathrm{T}}Y$ du produit scalaire de deux vecteurs x et y de coordonnées X et Y dans une base orthonormale. Les étudiants doivent savoir calculer au moyen du produit scalaire les coefficients de la matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale.
d) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace V de dimension finie.	Notation $V^\perp$.
Projection orthogonale p_V sur un sous-espace V de dimension finie.	Les étudiants doivent savoir déterminer $p_V(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormale de V ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_V(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de V. ⇆I : programmation de ces méthodes.
Inégalité de Bessel : pour tout $x \in E$, $\\|p_V(x)\\| \leqslant \\|x\\|$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
$p_V(x)$ est l'unique vecteur y_0 de V tel que $$\|x - y_0\| = \min_{y \in V} \|x - y\|$$	La distance de x à V, notée $d(x, V)$, est égale à ce minimum. Application géométrique à des calculs de distances dans le plan ou l'espace.

e) Formes linéaires sur un espace euclidien

Représentation d'une forme linéaire à l'aide d'un produit scalaire.	
Vecteur normal à un hyperplan.	Les étudiants doivent savoir calculer la distance d'un vecteur à un hyperplan, la distance d'un vecteur à une droite.

B - Isométries et endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- *établir les liens entre les registres géométrique et matriciel en dimension quelconque ;*
- *décrire les isométries et les matrices orthogonales en dimensions deux et trois ;*
- *énoncer les formes géométrique et matricielle du théorème spectral.*

La notion d'adjoint est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.	Autre dénomination : automorphisme orthogonal.
Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormale.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	

b) Matrices orthogonales

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle.	Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormale.
Caractérisation par l'une des relations $MM^{\mathrm{T}} = I_n$ ou $M^{\mathrm{T}}M = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormale.	
Groupe orthogonal d'ordre n.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.

c) Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3

Orientation. Bases orthonormales directes.	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base orthonormale directe : produit mixte.	Notations $[\vec{u}, \vec{v}]$, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$. Interprétation géométrique comme aire ou volume.
Produit vectoriel. Calcul dans une base orthonormale directe.	⇆ PC : moment cinétique, force de Laplace.
Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien orienté de dimension 3.	

d) Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Détermination des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.	Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté. Produit de deux matrices de rotation. Composée de deux rotations d'un plan euclidien. Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	Écriture complexe d'une rotation.
e) Isométries d'un espace euclidien de dimension 3	
Réduction en base orthonormale d'une isométrie vectorielle d'un espace euclidien de dimension 3. Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, axe et mesure de l'angle d'une rotation.	Interprétation matricielle.
f) Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles	
Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.	
Théorème spectral : tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres. Interprétation matricielle : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1}$.	Démonstration non exigible.

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Ce chapitre vise les objectifs suivants :

- *généraliser au cas des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel. ;*
- *préparer l'introduction de la norme de la convergence uniforme, afin de fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.*

Le théorème (admis) d'équivalence des normes permet de ramener l'étude topologique à celle de $\mathbb{K}^p$, qui peut servir de cadre à la présentation des différentes notions (boules, ouverts, limite et continuité...).

L'aspect géométrique de certains concepts topologiques gagne à être illustré par de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe ; espace vectoriel normé. Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère.	Normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$.
Partie convexe. Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	Convexité des boules.
b) Équivalence des normes	
Deux normes N et N' sont dites équivalentes s'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que $N \leqslant \alpha N'$ et $N' \leqslant \beta N$. Propriétés invariantes par changement de normes équivalentes.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème d'équivalence des normes en dimension finie.	Démonstration hors programme. Illustration sur des normes simples définies sur $\mathbb{K}^p$.
c) Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie	
Convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.	Exemples de suites de matrices. Le théorème d'équivalence des normes permet de ramener l'étude de la convergence d'une suite à celle de ses coordonnées dans une base.
Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	
d) Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie	
	L'étude topologique d'un espace vectoriel normé de dimension finie se ramène à celle de $\mathbb{K}^p$ muni d'une norme.
Point intérieur à une partie. Partie ouverte.	Une boule ouverte est un ouvert.
Point adhérent à une partie. Partie fermée.	Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère sont des fermés.
Intérieur, adhérence, frontière.	Ces notions sont illustrées par des figures. Seules les définitions sont au programme.
e) Limite et continuité en un point.	
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition. Caractérisation séquentielle de la limite. Équivalence entre l'existence d'une limite et celle des limites des coordonnées de la fonction dans une base de l'espace d'arrivée. Opérations algébriques sur les limites, composition. Continuité en un point. Lien avec la continuité des coordonnées.	
f) Continuité sur une partie	
Opérations algébriques, composition.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée est bornée et atteint ses bornes.	Démonstration non exigible.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	
Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne.	La notion de norme subordonnée est hors programme.
Continuité des applications multilinéaires et polynomiales sur $\mathbb{K}^n$.	Exemple du déterminant.

Suites et séries

A - Séries numériques

Cette partie a pour objectif de consolider et d'élargir les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.
La semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Compléments sur les séries à valeurs réelles	
Théorème de comparaison entre une série et une intégrale : si f est une fonction continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, positive et décroissante, alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0,+\infty[$.	
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	Démonstration non exigible.
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
b) Produit de Cauchy de deux séries	
Le produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nombres complexes est la série $\sum w_n$ avec : $$w_n = \sum_{p+q=n} u_q v_p.$$	
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum w_n$ l'est aussi et $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\Big).$$	Démonstration non exigible.

B - Suites et séries de fonctions

L'objectif de ce chapitre est de définir différents modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions et d'étudier la stabilité des propriétés de ces fonctions par passage à la limite. En prolongement du chapitre sur les espaces vectoriels normés de dimension finie, un lien est établi avec l'utilisation de la norme de la convergence uniforme.
Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions.	
La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.	Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, les étudiants doivent savoir utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est-à-dire telle que pour tout n, $\\|f_n\\|_\infty \leqslant \alpha_n$.
La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions	
Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Théorème de la double limite : soit (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers f sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie) ; si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a, alors la suite (ℓ_n) admet une limite ℓ, f admet une limite en a et cette limite est égale à ℓ.	Démonstration hors programme.
Interversion limite-intégrale : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors $$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	
Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite (f_n') converge uniformément sur I vers h, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = h$.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.	Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathscr{C}^k$ de la limite sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})_{n\geqslant 0}$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})_{n\geqslant 0}$ sur tout segment de I.
c) Régularité de la somme d'une série de fonctions	
Continuité de la somme : si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors sa somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Théorème de la double limite : soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie) ; si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I, de somme S, et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a alors la série $\sum \ell_n$ converge, la fonction S admet une limite en a et : $$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$	Démonstration hors programme.
Intégration terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$; si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série des intégrales est convergente et on a : $$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	
Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ; si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I. Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathscr{C}^k$ de la somme.

C - Séries entières

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :
- *étudier la convergence d'une série entière de variable complexe et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

La théorie des séries entières sera appliquée au cas des séries génératrices dans le chapitre dédié aux variables aléatoires discrètes et à la recherche de solutions d'équations différentielles linéaires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rayon de convergence	
Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\|z\| < \|z_0\|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble des réels positifs ρ tels que la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée.	Pour $\|z\| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
Disque ouvert de convergence, intervalle de convergence.	
Si R_a est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, et R_b celui de $\sum b_n z^n$, alors : si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$; si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.	
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.	
Règle de d'Alembert.	
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Régularité de la somme	
Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.	On admet la continuité de la somme d'une série entière d'une variable complexe sur le disque ouvert de convergence. L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ou du disque de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.	
Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.	
Expression des coefficients d'une série entière au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.	
c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle	
Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.	
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.	
Unicité du développement en série entière.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.
d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe	
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert. Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$	

Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

L'objectif de ce chapitre est double :

- *généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique, en vue notamment de préparer le chapitre sur les équations différentielles ;*
- *formaliser des notions géométriques (arc paramétré, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques.*

Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables	
Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle.	Taux d'accroissement et développement limité d'ordre un. Interprétations géométrique et cinématique. ⇆ PC, SI : vecteur vitesse.
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivée de $L \circ f$, $B(f,g)$, $f \circ \varphi$ où f et g sont dérivables et à valeurs vectorielles, L est linéaire, B est bilinéaire, φ est dérivable et à valeurs réelles.	Application au produit scalaire et au déterminant dans une base de $\mathbb{R}^2$ de deux fonctions vectorielles.
b) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Fonction de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^\infty$.	⇆ PC, SI : vecteur accélération. Brève extension des résultats du paragraphe précédent.
c) Arcs paramétrés	
Arc paramétré de classe $\mathscr{C}^k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Point régulier, tangente en un point régulier.	
Construction d'arcs plans.	Les étudiants doivent savoir utiliser des développements limités pour déterminer l'allure d'un arc au voisinage d'un point et des développements asymptotiques pour étudier ses branches infinies. ⇆ I : tracé d'arcs paramétrés. L'étude des arcs définis par une équation polaire est hors programme.
Longueur d'un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$.	Les notions d'abscisse curviligne et de paramétrage admissible sont hors programme.

Intégration

L'objectif de ce chapitre est multiple :

– *Étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées*
– *Définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable*
– *Compléter le chapitre dédié aux suites et aux séries de fonctions par le théorème de la convergence dominée et le théorème d'intégration terme à terme*
– *Étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions continues par morceaux	
Fonctions continues par morceaux sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des résultats sur les fonctions continues étudiés en première année. Aucune construction n'est exigible.
b) Intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$	
Si f est une application à valeurs complexes continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.	Intégrale divergente.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$.	Notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Intégrales de référence : $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\int_0^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$.	Les étudiants doivent connaître la nature de $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ selon le signe de α.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Changement de variable : si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ est continue par morceaux alors $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ est convergente si et seulement si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et, si tel est le cas, elles sont égales.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.
Intégration par parties sur un intervalle quelconque.	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de $f'g$ et fg' sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.
d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	
Intégrale absolument convergente.	

Contenus	Capacités & Commentaires
La convergence absolue implique la convergence et dans ce cas, la valeur absolue (ou le module) de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue (ou du module).	Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, la démonstration utilise les parties positive et négative de la fonction.
Une fonction continue par morceaux sur un intervalle I est dite intégrable sur I si son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_I f$.
Pour f et g fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: – si $\lvert f\rvert \leqslant \lvert g\rvert$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$. – si $f(x) \underset{x\to\infty}{=} O\big(g(x)\big)$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$. – si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $[a,+\infty[$.	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.
Si f est continue et intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_I \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t = 0$ implique $f = 0$.	
Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux intégrables sur I.	
Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I.	Structure préhilbertienne de l'espace des fonctions continues de carré intégrable sur I et à valeurs réelles.
Le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable. Inégalité de Cauchy-Schwarz.	

e) Suites et séries de fonctions intégrables

Théorème de convergence dominée : si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et : $$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Démonstration hors programme.
Théorème d'intégration terme à terme : si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I \lvert f_n(t)\rvert\,\mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et : $$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	Démonstration hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
f) Intégrales à paramètre	
Théorème de continuité : si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que : – pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ; – pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ; – il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$, on ait $\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $x \mapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I.	Démonstration non exigible. Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I.
Théorème de dérivation : si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que : – pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ; – pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ; – pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J ; – il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$, on ait $\left\lvert \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et on a sur I : $$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	Démonstration non exigible. Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I. $\leftrightarrows$ PC : transformées de Fourier. $\leftrightarrows$ SI : transformée de Laplace, théorème de la valeur initiale, théorème de la valeur finale.
Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.	

Probabilités

Les chapitres de probabilités permettent de développer les compétences suivantes :

- *modéliser des situations aléatoires par le choix d'un espace probabilisé ou de variables aléatoires adéquats ;*
- *maîtriser un formalisme spécifique aux probabilités.*

A- Espaces probabilisés

Cette partie a pour objectif la mise en place du cadre général de la théorie des probabilités permettant d'aborder l'étude de processus stochastiques à temps discret. Cette mise en place se veut minimale. En particulier :

- *la notion de tribu ne doit donner lieu à aucun développement théorique autre que sa définition ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ensembles finis ou dénombrables. Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, d'un produit cartésien de deux ensembles dénombrables.	Un ensemble fini ou dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires

b) Espace probabilisé

Si Ω est un ensemble, on appelle *tribu* sur Ω une partie $\mathscr{A}$ de l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que :

i. $\Omega \in \mathscr{A}$,

ii. pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$,

iii. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, la réunion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathscr{A}$.

L'ensemble Ω est l'univers ; il n'est en général pas précisé. Les éléments de $\mathscr{A}$ sont les événements. Les étudiants doivent savoir expliciter un événement à partir d'autres événements en utilisant la réunion, l'intersection et la complémentation. On fait le parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste.

Si Ω est un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω, on appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathscr{A})$ une application $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que :

i. $P(\Omega) = 1$,

ii. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ où $\mathscr{A}$ est une tribu et P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
Propriétés :

- $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$.
- Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

- Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

- Sous additivité : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

c) Conditionnement et indépendance

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Notation $P_B(A) = P(A \mid B)$. L'application P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
Ce paragraphe étend rapidement les concepts et résultats vus dans le cadre des univers finis.

Formule des probabilités composées.
Système complet dénombrable d'événements.
Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \mid A_n)\, P(A_n)$$

On adopte la convention $P(B \mid A_n)\, P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.
La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

Formule de Bayes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A \mid B) = P(A)$.
Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance mutuelle.

B - Variables aléatoires discrètes

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- *étendre la notion de variable aléatoire finie à des variables dont l'image est un ensemble dénombrable*
- *fournir des outils permettant, sur des exemples simples, l'étude de processus stochastiques à temps discret*
- *exposer deux résultats asymptotiques : l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi faible des grands nombres*
- *introduire les fonctions génératrices et utiliser les propriétés des séries entières.*

La construction d'espaces probabilisés modélisant une suite d'expériences aléatoires est hors programme, on admet l'existence de tels espaces. Les différents types de convergence probabiliste (presque sûre, en probabilité, en loi, en moyenne) sont hors programme.

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application définie sur Ω dont l'image est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathscr{A}$.	Pour tout $U \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement. Notations $(X \in U)$, $\{X \in U\}$.
Loi d'une variable aléatoire discrète.	
Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Croissance, limites en $-\infty$ et en $+\infty$.	$F_X(x) = P(X \leqslant x)$. L'étude des propriétés de continuité des fonctions de répartition n'est pas au programme.
Si X prend ses valeurs dans $\{ x_n \quad n \geqslant 0 \}$, les x_n étant distincts, et si $(p_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(X = x_n) = p_n$.	Démonstration hors programme.
Couple de variables aléatoires discrètes. Loi conjointe et lois marginales	Extension aux variables discrètes des notions étudiées en première année sur les variables finies.
Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.	
Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont dites indépendantes si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$	
Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, on a $$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$	Démonstration hors programme.
Variables mutuellement indépendantes.	Extension sans démonstration aux variables discrètes des notions et des résultats vues en première année.
Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors pour toutes fonctions f et g, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Suite de variables aléatoires indépendantes (deux à deux ou mutuellement).	La démonstration de l'existence d'un espace probabilisé portant une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de lois discrètes donnés est hors programme. Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes.

b) Espérance et variance

La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n\,;\, n \geqslant 0\}$ est dite d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente ; si tel est le cas, on appelle espérance de X, noté $\mathrm{E}(X)$, le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.	On admet que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération. ⇆ PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.
Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.	
Théorème du transfert : si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\Sigma P(X = x_n)\, f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a : $$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\, f(x_n).$$	Démonstration hors programme.
Linéarité de l'espérance. Positivité, croissance de l'espérance.	Démonstration non exigible.
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie. Si X^2 est d'espérance finie, la variance de X est le réel $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X))^2\big) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$. Écart type $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$. Pour a et b réels et X variable aléatoire réelle, relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Démonstration hors programme.
Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.	Brève extension des résultats obtenus dans le cadre d'un univers fini.
Variance d'une somme finie de variables aléatoires ; cas de variables deux à deux indépendantes.	
Covariance, coefficient de corrélation. Encadrement $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.	Notations : $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

c) Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)\, t^n.$$	La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.
Le rayon de convergence est au moins égal à 1.	
La variable aléatoire X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$.	Démonstration non exigible.

Contenus	Capacités & Commentaires
La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.	Démonstration non exigible. Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\mathrm{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence.
Série génératrice d'une somme de deux v.a. indépendantes.	

d) Lois usuelles

Contenus	Capacités & Commentaires
Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Série génératrice, espérance et variance. Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k).$$	
Loi de Poisson de paramètre λ. Série génératrice, espérance et variance. Somme de deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson.	Notation $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. ⇆ PC : compteur Geiger.

e) Résultats asymptotiques

Contenus	Capacités & Commentaires
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$ et si $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k\,!}.$$	Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares. ⇆ I : simulation de cette approximation. La notion de convergence en loi est hors programme.
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathrm{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left\lvert \frac{1}{n}S_n - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$	Estimation : pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left\lvert \frac{1}{n}S_n - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$ ⇆ I : simulation d'une suite de tirages.

Calcul différentiel

Ce chapitre est consacré à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Il est axé sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie : résolution d'équations aux dérivées partielles, problèmes d'extremums, courbes, surfaces. On se limite en pratique au cas $p \leqslant 3$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$	
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur U. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	Notations $\mathrm{D}_i f(a)$, $\partial_i f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U admet en tout point a de U un développement limité d'ordre 1. Différentielle de f en a.	Démonstration non exigible. Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U est continue sur U. Elle est définie comme l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$: $(h_1,\dots,h_p) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a)$. Notation $\mathrm{d}f(a)\cdot h$.
b) Règle de la chaîne	
Dérivée de $t \mapsto f\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)$. Application au calcul des dérivées partielles de $(u,v) \mapsto f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$. Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.	Interprétation géométrique : dérivée le long d'un arc $\mathscr{C}^1$. Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.
c) Gradient	
Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Relation $\forall h \in \mathbb{R}^p$, $\mathrm{d}f(a)\cdot h = (\nabla f(a) \mid h)$.	Le gradient est défini par ses coordonnées. Notation $\nabla f(a)$. ⇆ PC : champ électrostatique, loi de Fourier.
d) Applications géométriques	
Courbe du plan définie par une équation $f(x,y)=0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$. Point régulier. Équation de la tangente en un point régulier.	On admet l'existence d'un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$.
En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x,y)=\lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.	⇆ PC : lignes équipotentielles et lignes de champ. ⇆ I : tracé de lignes de niveau.
Surface définie par une équation $f(x,y,z)=0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$. Point régulier. Courbes tracées sur une surface.	Cas particulier des courbes coordonnées d'une surface d'équation $z=g(x,y)$.
Plan tangent à une surface en un point régulier défini comme le plan orthogonal au gradient et passant par le point.	Tangentes aux courbes régulières de classe $\mathscr{C}^1$ tracées sur la surface.
e) Dérivées partielles d'ordre deux	
Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction de deux ou trois variables à valeurs dans $\mathbb{R}$. Fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Théorème de Schwarz.	Démonstration hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.	Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires. $\leftrightarrows$ PC : équation du transport, équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

f) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Extremum local, global. Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.	
Recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$.	$\leftrightarrows$ PC et SI : mécanique et électricité.

Équations différentielles linéaires

L'étude des équations différentielles linéaires scalaires d'ordres un et deux, commencée en première année, se poursuit par celle des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 *et des équations scalaires à coefficients non constants, en mettant l'accent sur les équations d'ordre deux. On s'attache à développer à la fois les aspects théorique et pratique :*
- *la forme des solutions ;*
- *le théorème de Cauchy linéaire ;*
- *le lien entre les équations scalaires et les systèmes différentiels d'ordre un ;*
- *la résolution explicite.*

Ce chapitre favorise les interactions avec les autres disciplines scientifiques.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Systèmes différentiels	
Équation de la forme $X' = A(t)X + B(t)$ où $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont continues. Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme. $\leftrightarrows$ I : Méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée d'un problème de Cauchy.
Isomorphisme entre $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et l'espace vectoriel des solutions de $X' = A(t)X$. Système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$.	Dimension de l'espace vectoriel des solutions.
Résolution lorsque A est une matrice diagonalisable.	Exemples de résolution dans le cas où A est trigonalisable. $\leftrightarrows$ PC : comportement asymptotique des solutions en fonction du spectre de A.
b) Équations différentielles linéaires scalaires	
Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$. Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène. Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Les étudiants doivent savoir écrire cette équation sous la forme d'un système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$. La recherche d'une solution particulière de l'équation complète doit comporter des indications.
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène, dimension.	Exemples d'utilisation de développements en série entière pour la recherche de solutions.

Contenus	Capacités & Commentaires
Cas des équations à coefficients constants.	On relie les résultats obtenus en première année à l'aide de l'équation caractéristique à la réduction de la matrice du système différentiel associé. Les étudiants doivent savoir trouver une solution particulière de l'équation complète pour un second membre de la forme $A\cos(\omega t)$ ou $A\sin(\omega t)$. La méthode de la variation des constantes est hors programme.

ANNEXE 2

Programme de physique - chimie de la voie PSI

Le programme de physique-chimie de la classe de PSI s'inscrit dans la continuité du programme de PCSI. La formation scientifique de la filière PSI s'appuie sur des champs disciplinaires variés : électromagnétisme, thermodynamique, conversion d'énergie électro-mécanique et électro-chimique, électronique et traitement du signal, phénomènes de transport, aéro et hydrodynamique, propagation d'ondes. Le programme est conçu pour amener tous les étudiants à poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, pour éveiller leur curiosité et leur permettre de se former tout au long de la vie.

L'objectif de l'enseignement de physique-chimie est d'abord de développer des compétences propres à la pratique de la démarche scientifique :

- observer et s'approprier une problématique ;
- analyser et modéliser ;
- valider ;
- réaliser et créer.

Cette formation doit aussi développer d'autres compétences dans un cadre scientifique :

- communiquer, à l'écrit et à l'oral ;
- être autonome et faire preuve d'initiative.

Ces compétences sont construites à partir d'un socle de connaissances et de capacités défini par ce programme. Comme celui de première année, ce programme identifie, pour chacun des items, les connaissances scientifiques, mais aussi les savoir-faire, les capacités que les étudiants doivent maîtriser à l'issue de la formation. L'acquisition de ces capacités constitue un objectif prioritaire pour le professeur.

Observer, mesurer, confronter un modèle au réel nécessitent la pratique d'une démarche expérimentale. La formation expérimentale de l'étudiant revêt donc une importance essentielle, au même titre que sa formation théorique. En outre elle donne un sens aux concepts et aux lois introduites. En classe de PSI, cette formation expérimentale est poursuivie ; elle s'appuie sur les capacités développées en première année, elle les affermit et les complète.

Comprendre, décrire, modéliser, prévoir, nécessitent aussi une solide formation théorique. Celle-là est largement complétée en classe de PSI. Le professeur s'appuiera sur des exemples concrets afin de lui donner du sens. La diversité des domaines scientifiques abordés ne doit pas masquer à l'étudiant la transversalité des concepts et des méthodes utilisés, que le professeur veillera à souligner. Théorique et expérimentale, la formation de l'étudiant est multiforme et doit être abordée par des voies variées. Ainsi le professeur doit-il rechercher un point d'équilibre entre des approches apparemment distinctes, mais souvent complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative.

L'autonomie de l'étudiant et sa capacité à prendre des initiatives sont développées à travers la pratique d'activités de type « résolution de problèmes », qui visent à apprendre à mobiliser des savoirs et des savoir-faire pour répondre à des questionnements précis. Ces résolutions de problèmes peuvent aussi être de nature expérimentale ; la formation expérimentale vise non seulement à apprendre à l'étudiant à réaliser des mesures ou des expériences selon un protocole fixé, mais aussi à l'amener à proposer lui-même un protocole et à le mettre en œuvre. Cette capacité à proposer un protocole doit être résolument développée au cours de la formation expérimentale.

Dans ce programme comme dans celui de première année, il est proposé au professeur d'aborder certaines notions à partir de l'étude d'un document. L'objectif de cette « approche documentaire » est d'apprendre à l'étudiant à compléter ses connaissances et ses savoir-faire par l'exploitation de ressources et de documents scientifiques variés, ce qu'il aura inévitablement à pratiquer dans la suite de sa formation et de sa vie professionnelle.

La mise en œuvre de la démarche scientifique en physique-chimie fait souvent appel aux mathématiques, tant pour la formulation du modèle que pour en extraire des prédictions. Le professeur veillera à n'avoir recours à la technicité mathématique que lorsqu'elle s'avère indispensable, et à mettre l'accent sur la compréhension des phénomènes physiques. Néanmoins l'étudiant doit savoir utiliser de façon autonome certains outils mathématiques (précisés dans l'appendice « outils mathématiques ») dans le cadre des activités relevant de la physique-chimie.

Enfin, lorsqu'il en aura l'opportunité, le professeur familiarisera l'étudiant à recourir à une approche numérique, qui permet une modélisation plus fine et plus réaliste du réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires. C'est l'occasion pour l'étudiant d'exploiter ses capacités concernant l'ingénierie numérique et la simulation qu'il a acquises en première année en informatique et sciences du numérique. Dans ce domaine des démarches collaboratives sont recommandées.

Le programme de physique chimie de la classe de PSI inclut celui de la classe de PCSI option PSI. Toutefois, afin de faciliter l'intégration d'étudiants originaires de PTSI ou de MPSI dans la classe de PSI, la chimie organique (§ III), l'étude des mécanismes réactionnels et la cinétique chimique en réacteur ouvert (§ I.2) figurant au programme du premier semestre de PCSI sont exclues du programme de PSI : aucune connaissance et savoir-faire sur ces composantes du programme de PCSI ne peuvent être exigés des étudiants de la classe de PSI.

L'organisation du programme de physique-chimie de PSI est la même que celle de PCSI :

- Dans la première partie sont décrites les compétences que la pratique de la **« démarche scientifique »** permet de développer pendant les deux années de formation à travers certaines de ses composantes : la démarche expérimentale, la résolution de problèmes et les approches documentaires. Ces compétences et les capacités associées continueront à être exercées et mises en œuvre dans des situations variées tout au long de la deuxième année en s'appuyant sur les autres parties du programme. Les compétences mentionnées dans cette partie tissent des liens transversaux entre les différentes rubriques du programme, contribuant ainsi à souligner l'idée d'une science constituée de domaines interdépendants.
- Dans la deuxième partie, intitulée **« formation expérimentale »,** sont décrites les méthodes et les capacités expérimentales que les élèves doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Elles complètent celles décrites dans la deuxième partie du programme de PCSI, qui restent exigibles, et devront être régulièrement exercées durant la classe de PSI. Leur mise en œuvre à travers les activités expérimentales doit s'appuyer sur des problématiques concrètes contenant celles identifiées en gras dans la partie « formation disciplinaire ».
- La troisième partie, intitulée « **formation disciplinaire** », décrit les connaissances et capacités associées aux contenus disciplinaires propres à la classe de PSI. Comme dans le programme de première année, elles sont présentées en deux colonnes : la première colonne décrit les « notions et contenus » ; en regard, la seconde colonne précise les « capacités exigibles » associées dont l'acquisition par les étudiants doit être la priorité du professeur. L'évaluation vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants. Lors de la conception des évaluations, on veillera soigneusement à identifier les capacités mobilisées afin d'en élargir le plus possible le spectre.
  Certains items de cette partie**, identifiés en caractères gras**, se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés, au choix, à travers des expériences de cours exploitées de manière approfondie et collective, ou lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant sont davantage privilégiées. D'autres items sont signalés comme devant être abordés au moyen d'une approche numérique ou d'une approche documentaire.
- Trois appendices listent le matériel, les outils mathématiques et les outils transversaux que les étudiants doivent savoir utiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique-chimie en fin de l'année de PSI. Ils complètent le matériel et les outils mathématiques rencontrés en première année et dont la maîtrise reste nécessaire.

Ce programme indique les objectifs de formation à atteindre en fin d'année pour tous les étudiants. Il ne représente en aucun cas une progression imposée pour chaque semestre. La formation de seconde année est divisée en deux semestres. Toutefois le professeur est ici libre de traiter le programme dans l'ordre qui lui semble le plus adapté à ses étudiants. Dans le cadre de sa liberté pédagogique, le professeur, pédagogue et didacticien, organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- Il doit privilégier la mise en activité des étudiants en évitant le dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences sera d'autant plus efficace que les étudiants seront acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment aider à la réflexion, la participation et l'autonomie des étudiants. La formation expérimentale, l'approche documentaire, la résolution de problèmes favorisent cette mise en activité.
- Il doit savoir recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés ou d'objets technologiques. Lorsque le thème traité s'y prête, le professeur peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, des questions d'actualité ou des débats d'idées.
- Il contribue à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en physique-chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines, mathématiques, informatique et sciences industrielles pour l'ingénieur.

Partie 1 - Démarche scientifique

1. Démarche expérimentale

La physique et la chimie sont des sciences à la fois théoriques et expérimentales. Ces deux parties de la démarche scientifique s'enrichissant mutuellement, leur intrication est un élément essentiel de notre enseignement.
C'est la raison pour laquelle ce programme fait une très large place à la méthodologie expérimentale, selon deux axes forts et complémentaires :

- Le premier a trait à la formation expérimentale à laquelle l'intégralité de la deuxième partie est consacrée. Compte tenu de l'important volume horaire dédié aux travaux pratiques, ceux-ci doivent permettre l'acquisition de compétences spécifiques décrites dans cette partie, de capacités dans le domaine de la mesure (réalisation, évaluation de la précision, analyse du résultat…) et des techniques associées. Cette composante importante de la formation d'ingénieur ou de chercheur a vocation à être évaluée de manière appropriée dans l'esprit décrit dans cette partie.
- Le second concerne l'identification, tout au long du programme dans la troisième partie (contenus disciplinaires), de problématiques se prêtant particulièrement à une approche expérimentale. Ces items, **identifiés en gras**, doivent être abordés, au choix, à travers des expériences de cours exploitées de manière approfondie et collective, ou lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant sont davantage privilégiées.

Les expériences de cours et les séances de travaux pratiques, complémentaires, ne répondent donc pas tout à fait aux mêmes objectifs :

- Les expériences de cours doivent susciter un questionnement actif et collectif autour d'une expérience bien choisie permettant de faire évoluer la réflexion théorique et la modélisation, d'aboutir à des lois simplificatrices et unificatrices, de dégager des concepts transversaux entre différents domaines de la physique.
- Les séances de travaux pratiques doivent permettre, dans une approche contextualisée, suscitée par une problématique clairement identifiée et, chaque fois que cela est possible, transversale, l'acquisition de savoir-faire techniques, de connaissances dans le domaine de la mesure et de l'évaluation de sa précision, d'autonomie dans la mise en œuvre de protocoles simples associés à la mesure des grandeurs physiques les plus souvent mesurées.

La liste de matériel jointe en appendice de ce programme précise le cadre technique dans lequel les étudiants doivent savoir évoluer en autonomie avec une information minimale. Son placement en appendice du programme, et non à l'intérieur de la partie dédiée à la formation expérimentale, est délibéré : il exclut l'organisation de séances de travaux pratiques dédiées à un appareil donné et centrées seulement sur l'acquisition des compétences techniques associées.

Compétences spécifiques mobilisées lors des activités expérimentales

Les activités expérimentales en classe préparatoire aux grandes écoles (CPGE) mobilisent les compétences spécifiques qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation expérimentale en CPGE, le niveau d'exigence est naturellement à mettre en perspective avec celui des autres parties du programme de la filière concernée. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les élèves et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

L'ordre de présentation de celles-ci ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces compétences lors d'une séance ou d'une séquence. Certaines ne sont d'ailleurs pas propres à la seule méthodologie expérimentale, et s'inscrivent plus largement dans la démarche scientifique, voire toute activité de nature éducative et formatrice (communiquer, autonomie, travail en équipe, etc.).

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec une situation expérimentale - énoncer une problématique d'approche expérimentale - définir les objectifs correspondants
Analyser	- formuler et échanger des hypothèses - proposer une stratégie pour répondre à la problématique - proposer un modèle - choisir, concevoir ou justifier un protocole ou un dispositif expérimental - évaluer l'ordre de grandeur d'un phénomène et de ses variations
Réaliser	- mettre en œuvre un protocole - utiliser (avec la notice) le matériel de manière adaptée, en autonomie pour celui de la liste « matériel », avec aide pour tout autre matériel - mettre en œuvre des règles de sécurité adéquates - effectuer des représentations graphiques à partir de données expérimentales
Valider	- exploiter des observations, des mesures en identifiant les sources d'erreurs et en estimant les incertitudes - confronter un modèle à des résultats expérimentaux - confirmer ou infirmer une hypothèse, une information - analyser les résultats de manière critique - proposer des améliorations de la démarche ou du modèle
Communiquer	- à l'écrit comme à l'oral : o présenter les étapes de son travail de manière synthétique, organisée, cohérente et compréhensible o utiliser un vocabulaire scientifique adapté o s'appuyer sur des schémas, des graphes - faire preuve d'écoute, confronter son point de vue
Être autonome, faire preuve d'initiative	- travailler seul ou en équipe - solliciter une aide de manière pertinente - s'impliquer, prendre des décisions, anticiper

Concernant la compétence « **Communiquer** », l'aptitude à rédiger un compte-rendu écrit constitue un objectif de la formation. Dans ce cadre, on doit développer les capacités à définir la problématique du

questionnement, à décrire les méthodes, en particulier expérimentales, utilisées pour y répondre, à présenter les résultats obtenus et l'exploitation, graphique ou numérique, qui en a été faite, et à analyser les réponses apportées au questionnement initial et leur qualité. Les activités expérimentales sont aussi l'occasion de travailler l'expression orale lors d'un point de situation ou d'une synthèse finale par exemple. Le but est de préparer les élèves de CPGE à la présentation des travaux et projets qu'ils auront à conduire et à exposer au cours de leur formation en école d'ingénieur et, plus généralement, dans le cadre de leur métier de chercheur ou d'ingénieur. L'utilisation d'un cahier de laboratoire, au sens large du terme en incluant par exemple le numérique, peut constituer un outil efficace d'apprentissage.
La compétence « **Être autonome, faire preuve d'initiative »** est par nature transversale et participe à la définition du niveau de maîtrise des autres compétences. Le recours à des activités s'appuyant sur les questions ouvertes est particulièrement adapté pour former les élèves à l'autonomie et l'initiative.

2. Résolution de problèmes

Dans l'acquisition de l'autonomie, la « résolution de problèmes » est une activité intermédiaire entre l'exercice cadré qui permet de s'exercer à de nouvelles méthodes, et la démarche par projet, pour laquelle le but à atteindre n'est pas explicite. Il s'agit pour l'étudiant de mobiliser ses connaissances, capacités et compétences afin d'aborder une situation dans laquelle il doit atteindre un but bien précis, mais pour laquelle le chemin à suivre n'est pas indiqué. Ce n'est donc pas un « problème ouvert » pour lequel on soumet une situation en demandant « Que se passe-t-il ? ». L'objectif à atteindre doit être clairement donné et le travail porte sur la démarche à suivre, l'obtention du résultat et son regard critique.
La résolution de problèmes permet de se confronter à des situations où plusieurs approches sont possibles, qu'il s'agisse de la méthode mise en œuvre ou du degré de précision recherché. Ces situations se prêtent bien à une résolution progressive pour laquelle un premier modèle permettra d'obtenir rapidement un résultat, qui sera ensuite discuté et amélioré. Cette résolution étagée doit permettre à tous les élèves d'aborder le problème selon leur rythme en s'appuyant sur les compétences qu'ils maîtrisent.

C'est sur la façon d'appréhender une question scientifique, sur le choix raisonné de la méthode de résolution et sur les moyens de vérification qu'est centrée la formation de l'élève lors de la démarche de résolution de problèmes. La résolution de problèmes mobilise les compétences qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier le problème.	Faire un schéma modèle. Identifier les grandeurs physiques pertinentes, leur attribuer un symbole. Évaluer quantitativement les grandeurs physiques inconnues et non précisées. Relier le problème à une situation modèle connue. ….
Établir une stratégie de résolution (analyser).	Décomposer le problème en des problèmes plus simples. Commencer par une version simplifiée. Expliciter la modélisation choisie (définition du système, …). Déterminer et énoncer les lois physiques qui seront utilisées. …..
Mettre en œuvre la stratégie (réaliser).	Mener la démarche jusqu'au bout afin de répondre explicitement à la question posée. Savoir mener efficacement les calculs analytiques et la traduction numérique. Utiliser l'analyse dimensionnelle. …

Avoir un regard critique sur les résultats obtenus (valider).	S'assurer que l'on a répondu à la question posée. Vérifier la pertinence du résultat trouvé, notamment en comparant avec des estimations ou ordres de grandeurs connus. Comparer le résultat obtenu avec le résultat d'une autre approche (mesure expérimentale donnée ou déduite d'un document joint, simulation numérique, …). Étudier des cas limites plus simples dont la solution est plus facilement vérifiable ou bien déjà connue. …
Communiquer.	Présenter la solution ou la rédiger, en en expliquant le raisonnement et les résultats. …

3. Approches documentaires

En seconde année, comme en première année, le programme de physique-chimie prévoit un certain nombre **d'approches documentaires**, identifiées comme telles dans la colonne « capacités exigibles » de la partie « formation disciplinaire ».
L'objectif de ces activités reste le même puisqu'il s'agit :

- dans la perspective d'une formation tout au long de la vie, d'habituer les étudiants à se cultiver en utilisant des documents variés (texte, schéma, graphe, vidéo, photo,...), démarche dans laquelle ils sont acteurs de leur formation ;
- d'acquérir des éléments de culture (construction du savoir scientifique, histoire des sciences, étapes d'une démarche scientifique, raisonnements, ordres de grandeurs, avancée de la recherche sur des sujets contemporains, ouverture sur les problèmes sociétaux…) dans les domaines de la physique et de la chimie des XX$^{\text{ème}}$ et XXI$^{\text{ème}}$ siècles et de leurs applications ;
- de mobiliser et de développer des compétences liées à la recherche, à l'extraction, à l'organisation, à l'analyse et à la synthèse de l'information recueillie ou fournie, compétences essentielles pour les futurs ingénieurs et chercheurs scientifiques. Ces compétences et des exemples de capacités associées sont présentés dans le tableau ci-dessous. Elles peuvent servir de support pour la formation et l'évaluation des étudiants.

À l'issue de l'activité documentaire, une synthèse finale est indispensable pour bien identifier les nouvelles connaissances, les nouveaux modèles et les éléments de culture générale que les étudiants doivent s'approprier.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Dégager la problématique principale - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau,…)
Analyser	- Identifier les idées essentielles et leurs articulations - Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments du ou des documents - Identifier une tendance, une corrélation, une grandeur d'influence - Conduire un raisonnement scientifique qualitatif ou quantitatif. - S'appuyer sur ses connaissances et savoir-faire et sur les documents proposés pour enrichir l'analyse
Réaliser	- Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau - Trier et organiser des données, des informations - Tracer un graphe à partir de données - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure,… - Décrire un phénomène à travers la lecture d'un graphe, d'un tableau,… - Conduire une analyse dimensionnelle - Utiliser un modèle décrit
Valider	- Faire preuve d'esprit critique - Confronter le contenu du document avec ses connaissances et savoir-faire

	- Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude,…) - Estimer des ordres de grandeur et procéder à des tests de vraisemblance
Communiquer à l'écrit comme à l'oral	- Rédiger/présenter une synthèse, une analyse, une argumentation,… (clarté, justesse, pertinence, exhaustivité, logique) - Résumer un paragraphe sous la forme d'un texte, d'un schéma, d'une carte mentale - Illustrer son propos par des schémas, des graphes, des développements mathématiques

Partie 2 - Formation expérimentale

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales nouvelles que les élèves doivent acquérir au cours de l'année de PSI durant les séances de travaux pratiques. Elle vient prolonger la partie correspondante du programme de PCSI dont les capacités doivent être complètement acquises à l'issue des deux années de préparation, et restent donc au programme de seconde année de PSI.

Les capacités rassemblées ici ne constituent en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'articuleraient autour d'une découverte du matériel, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion d'un problème concret.

Les activités expérimentales sur le thème de la chimie sont aussi l'occasion de consolider les savoir-faire de la classe de PCSI en particulier dans le domaine des solutions aqueuses.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
Mesures de temps et de fréquences	
Détection synchrone.	Mesurer une fréquence par une détection synchrone élémentaire à l'aide d'un multiplieur et d'un passe-bas simple adapté à la mesure.
Analyse spectrale.	Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre provoqué par l'échantillonnage avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition. Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.
Électricité et électronique	
Filtrage analogique d'un signal périodique.	Mettre en évidence l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique dans les domaines fréquentiel et temporel.
Montages utilisant un ALI.	Identifier les limitations suivantes : saturation en tension, saturation en courant, vitesse de balayage, bande passante. Mettre en œuvre divers montages utilisant un ALI.
Oscillateur.	Mettre en œuvre un ALI ou une porte logique pour réaliser un oscillateur.

Modulation et démodulation. Électronique numérique.	Élaborer un signal modulé en amplitude à l'aide d'un circuit multiplieur. Réaliser une démodulation synchrone. Utiliser un convertisseur analogique-numérique et un convertisseur numérique-analogique.
Conversion de puissance Puissance électrique. Conversion électromagnétique statique de puissance. Conversion électromécanique de puissance. Conversion électronique statique de puissance.	 Mesurer une puissance moyenne à l'aide d'un wattmètre numérique. Mettre en œuvre un transformateur. Mettre en œuvre une machine à courant continu. Mettre en œuvre un redresseur.
Ondes Mesure d'une célérité.	 Mesurer la célérité d'une onde par diverses méthodes : étude d'ondes progressives en propagation libre, étude d'ondes stationnaires.
Chimie Effectuer des bilans d'énergie. Mesures électriques. Électrochimie.	 Mettre en œuvre une technique de calorimétrie. Mettre en œuvre des mesures électriques dans un environnement électrochimique. Mettre en œuvre des piles.

Prévention des risques au laboratoire

Les élèves doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation et au rejet des produits chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité chimique, électrique et optique leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigible
1. Prévention des risques **- chimique** Règles de sécurité au laboratoire. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Phrases H et P. **- électrique** **- optique**	 Adopter une attitude adaptée au travail en laboratoire. Relever les indications sur le risque associé au prélèvement et au mélange des produits chimiques. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques. Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques. Utiliser les sources laser de manière adaptée.
2. Impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.	 Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les

	risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

Partie 3 - Formation disciplinaire

ÉLECTRONIQUE

Présentation

Cette partie renforce et complète l'étude des circuits électriques linéaires menée dans la partie « signaux physiques » du programme de première année. Ainsi, les notions de filtrage et d'analyse spectrale sont réinvesties, en particulier dans les activités expérimentales. Le programme de deuxième année ajoute la rétroaction et le bouclage des systèmes linéaires dans le but d'aborder les notions suivantes :
– la stabilité ;
– les oscillateurs ;
– la réalisation de filtres actifs à forte impédance d'entrée pour une association en cascade.

Ces différentes thématiques sont illustrées à l'aide de l'amplificateur linéaire intégré ALI (également appelé amplificateur opérationnel) dont l'étude n'est pas une fin en soi mais un outil permettant des réalisations expérimentales variées.

Par ailleurs, des exemples de manifestations des non linéarités sont abordés à l'occasion de la saturation d'un amplificateur ou de la réalisation d'une fonction mémoire (comparateur à hystérésis).

Afin de compléter l'approche analogique des circuits électriques, un module à vocation expérimentale est consacré au traitement numérique des signaux à travers les sujets suivants :
– l'échantillonnage et le repliement de spectre ;
– le filtrage numérique ;
– les conversions analogique/numérique et numérique/analogique.

Enfin, la problématique de la transmission d'un signal temporel codant une information est abordée dans l'étude et la réalisation d'une modulation, en relation avec la partie du programme consacrée à la propagation des ondes électromagnétiques.

Objectifs de formation

– Passer d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle et réciproquement.
– Analyser la stabilité d'un système linéaire.
– Étudier des manifestations des non linéarités.
– Effectuer quelques opérations de traitement du signal en électronique analogique et numérique.

Le bloc 1 s'intéresse aux propriétés des systèmes linéaires déjà abordés en première année. Les capacités relatives au filtrage et à la décomposition harmonique d'un signal périodique sont révisées sans ajout de nouvelles compétences. Dans le but de faciliter le lien avec le cours de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur, la notation symbolique de la fonction de transfert H(p) est utilisée sans faire référence à la transformée de Laplace. L'étude est complétée par une analyse de la stabilité des systèmes du premier et du second ordre en examinant le régime transitoire associé à la relation différentielle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Stabilité des systèmes linéaires	
Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant.	Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (relation différentielle).
Stabilité.	Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 d'après les signes des coefficients de la relation différentielle ou de la fonction de transfert.

Le bloc 2 illustre quelques propriétés relatives à la rétroaction sur l'exemple de l'amplificateur linéaire intégré. L'identification de certains montages à des systèmes bouclés permet de faire le lien avec le cours d'automatique de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur. L'étude des circuits est strictement limitée à des situations pouvant être facilement abordées avec les outils introduits en première année (loi des mailles, loi des nœuds, diviseur de tension). La vitesse limite de balayage de l'ALI est uniquement évoquée en TP afin d'identifier les distorsions harmoniques traduisant un comportement non linéaire. Les limitations associées aux courants de polarisation et la tension de décalage ne sont pas étudiées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Rétroaction	
Modèle de l'ALI défini par une résistance d'entrée infinie, une résistance de sortie nulle, une fonction de transfert du premier ordre en régime linéaire, une saturation de la tension de sortie, une saturation de l'intensité de sortie.	Citer les hypothèses du modèle et les ordres de grandeur du gain différentiel statique et du temps de réponse.
Montages amplificateur non inverseur et comparateur à hystérésis.	Représenter les relations entre les tensions d'entrée et de sortie par un schéma fonctionnel associant un soustracteur, un passe-bas du premier ordre et un opérateur proportionnel. Analyser la stabilité du régime linéaire.
Compromis gain/bande passante d'un système bouclé du premier ordre.	Établir la conservation du produit gain-bande passante du montage non inverseur.
Limite en fréquence du fonctionnement linéaire.	**Identifier la manifestation de la vitesse limite de balayage d'un ALI dans un montage.**
Cas limite d'un ALI idéal de gain infini en régime linéaire.	Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse comme un indice de probable stabilité du régime linéaire. Établir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur. Exprimer les impédances d'entrée de ces montages. Expliquer l'intérêt d'une forte impédance d'entrée et d'une faible impédance de sortie pour une association en cascade.
Cas limite d'un ALI idéal de gain infini en régime saturé.	Identifier l'absence de rétroaction ou la présence d'une unique rétroaction sur la borne non inverseuse comme l'indice d'un probable comportement en saturation. Établir la relation entrée-sortie d'un comparateur simple. Pour une entrée sinusoïdale, faire le lien entre la non linéarité du système et la génération d'harmoniques en sortie.

	Établir le cycle d'un comparateur à hystérésis. Décrire le phénomène d'hystérésis en relation avec la notion de fonction mémoire.

Le bloc 3 s'intéresse à une étude non exhaustive des oscillateurs en électronique. Les exemples sont choisis à l'initiative du professeur et les fonctions de transfert des filtres utilisés sont fournies. En TP, on complète l'étude par une analyse spectrale des signaux.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Oscillateurs	
Oscillateur quasi-sinusoïdal réalisé en bouclant un filtre passe-bande du deuxième ordre avec un amplificateur.	Exprimer les conditions théoriques (gain et fréquence) d'auto-oscillation sinusoïdale d'un système linéaire bouclé. Analyser sur l'équation différentielle l'inégalité que doit vérifier le gain de l'amplificateur afin d'assurer le démarrage des oscillations. Interpréter le rôle des non linéarités dans la stabilisation de l'amplitude des oscillations. **Réaliser un oscillateur quasi-sinusoïdal et mettre en évidence la distorsion harmonique des signaux par une analyse spectrale.**
	Approche documentaire : en relation avec le cours sur les ondes, décrire le fonctionnement d'un oscillateur optique (laser) en termes de système bouclé auto-oscillant. Relier les fréquences des modes possibles à la taille de la cavité.
Oscillateur de relaxation associant un intégrateur et un comparateur à hystérésis. Générateur de signaux non sinusoïdaux.	Décrire les différentes séquences de fonctionnement. Exprimer les conditions de basculement. Déterminer la période d'oscillation. **Réaliser un oscillateur de relaxation et effectuer l'analyse spectrale des signaux générés.**

Le bloc 4 est exclusivement étudié de manière expérimentale et aborde la question du traitement numérique du signal dans le prolongement du programme de première année. Le professeur introduira les thèmes proposés au fur et à mesure des besoins et en relation avec les autres sujets d'étude.

Le phénomène de repliement de spectre est expliqué qualitativement à l'aide d'une analogie stroboscopique, l'objectif étant de mettre en place la condition de Nyquist-Shannon et de réaliser convenablement une acquisition numérique en vue d'une analyse spectrale.

Afin de mettre en évidence d'autres effets associés à l'échantillonnage, on réalise de manière comparative un filtre analogique passe-bas et un filtre numérique remplissant la même fonction, ce dernier étant réalisé à l'aide d'une feuille de calcul traitant l'acquisition numérique d'une entrée analogique, un CNA restituant ensuite une sortie analogique. La transformée en Z est hors programme, on étudie expérimentalement l'influence de la fréquence d'échantillonnage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Électronique numérique	
Échantillonnage. Condition de Nyquist-Shannon. Analyse spectrale numérique.	**Décrire le mouvement apparent d'un segment tournant observé avec un stroboscope. Expliquer l'influence de la fréquence d'échantillonnage.** **Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre au moyen d'un oscilloscope numérique ou d'un logiciel de calcul numérique.** **Choisir les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une acquisition numérique afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.**
Filtrage numérique.	**Réaliser un filtrage numérique passe-bas d'une acquisition, et mettre en évidence la limitation introduite par l'échantillonnage.**
Porte logique.	**Mettre en œuvre une porte logique pour réaliser un oscillateur.**

Le bloc 5 est l'occasion de faire le lien entre la propagation des ondes électromagnétiques et le traitement du signal afin d'expliquer la problématique de la transmission d'une information. Cette étude sera illustrée en TP à l'aide d'un multiplieur analogique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5. Modulation-Démodulation	
Transmission d'un signal codant une information variant dans le temps.	Définir un signal modulé en amplitude, en fréquence, en phase. Citer les ordres de grandeur des fréquences utilisées pour les signaux radio AM, FM, la téléphonie mobile. **Analyse documentaire :** expliquer l'intérêt et la nécessité de la modulation pour les transmissions hertziennes.
Modulation d'amplitude. Démodulation d'amplitude.	Interpréter le signal modulé comme le produit d'une porteuse par une modulante. Décrire le spectre d'un signal modulé. À partir de l'analyse fréquentielle, justifier la nécessité d'utiliser une opération non linéaire. Expliquer le principe de la détection synchrone. **Réaliser une modulation d'amplitude et une démodulation synchrone avec un multiplieur analogique.**

PHÉNOMENES DE TRANSPORT

Présentation

Cette partie présente le formalisme nécessaire à l'étude générale des phénomènes de transport abordés au programme de PSI (conduction électrique, conduction thermique, diffusion de particules, fluides en écoulement). Ce formalisme, transversal à tous les domaines de la physique, repose essentiellement sur la notion de bilan, global ou local. Il permet d'exprimer des lois de conservation (charge, énergie, masse), d'établir des équations d'évolution en relation avec des propriétés phénoménologiques.

Le professeur pourra aborder les différentes notions dans l'ordre qu'il souhaite, en relation avec les autres parties du programme. Il est cependant essentiel de faire apparaître les analogies et les différences entre les domaines d'étude.

Objectifs de formation

– Utiliser les trois échelles macroscopique, microscopique, mésoscopique.
– Réaliser des bilans sous forme globale et locale.
– Mettre en évidence l'analogie entre les différentes équations locales traduisant le bilan d'une grandeur scalaire extensive.
– Distinguer une loi phénoménologique et une loi universelle.
– Manipuler des équations aux dérivées partielles (analyse en ordre de grandeur, conditions initiales, conditions aux limites).

En relation avec le cours d'électromagnétisme, le bloc 1 étudie le transport de charges et les milieux conducteurs en présentant un modèle microscopique. Pour sensibiliser les étudiants à l'aspect complexe de la matière, le professeur est invité à conduire une critique du modèle historique de Drude en comparant le libre parcours moyen d'un électron libre avec la distance interatomique du réseau. La conductivité électrique sera réutilisée lors de l'étude des ondes électromagnétiques dans les conducteurs (effet de peau et réflexion sur un métal).

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Transport de charge	
1.1. Conservation de la charge	
Densité volumique de charge électrique ρ, vecteur densité de courant électrique $\boldsymbol{j}$.	Passer d'une description microscopique (porteurs de charges, vitesse des porteurs) aux grandeurs mésoscopiques ρ et $\boldsymbol{j}$. Décrire les différents types de porteurs de charge. Faire la distinction entre charges mobiles et charges fixes.
Intensité du courant électrique.	Écrire l'intensité comme le flux du vecteur densité de courant électrique à travers une surface orientée.
Bilan de charge.	Établir l'équation locale traduisant la conservation de la charge électrique en coordonnées cartésiennes à une dimension. Citer l'équation locale dans le cas tridimensionnel et en interpréter chacun des termes.
Régime stationnaire.	Définir une ligne de courant et un tube de courant. En régime stationnaire, exploiter le caractère conservatif du vecteur densité de courant

	électrique. Relier cette propriété à la loi des nœuds usuelle de l'électrocinétique.
1.2. Conducteur ohmique	
Loi d'Ohm locale.	Relier le vecteur densité de courant au champ électrique dans un conducteur ohmique. Citer l'ordre de grandeur de la conductivité du cuivre.
Modèle de Drude.	En régime stationnaire, établir une expression de la conductivité électrique à l'aide d'un modèle microscopique.
Résistance d'un conducteur cylindrique.	Établir l'expression de la résistance d'un câble cylindrique parcouru uniformément par un courant parallèle à son axe.
Puissance électrique. Effet Joule.	Établir l'expression de la puissance volumique reçue par un conducteur ohmique. Interpréter l'effet Joule.
	Activité documentaire : décrire la conductivité des semi-conducteurs, les types de porteurs, l'influence du dopage.

Le bloc 2 est consacré à la conduction thermique en relation avec le cours de thermodynamique de première année. Après avoir écrit les premier et second principes sous forme infinitésimale, on s'attache à l'étude de la diffusion thermique avec une visée applicative, concrète.

L'établissement de l'équation de diffusion thermique est limité au cas des systèmes de volume constant et les mises en équation locale sont faites exclusivement en géométries unidimensionnelles. On admet ensuite les formes générales des équations en utilisant les opérateurs d'analyse vectorielle, ce qui permet de traiter des problèmes tridimensionnels en fournissant les expressions de la divergence et du laplacien. Même si cette rubrique contribue à asseoir la maîtrise des opérateurs d'analyse vectorielle (gradient, divergence, laplacien), le formalisme doit rester au deuxième plan.

L'étude de l'équation de diffusion thermique sans terme source, en régime stationnaire est menée par analogie avec l'électrocinétique. La notion de résistance thermique, dont la connaissance des conditions d'application est aussi importante que son utilisation, ne doit pas rester théorique. Son intérêt doit être illustré par des exemples pratiques à forte ou à faible résistance thermique.

Aucune connaissance sur les termes sources n'est exigible sauf pour l'effet Joule. On néglige le rayonnement thermique. Dans le cadre de l'interface liquide-solide, la loi phénoménologique de Newton peut être utilisée, mais ni sa mémorisation ni aucune connaissance sur son établissement ne peuvent être exigées.

Aucune méthode générale de résolution ne peut être demandée aux étudiants, mais les solutions de l'équation de diffusion en géométrie unidimensionnelle cartésienne, sans terme source, en régime stationnaire ou en régime d'ondes harmoniques doivent être connues.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Transfert thermique par conduction	
2.1. Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique	
Premier principe : $dU + dE_c = \delta W + \delta Q$ Deuxième principe : $dS = \delta S_e + \delta S_c$ avec $\delta S_e = \dfrac{\delta Q}{T_0}$ pour une évolution monotherme.	Énoncer et exploiter les principes de la thermodynamique pour une transformation élémentaire. Utiliser avec rigueur les notations d et δ en leur attachant une signification.

2.2. Équation de la diffusion thermique	
Les différents modes de transfert thermique : diffusion, convection et rayonnement.	Citer les trois modes de transfert thermique. Expliquer que la diffusion est un déplacement d'énergie de proche en proche dans la matière macroscopiquement immobile.
Vecteur densité de courant thermique $\boldsymbol{j}_Q$.	Exprimer le flux thermique comme le flux du vecteur $\boldsymbol{j}_Q$ à travers une surface orientée.
Équilibre thermodynamique local.	Utiliser les champs scalaires intensifs (volumiques ou massiques) associés à des grandeurs extensives de la thermodynamique.
Loi phénoménologique de Fourier.	Énoncer et utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.
Bilan d'énergie.	Pour un milieu évoluant à volume constant, établir l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie.
Équation de la diffusion thermique.	Établir l'équation de diffusion vérifiée par la température, avec ou sans terme source. Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle du phénomène. Exploiter la linéarité de l'équation de diffusion. Manipuler le terme source local et intégral de l'effet Joule.
Conditions aux limites.	Exploiter la continuité du flux thermique. Exploiter la continuité de la température pour un contact thermique parfait. Utiliser la relation de Newton (fournie) à l'interface solide-fluide. Traduire le contact avec une paroi calorifugée.
2.3. Régime stationnaire, ARQS	
Résistance ou conductance thermique.	Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Énoncer les conditions d'application de l'analogie. Établir l'expression de la résistance thermique d'un cylindre calorifugé latéralement. Exploiter des associations de résistances

	thermiques en série ou en parallèle.
ARQS, analogie électrocinétique avec un circuit RC.	Mettre en évidence un temps caractéristique d'évolution de la température. Justifier l'ARQS. Établir l'analogie avec un circuit électrique RC.
2.4. Ondes thermiques	
Relation de dispersion.	Établir la relation de dispersion des ondes thermiques en géométrie unidirectionnelle.
Effet de peau thermique.	Mettre en évidence le déphasage lié à la propagation. Établir une distance caractéristique d'atténuation.

Le bloc 3 est consacré à la diffusion de particules. Cette partie sera traitée par analogie avec les autres phénomènes de transport évoqués (transport de charge, conduction thermique). On pourra également utiliser la loi de Fick pour interpréter les paliers de diffusion en électrochimie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Diffusion de particules	
Les différents modes de transfert de masse : diffusion et convection.	Citer les deux modes de transfert.
Vecteur densité de courant de particules $\boldsymbol{j}_N$.	Exprimer le débit de particules comme le flux du vecteur $\boldsymbol{j}_N$ à travers une surface orientée.
Loi phénoménologique de Fick.	Énoncer et utiliser la loi de Fick.
Bilan de particules. Équation de diffusion.	Établir l'équation locale de bilan de particules avec ou sans terme source. Établir l'équation de diffusion. Relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle du phénomène.

Le bloc 4 étudie le transport de masse dans les fluides en écoulement. Son objectif est d'introduire les grandeurs pertinentes caractérisant un écoulement, en cohérence avec les autres phénomènes de transport. Il ne s'agit pas ici d'établir les équations d'Euler ou de Navier-Stokes, en particulier, l'expression de l'accélération comme la dérivée particulaire de la vitesse est hors programme.

La notion de viscosité est introduite sur un exemple d'écoulement de cisaillement simple. Le nombre de Reynolds est présenté comme le rapport de deux temps caractéristiques construits par analyse dimensionnelle. Il est exploité afin d'évoquer les propriétés de similitude entre des systèmes réalisés à des échelles différentes et caractérisés par les mêmes nombres sans dimension.

Les notions de statique des fluides sont principalement destinées aux étudiants ayant suivi une formation différente de PCSI.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Fluides en écoulement	
4.1. Débits et lois de conservation	
Particule de fluide.	Définir la particule de fluide comme un système mésoscopique de masse constante.

Champ eulérien des vitesses : vitesse de la particule de fluide.	Distinguer vitesse microscopique et vitesse mésoscopique.
Masse volumique μ, vecteur densité de courant de masse $\mu\boldsymbol{v}$.	Citer des ordres de grandeur des masses volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles.
Débit massique.	Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur $\mu\boldsymbol{v}$ à travers une surface orientée.
Conservation de la masse.	Écrire les équations bilans, globale ou locale, traduisant la conservation de la masse.
Écoulement stationnaire.	Définir un écoulement stationnaire et les notions de ligne de courant et de tube de courant de masse. Exploiter la conservation du débit massique. A partir d'une carte de champ des vitesses en régime stationnaire, décrire qualitativement le champ des accélérations.
Écoulement incompressible et homogène. Débit volumique.	Définir un écoulement incompressible et homogène par un champ de masse volumique constant et uniforme. Relier cette propriété à la conservation du volume pour un système fermé. Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux de $\boldsymbol{v}$ à travers une surface orientée. Justifier la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant indéformable.
4.2 Actions de contact sur un fluide	
Pression.	Identifier la force de pression comme étant une action normale à la surface. Utiliser l'équivalent volumique des actions de pression $-\boldsymbol{grad}\, P$.
Éléments de statique des fluides.	Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans les cas d'un fluide incompressible et de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.
Viscosité dynamique.	Relier l'expression de la force surfacique de viscosité au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle. Exprimer la dimension du coefficient de viscosité dynamique. Citer l'ordre de grandeur de la viscosité de l'eau. Citer la condition d'adhérence à l'interface fluide-solide.
4.3 Ecoulement interne incompressible et homogène dans une conduite cylindrique	
Écoulements laminaire, turbulent. Vitesse débitante.	Décrire les différents régimes d'écoulement (laminaire et turbulent). Relier le débit volumique à la vitesse débitante.
Nombre de Reynolds.	Décrire qualitativement les deux modes de transfert de quantité de mouvement : convection et diffusion. Interpréter le nombre de Reynolds comme le

	rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection. Evaluer le nombre de Reynolds et l'utiliser pour caractériser le régime d'écoulement.
Chute de pression dans une conduite horizontale. Résistance hydraulique.	Dans le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds, établir la loi de Hagen-Poiseuille et en déduire la résistance hydraulique. Exploiter le graphe de la chute de pression en fonction du nombre de Reynolds, pour un régime d'écoulement quelconque. Exploiter un paramétrage adimensionné permettant de transposer des résultats expérimentaux ou numériques sur des systèmes similaires réalisés à des échelles différentes.
4.4 Ecoulement externe incompressible et homogène autour d'un obstacle	
Force de traînée subie par une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme. Coefficient de traînée C_x ; graphe de C_x en fonction du nombre de Reynolds. Notion de couche limite. Forces de traînée et de portance d'une aile d'avion à haut Reynolds.	Associer une gamme de nombre de Reynolds à un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique. Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds décrire qualitativement la notion de couche limite. Définir et orienter les forces de portance et de traînée. Exploiter les graphes de C_x et C_z en fonction de l'angle d'incidence.

BILANS MACROSCOPIQUES

Présentation

Cette partie prolonge l'étude des machines thermiques réalisée en première année. Elle a pour objectif d'effectuer des bilans de grandeurs extensives thermodynamiques et mécaniques. Ces bilans sont illustrés sur des situations d'intérêt industriel (réacteur, éolienne, turbine, machines thermiques…). On proscrira les dispositifs désuets tels que le tourniquet hydraulique.

On définit également le modèle de l'écoulement parfait qui permet d'introduire la relation de Bernoulli et la notion de charge.

Si un bilan mécanique nécessite un changement de référentiel, on pourra utiliser la loi de composition des vitesses abordée dans le cours de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur.

Objectifs de formation

– Définir avec rigueur un système approprié.
– Utiliser des modèles et analyser leurs limites.
– Appliquer les lois générales de la mécanique et de la thermodynamique.
– Étudier des systèmes d'intérêt industriel.

1. Définition d'un système fermé pour les bilans macroscopiques	
Système ouvert, système fermé.	À partir d'une surface de contrôle ouverte vis-à-vis des échanges, définir un système fermé approprié pour réaliser un bilan de grandeur extensive.
2. Bilans d'énergie	
Bilans thermodynamiques.	Exprimer les principes de la thermodynamique pour un écoulement stationnaire en vue de l'étude d'une machine thermique sous la forme : $\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz) = w_u + q$; $\Delta s = s_e + s_c$
Modèle de l'écoulement parfait : adiabatique, réversible, non visqueux. Relation de Bernoulli. Effet Venturi.	Utiliser le modèle de l'écoulement parfait pour un écoulement à haut Reynolds en dehors de la couche limite. Énoncer et appliquer la relation de Bernoulli à un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène. Décrire l'effet Venturi. Décrire les applications : tube de Pitot, débitmètre.
Pertes de charge régulière et singulière dans une conduite.	Relier qualitativement la perte de charge à une dissipation d'énergie mécanique.
Bilan macroscopique d'énergie mécanique.	Effectuer un bilan d'énergie sur une installation industrielle : pompe ou turbine. Utiliser le fait admis que la puissance des actions intérieures est nulle pour un écoulement parfait et incompressible.
3. Bilans de quantité de mouvement et de moment cinétique	
Loi de la quantité de mouvement pour un système fermé.	Faire l'inventaire des forces extérieures. Effectuer un bilan de quantité de mouvement.
Loi du moment cinétique pour un système fermé.	Effectuer un bilan de moment cinétique pour une turbine.

ÉLECTROMAGNETISME

Présentation

En première année, les champs électrique et magnétique ont été présentés *via* les effets de la force de Lorentz et une étude descriptive du champ magnétique a été effectuée pour introduire les phénomènes d'induction. Le cours de deuxième année aborde les équations locales. Les équations de Maxwell sont présentées comme des postulats de l'électromagnétisme, le but étant de rendre les étudiants rapidement opérationnels dans leur utilisation. L'étude de la conversion de puissance et celle des ondes électromagnétiques seront une exploitation.

Le programme est découpé en plusieurs rubriques indépendantes dont l'ordre de présentation relève de la liberté pédagogique du professeur. En particulier, les équations de Maxwell peuvent être formulées dès le début sous leur forme la plus générale, ou bien elles peuvent être introduites de manière progressive en commençant par une forme simplifiée en régime stationnaire.

Objectifs de formation

– Manipuler des champs scalaires et vectoriels.

– Conduire des analyses de symétrie et d'invariance.
– Calculer des champs à l'aide de propriétés de flux ou de circulation.
– Établir le lien entre des lois locales et des propriétés intégrales.
– Décrire quelques comportements phénoménologiques de la matière dans un champ électrique ou magnétique.

*

Le bloc 1 présente les relations de symétrie entre les champs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ et les sources, sans recourir à des expressions reliant les champs aux sources, mais en s'appuyant sur des exemples de cartes de champs.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Symétries des champs électrique et magnétique	
Symétries pour le champ $\boldsymbol{E}$, caractère polaire de $\boldsymbol{E}$. Symétries pour le champ $\boldsymbol{B}$, caractère axial de $\boldsymbol{B}$.	Exploiter les symétries et invariances d'une distribution de charges et de courants pour en déduire les propriétés de $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$.

Le bloc 2 introduit les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday, prises comme des postulats de l'électromagnétisme. Les seuls calculs de champs électriques exigibles doivent pouvoir être faits par application du théorème de Gauss.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Champ électrique en régime stationnaire	
Équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Faraday.	Citer les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday. Particulariser ces équations au régime stationnaire.
Potentiel scalaire électrique.	Relier l'existence du potentiel scalaire électrique au caractère irrotationnel de $\boldsymbol{E}$. Exprimer une différence de potentiel comme une circulation du champ électrique.
Propriétés topographiques.	Associer l'évasement des tubes de champ à l'évolution de la norme de $\boldsymbol{E}$ en dehors des sources. Représenter les lignes de champ connaissant les surfaces équipotentielles et inversement. Évaluer le champ électrique à partir d'un réseau de surfaces équipotentielles.
Équation de Poisson.	Établir l'équation locale du deuxième ordre reliant le potentiel à la densité de charge.
Théorème de Gauss. Calculs de champ. Distribution surfacique de charge.	Énoncer et appliquer le théorème de Gauss. Établir le champ électrique et le potentiel créés par : – une charge ponctuelle, – une distribution de charge à symétrie sphérique. – une distribution de charge à symétrie cylindrique. Utiliser le modèle de la distribution surfacique de charge dans le cas d'une distribution volumique d'épaisseur faible devant l'échelle de description. Établir le champ électrique créé par un plan infini

Linéarité.	uniformément chargé en surface. Exploiter le théorème de superposition.
Énergie potentielle électrique d'une charge ponctuelle dans un champ électrique extérieur.	Établir la relation $E_p = qV$. Appliquer la loi de l'énergie cinétique à une particule chargée dans un champ électrique.
Analogie entre champ électrique et champ gravitationnel.	Établir un tableau d'analogies entre les champs électrique et gravitationnel.

Le bloc 3 aborde le condensateur dans la géométrie plane. Cette étude permet d'introduire l'expression de l'énergie volumique du champ électrique sur ce cas particulier, la généralité de cette expression étant admise. Aucune notion sur les conducteurs en équilibre n'est exigible. La modification de la permittivité introduite par la présence d'un isolant sera affirmée sans relation avec une description microscopique de la polarisation.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Condensateur	
Approche expérimentale du phénomène d'influence. Capacité d'un condensateur plan.	**Décrire qualitativement le phénomène d'influence.** Exprimer le champ d'un condensateur plan en négligeant les effets de bord. En déduire l'expression de la capacité.
Rôle des isolants.	Prendre en compte la permittivité du milieu dans l'expression de la capacité.
Densité volumique d'énergie électrique.	Citer l'expression de la densité volumique d'énergie électrique. Retrouver l'expression de la densité volumique d'énergie électrique dans le cas du condensateur plan à partir de la relation $E = \frac{1}{2}CU^2$.

Le bloc 4 introduit les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson comme des postulats de l'électromagnétisme. La conservation du flux de $\boldsymbol{B}$, qui est la traduction intégrale de l'équation de Maxwell-Thomson, est l'occasion de revenir sur les connaissances de première année, où le champ magnétique a été abordé de manière descriptive. Les seuls calculs exigibles de champs magnétiques doivent pouvoir être traités par le théorème d'Ampère, la loi de Biot et Savart et le potentiel vecteur sont hors programme. L'expression de la densité volumique d'énergie magnétique est établie sur le cas particulier d'une bobine longue, sa généralité est admise. Les distributions surfaciques de courant ne seront pas introduites à ce stade, leur usage étant strictement limité à l'étude de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Champ magnétique en régime stationnaire	
Équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson.	Énoncer les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson. Particulariser l'équation de Maxwell-Ampère au régime stationnaire.
Conservation du flux magnétique.	Exploiter la conservation du flux magnétique et ses conséquences sur les lignes de champ magnétique.
Théorème d'Ampère.	Énoncer et appliquer le théorème d'Ampère.

	Établir l'expression du champ magnétique créé par : – un fil infini ; – un fil épais et infini ; – un solénoïde infini en admettant que le champ extérieur est nul ; – une bobine torique.
Forces de Laplace.	Exprimer les forces de Laplace s'exerçant sur un conducteur filiforme, sur une distribution volumique de courant.

Le bloc 5 étudie l'électromagnétisme en régime variable, principalement dans l'ARQS magnétique afin d'établir le lien avec le cours sur l'induction de première année. La notion de champ électromoteur est hors programme, la fem induite est calculée avec la loi de Faraday. Cette partie prépare également le cours sur la conversion de puissance en abordant les courants de Foucault et l'énergie magnétique.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
5. Electromagnétisme dans l'ARQS	
Courants de déplacement.	Vérifier que le terme de courant de déplacement permet d'assurer la compatibilité des équations de Maxwell avec la conservation de la charge.
ARQS magnétique.	Simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans l'ARQS en admettant que les courants de déplacement sont négligeables. Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire.
Induction.	Relier la circulation de $\boldsymbol{E}$ à la dérivée temporelle du flux magnétique, faire qualitativement le lien avec la loi de Faraday vue en première année.
Courants de Foucault.	Dans le cas d'un conducteur cylindrique soumis à un champ magnétique parallèle à son axe, uniforme et oscillant, décrire la géométrie des courants de Foucault, exprimer la puissance dissipée par effet Joule en négligeant le champ propre. Expliquer l'influence du feuilletage.
Energie magnétique. Densité volumique d'énergie magnétique. Couplage partiel, couplage parfait.	Exprimer l'énergie magnétique d'une bobine seule ou de deux bobines couplées en fonction des coefficients d'inductance et des intensités. Citer l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique. La retrouver dans le cas de la bobine dont on néglige les effets de bord à partir de la relation $E=\frac{1}{2}Li^2$. Exploiter la continuité temporelle du flux magnétique. Dans le cas de deux bobines couplées, établir l'inégalité $M^2 \leq L_1L_2$.

Le bloc 6 introduit les notions d'aimantation, d'excitation magnétique, et de perméabilité magnétique. Il conduit à une réécriture de l'équation de Maxwell-Ampère, plus adaptée aux milieux magnétiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6. Milieux ferromagnétiques	
Aimant permanent, champ magnétique créé dans son environnement. Actions subies par un dipôle magnétique dans un champ magnétique extérieur.	À partir d'une formule fournie exprimant le champ d'un dipôle magnétique, décrire le champ créé par un aimant à grande distance et représenter qualitativement les lignes de champ magnétique. Utiliser les expressions fournies de l'énergie potentielle, de la résultante et du moment. Décrire qualitativement l'évolution d'un dipôle magnétique dans un champ extérieur. Citer l'ordre de grandeur du champ géomagnétique en France.
Aimantation $\boldsymbol{M}$ d'un milieu magnétique.	Définir le champ d'aimantation d'un milieu magnétique.
Courants d'aimantation.	Associer à une distribution d'aimantation une densité de courants liés équivalente $\boldsymbol{j}_{lié} = \boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{M}$ (relation admise).
Relation entre $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{M}$. Équation de Maxwell-Ampère écrite avec le vecteur excitation magnétique $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{j}_{libre}$.	Définir l'excitation magnétique $\boldsymbol{H}$ et écrire l'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu magnétique. En déduire qualitativement que les sources de $\boldsymbol{H}$ sont les courants électriques libres, et que les sources de $\boldsymbol{B}$ sont les courants électriques libres et l'aimantation.
Milieu ferromagnétique.	Représenter l'allure des cycles d'hystérésis (H, M) et (H, B) d'un milieu ferromagnétique. Distinguer milieu dur et milieu doux, citer des exemples. **Tracer le cycle d'hystérésis d'un milieu ferromagnétique.**
Milieu ferromagnétique doux.	Modéliser un milieu doux par une relation constitutive linéaire. Définir la perméabilité relative et donner un ordre de grandeur.
Circuit magnétique avec ou sans entrefer. Électroaimant.	Décrire l'allure des lignes de champ dans un circuit magnétique sachant que les lignes de champs sortent orthogonalement à l'interface dans un entrefer. En appliquant le théorème d'Ampère et la conservation du flux magnétique, exprimer le champ magnétique produit dans l'entrefer d'un électroaimant.
Inductance propre d'une bobine à noyau de fer doux modélisé linéairement.	Établir l'expression de l'inductance propre de la bobine à noyau, vérifier l'expression de l'énergie magnétique $E_{mag} = \iiint \frac{1}{2\mu_0\mu_r} B^2 d\tau$.

Pertes d'une bobine réelle à noyau.	Exprimer le lien entre l'aire du cycle hystérésis et la puissance moyenne absorbée. Décrire les différents termes de perte d'une bobine à noyau : pertes fer par courants de Foucault et par hystérésis, pertes cuivre.

CONVERSION DE PUISSANCE

Présentation

En première année, la conversion de puissance est abordée à l'occasion du transformateur de tension et du moteur à courant continu dans la partie « induction et forces de Laplace ». Il s'agit ici d'approfondir cette étude en donnant le moyen d'aborder tous les éléments d'une chaîne énergétique faisant intervenir des éléments électriques, magnétiques et mécaniques.

Afin de pouvoir aborder des problématiques industrielles de forte puissance, le rôle essentiel du fer est considéré. Ainsi, les forces électromagnétiques ne se réduisent pas aux seules forces de Laplace s'exerçant sur les conducteurs traversés par des courants, l'aimantation du milieu participe de manière prépondérante au calcul des actions. De même, la prise en compte de la forte perméabilité du noyau d'un transformateur est indispensable afin d'établir une relation entre les intensités indépendante de la charge. Par ailleurs, on étudie la conversion électronique de puissance permettant d'adapter les différentes sources d'énergie à leur utilisation.

Cet enseignement est une initiation dont l'objectif est d'expliquer les principes physiques mis en œuvre dans des réalisations concrètes, il ne s'agit pas de multiplier les exemples de solutions techniques. En particulier, les dispositifs en triphasé ne sont pas étudiés.

Objectifs de formation

– Réaliser des bilans d'énergie.
– Appliquer l'électromagnétisme à des problématiques industrielles.
– Élaborer des modèles, analyser des limitations et des défauts.
– Associer divers éléments (sources, convertisseurs) afin de concevoir une chaîne énergétique complète.

Le bloc 1 présente quelques résultats généraux relatifs à la puissance électrique en régime sinusoïdal. La représentation de Fresnel, abordée en première année, est utilisée pour illustrer le facteur de puissance. La notion de puissance réactive est hors programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Puissance électrique en régime sinusoïdal	
Puissance moyenne, facteur de puissance.	Définir le facteur de puissance, faire le lien avec la représentation des tensions et des courants sur un diagramme de Fresnel. Citer et exploiter la relation $P = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi$.
Puissance moyenne absorbée par une impédance.	Citer et exploiter les relations $P = \Re_e(\underline{Z}) I_{eff}^2 = \Re_e(\underline{Y}) U_{eff}^2$. Justifier qu'un dipôle purement réactif n'absorbe aucune puissance en moyenne.

Le bloc 2 complète le modèle du transformateur de tension vu en première année. On ajoute ici le rôle d'un noyau de fer doux de forte perméabilité permettant d'obtenir un transformateur de courant. Les pertes et les défauts sont évoqués mais ne sont pas modélisés. En particulier, l'inductance magnétisante est hors programme. On explique l'intérêt du transformateur pour l'isolement et le transport de l'énergie électrique sur de longues distances.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Transformateur	
Modèle du transformateur idéal.	Citer les hypothèses du transformateur idéal. Établir les lois de transformation des tensions et des courants du transformateur idéal, en respectant l'algébrisation associée aux bornes homologues. Relier le transfert instantané et parfait de puissance à une absence de pertes et à un stockage nul de l'énergie électromagnétique.
Pertes.	Citer les pertes cuivre, les pertes fer par courant de Foucault et par hystérésis. Décrire des solutions permettant de réduire ces pertes.
Applications du transformateur.	Expliquer le rôle du transformateur pour l'isolement. Établir le transfert d'impédance entre le primaire et le secondaire. Expliquer l'intérêt du transport de l'énergie électrique à haute tension afin de réduire les pertes en ligne. Expliquer l'avantage d'un facteur de puissance élevé. **Mettre en œuvre un transformateur et étudier son rendement sur charge résistive.**

Le bloc 3 est consacré à la conversion électro-magnéto-mécanique de puissance. Afin d'étudier ces systèmes en prenant en compte le rôle du fer, on privilégie un calcul des actions électromagnétiques en dérivant l'énergie magnétique stockée dans le système par rapport à un paramètre de position. Les milieux magnétiques sont modélisés par des milieux linéaires. La notion de coénergie est hors programme.

Dans une première partie, la méthode de calcul de la force s'exerçant sur une partie mobile de fer est illustrée sur un contacteur en translation faisant partie d'un circuit magnétique dont l'entrefer est variable. À l'aide d'un bilan énergétique, le professeur pourra justifier la relation $F = (\partial E / \partial x)_i$ mais cette démonstration ne doit pas être considérée comme une capacité exigible.

On aborde ensuite le moteur synchrone en dérivant l'énergie magnétique localisée dans l'entrefer afin de déterminer le moment du couple électromagnétique. Les champs glissants statorique et rotorique sont radiaux dans l'entrefer et présentent des formes d'onde sinusoïdales. On montre que le moment moyen est non nul si les champs glissants sont synchrones. Le modèle électrique des phases de l'induit est abordé afin de décrire la conversion électromécanique de puissance, mais on n'étudiera pas l'utilisation d'une machine à vide comme compensateur synchrone.

Dans une troisième partie, on explique le fonctionnement du moteur à courant continu par analogie avec le moteur synchrone, en montrant que le collecteur réalise le synchronisme entre un champ statorique stationnaire et un champ rotorique qui lui est orthogonal quelle que soit la position angulaire du rotor, produisant ainsi un moment maximal.

On évoque la réversibilité énergétique des machines électriques, en distinguant avec rigueur fem et fcem. La puissance mécanique des machines est reliée à la puissance électrique des forces électromotrices induites par des bilans énergétiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Conversion électro-magnéto-mécanique	
3.1. Contacteur électromagnétique en translation	
Énergie et force électromagnétique.	Exprimer l'énergie magnétique d'un enroulement enlaçant un circuit magnétique présentant un entrefer variable. Calculer la force électromagnétique s'exerçant sur une partie mobile en translation en appliquant l'expression fournie $F = (\partial E / \partial x)_i$.
Applications.	Sur l'exemple du relais, expliquer le fonctionnement d'un contacteur électromagnétique.
3.2. Machine synchrone	
Structure d'un moteur synchrone à pôles lisses et à excitation séparée.	Décrire la structure d'un moteur synchrone diphasé et bipolaire : rotor, stator, induit, inducteur.
Champ magnétique dans l'entrefer.	Pour une machine de perméabilité infinie à entrefer constant, exprimer le champ magnétique dans l'entrefer généré par une spire passant dans deux encoches opposées. Expliquer qualitativement comment obtenir un champ dont la dépendance angulaire est sinusoïdale dans l'entrefer en associant plusieurs spires décalées.
Champ glissant statorique.	Justifier l'existence d'un champ glissant statorique lorsque les deux phases sont alimentées en quadrature.
Champ glissant rotorique.	Justifier l'existence d'un champ glissant rotorique associé à la rotation de l'inducteur.
Énergie et couple.	Exprimer l'énergie magnétique totale stockée dans l'entrefer en fonction de la position angulaire du rotor. Calculer le moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor en exploitant l'expression fournie $\Gamma = \partial E / \partial \theta$.
Condition de synchronisme.	Justifier la condition de synchronisme entre le champ statorique et le champ rotorique afin d'obtenir un moment moyen non nul. Discuter qualitativement la stabilité du système en fonction du déphasage entre les deux champs glissants. Identifier la difficulté du démarrage d'un moteur synchrone, décrire qualitativement le principe de l'autopilotage.

Modèle électrique de l'induit.	En admettant les expressions des coefficients d'inductance, établir les équations électriques vérifiées par les phases de l'induit et donner les représentations de Fresnel associées. À l'aide d'un bilan énergétique où seules les pertes cuivre sont envisagées, justifier l'égalité entre la puissance électrique absorbée par les fcem et la puissance mécanique fournie.
Fonctionnement réversible.	Décrire les conditions d'utilisation de la machine synchrone en alternateur.
Applications.	Citer des exemples d'application de la machine synchrone.
3.3. Machine à courant continu	
Structure d'un moteur à courant continu à pôles lisses.	Décrire la structure d'un moteur à courant continu bipolaire à excitation séparée : rotor, stator, induit, inducteur.
Collecteur.	Par analogie avec le moteur synchrone, expliquer que le collecteur établit le synchronisme entre le champ statorique stationnaire et le champ rotorique quelle que soit la position angulaire du rotor.
Couple et fcem.	Citer l'expression du moment du couple $\Gamma = \Phi i$, établir l'expression de la fcem induite $e = \Phi\Omega$ par un argument de conservation énergétique. Décrire qualitativement les pertes existant dans une machine réelle : pertes cuivre, pertes fer, pertes mécaniques. Établir les équations électrique et mécanique. Tracer la caractéristique (Ω, Γ) à tension d'induit constante. Analyser le démarrage d'un moteur entraînant une charge mécanique exerçant un moment $-f \cdot \Omega$. **Mettre en œuvre un moteur à courant continu.**
Fonctionnement réversible.	Décrire les conditions d'utilisation de la machine à courant continu en génératrice. Choisir des conventions d'orientation adaptées.
Applications.	Citer des exemples d'application de la machine à courant continu.

Le bloc 4 aborde la conversion électronique statique de puissance principalement sur l'exemple du hacheur série. Il ne s'agit pas de traiter un cours exhaustif sur les convertisseurs en multipliant les exemples de circuits, l'état d'esprit de cet enseignement doit permettre de réinvestir les capacités pour étudier modestement d'autres montages (redresseur, onduleur). On ne décrira pas le circuit de commande d'un transistor.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.4. Conversion électronique statique	
Formes continue et alternative de la puissance électrique.	Citer des exemples illustrant la nécessité d'une conversion de puissance électrique.

Structure d'un convertisseur.	Décrire l'architecture générale d'un convertisseur électronique de puissance : générateur, récepteur, processeur de puissance utilisant des interrupteurs électroniques, commande des fonctions de commutation.
Fonction de commutation spontanée. Fonction de commutation commandée. Sources. Réversibilité. Interconnexion. Cellule de commutation élémentaire.	Décrire la caractéristique idéale courant-tension de la diode. Décrire la caractéristique idéale courant-tension du transistor. Définir les notions de sources de courant et de tension. Expliquer le rôle des condensateurs et des bobines comme éléments de stockage d'énergie assurant le lissage de la tension ou de l'intensité à haute fréquence. Caractériser les sources par leur réversibilité en tension, en intensité, en puissance. Citer des exemples. Citer les règles d'interconnexions entre les sources. Expliquer le fonctionnement d'une cellule élémentaire à deux interrupteurs assurant le transfert d'énergie entre une source de courant et une source de tension.
Hacheur.	Tracer des chronogrammes, exploiter le fait que la moyenne d'une dérivée est nulle en régime périodique établi, calculer des moyennes de fonctions affines par morceaux, utiliser un bilan de puissance moyenne pour établir des relations entre les tensions et les intensités. Justifier le choix des fonctions de commutation pour un hacheur série assurant l'alimentation d'un moteur à courant continu à partir d'un générateur idéal de tension continue. Exprimer les valeurs moyennes des signaux. Calculer l'ondulation en intensité dans l'approximation d'un hachage haute fréquence réalisant une intensité affine par morceaux.
Redressement double alternance réalisé avec un pont de diodes.	Pour un générateur de tension sinusoïdal et une charge assimilable à une source continue de courant, décrire les différentes séquences de commutation des diodes. **Mettre en œuvre un redressement double alternance.**
Onduleur.	Décrire la structure en pont à quatre interrupteurs et les séquences de commutation pour une fréquence de commutation fixe.

PHYSIQUE DES ONDES

Présentation

Le programme de physique des ondes s'inscrit dans le prolongement de la partie « signaux physiques » du programme de PCSI, où des propriétés unificatrices (diffraction, interférences, battements…) ont été abordées en s'appuyant sur une approche expérimentale et sans référence à une équation d'onde. Il s'agit désormais de mettre en place l'équation d'onde de d'Alembert, à une ou trois dimensions, sur des systèmes mécaniques ou électromagnétiques. On aborde ensuite l'étude de la dispersion et de l'absorption associées à des phénomènes de propagation régis par des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. Enfin, la propagation d'ondes dans des milieux différents conduit naturellement à étudier la réflexion et la transmission d'ondes à une interface.

Objectifs de formation

– Décrire l'évolution d'un système mécanique déformable en appliquant le principe fondamental de la dynamique de manière locale, en utilisant des champs comme en électromagnétisme.
– Utiliser les équations de Maxwell en dehors de l'ARQS.
– Manipuler des équations couplant des champs scalaires et vectoriels afin d'établir une équation de propagation.
– Résoudre une équation de propagation en exploitant des familles de solutions particulières.
– Exploiter la linéarité, utiliser la décomposition harmonique, réinvestir les connaissances sur l'analyse spectrale.
– Dégager des analogies entre des systèmes mécaniques et électromagnétiques.

Le bloc 1 est consacré à l'étude de phénomènes ondulatoires non dispersifs. L'équation de d'Alembert unidimensionnelle est d'abord établie en étudiant une partie infinitésimale de corde ou de câble coaxial. On se contente de vérifier que les superpositions de fonctions du type $f(x-ct)$ et $g(x+ct)$ sont solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension.
Dans un deuxième temps, on étudie les ondes sonores puis les ondes électromagnétiques qui se propagent dans l'espace physique de dimension trois.
L'équation de propagation des ondes sonores est établie dans le cadre de l'approximation acoustique avec une approche locale. Le principe fondamental de la dynamique est appliqué en justifiant que l'accélération de la particule de fluide s'écrit $\vec{a} = \partial\vec{v} / \partial t$ lorsque l'amplitude des oscillations est faible devant la longueur d'onde. L'occasion se présente ainsi d'utiliser les opérateurs de dérivation dans un autre domaine que celui de l'électromagnétisme.
Le choix a été fait ici de privilégier les solutions harmoniques dans la résolution de l'équation de d'Alembert, pour leur universalité comme solutions adaptées aux équations d'ondes linéaires.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert	
1.1. Propagation unidimensionnelle	
Ondes transversales sur une corde vibrante infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements transverses.	Établir l'équation d'onde en utilisant des systèmes infinitésimaux. Définir une onde longitudinale et une onde transversale.
Équation de d'Alembert.	Identifier une équation de d'Alembert. Exprimer la célérité en fonction des paramètres du milieu.

Exemples de solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle. Ondes progressives harmoniques. Ondes stationnaires harmoniques.	Définir une onde progressive et une onde stationnaire. Établir la relation de dispersion à partir de l'équation de d'Alembert. Utiliser la notation complexe. Définir le vecteur d'onde, la vitesse de phase. Retrouver la distance égale à $\lambda/2$ entre deux nœuds consécutifs ou entre deux ventres consécutifs. Décomposer une onde stationnaire en ondes progressives, une onde progressive en ondes stationnaires.
Conditions aux limites. Régime libre : modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités. Régime forcé : résonances de la corde de Melde.	Justifier et exploiter des conditions aux limites. Définir et décrire les modes propres. Construire une solution quelconque par superposition de modes propres. Associer mode propre et résonance en régime forcé.
Ondes de tension et de courant dans un câble coaxial sans pertes modélisé comme un milieu continu caractérisé par une inductance linéique et une capacité linéique. Impédance caractéristique. Réflexion en amplitude sur une impédance terminale.	Décrire le modèle. Établir les équations de propagation. Établir l'expression de l'impédance caractéristique d'un câble coaxial. **Étudier la réflexion en amplitude de tension pour une impédance terminale nulle, infinie ou résistive.**
1.2. Ondes sonores dans les fluides	
Approximation acoustique.	Classer les ondes sonores par domaines fréquentiels. Justifier les hypothèses de l'approximation acoustique par des ordres de grandeur. En comparant l'amplitude du déplacement à la longueur d'onde, montrer que l'accélération de la particule de fluide s'écrit $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ lorsque v << c. Écrire les trois équations locales linéarisées.
Équation de d'Alembert pour la surpression.	Déterminer l'équation de propagation de la surpression dans une situation unidirectionnelle en coordonnées cartésiennes. Utiliser sa généralisation admise à trois dimensions avec l'opérateur laplacien.
Célérité.	Exprimer la célérité en fonction de la température pour un gaz parfait.

	Citer les ordres de grandeur de la célérité pour l'air et pour l'eau.
Densité volumique d'énergie sonore, vecteur densité de courant énergétique. Intensité acoustique, niveau sonore.	Utiliser les expressions admises du vecteur densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde. Définir l'intensité acoustique en $W.m^{-2}$ et le niveau sonore en décibels. Citer quelques ordres de grandeur (minimum d'audition, seuil de douleur, conversation).
Ondes planes progressives harmoniques. Impédance acoustique définie comme le rapport de la surpression sur le débit volumique ou comme le rapport de la surpression sur la vitesse.	En relation avec la diffraction, discuter la validité du modèle de l'onde plane en comparant la dimension latérale à la longueur d'onde. Décrire le caractère longitudinal de l'onde sonore. Établir et utiliser l'impédance acoustique. Utiliser le principe de superposition des ondes planes progressives harmoniques.
Onde sonore sphérique.	Commenter l'expression de la surpression $p(r,t) \propto \frac{1}{r}\cos(\omega(t-\frac{r}{c}))$ générée par une sphère pulsante.
Effet Doppler.	**Mettre en œuvre une détection hétérodyne pour mesurer une vitesse par décalage Doppler.**
1.3. Bilan de Poynting de l'énergie électromagnétique dans un milieu quelconque	
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting. Équation locale de Poynting.	Identifier les différents termes de l'équation locale de Poynting. Interpréter le vecteur de Poynting comme le vecteur densité de flux de puissance électromagnétique.
1.4. Ondes électromagnétiques dans le vide	
Propagation de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ dans une région sans charge ni courant.	Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications. Établir les équations de propagation.
Structure d'une onde plane progressive harmonique.	Utiliser la notation complexe. Représenter le trièdre $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$. Établir la relation entre les amplitudes des champs. Associer la direction du vecteur de Poynting et la direction de propagation de l'onde. Associer le flux du vecteur de Poynting à un flux de photons en utilisant la relation d'Einstein-Planck. Citer quelques ordres de grandeur de flux énergétiques surfaciques moyens (laser hélium-néon, flux solaire, téléphonie…) et les relier aux ordres de grandeur des champs électriques associés.

	Utiliser le principe de superposition d'ondes planes progressives harmoniques.
Polarisation rectiligne.	Identifier l'expression d'une onde électro-magnétique plane progressive polarisée rectilignement.

Le bloc 2 est consacré aux phénomènes de propagation régis par des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. L'étude est menée sur des ondes harmoniques unidimensionnelles lorsque l'équation de propagation est linéaire mais n'est pas une équation de d'Alembert. On évoque ensuite la théorie de Fourier pour justifier qu'une onde quelconque limitée dans le temps est la superposition d'ondes harmoniques : on définit ainsi la notion de paquet d'onde. Pour finir, on applique les notions nouvellement introduites sur la dispersion à la propagation des ondes dans les milieux conducteurs et les plasmas.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion	
2.1. Relation de dispersion	
Forme générique des solutions progressives sinusoïdales : $y = y_0 e^{j(\omega.t - \underline{k}.x)}$	Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles de propagation. Établir la relation de dispersion. Lier la partie réelle de $\underline{k}$ à la vitesse de phase, la partie imaginaire de $\underline{k}$ à une dépendance spatiale de l'amplitude. Définir la notion de milieu dispersif.
2.2. Paquet d'ondes	
Superposition de deux ondes de fréquences proches dans un milieu non absorbant et dispersif. Domaine spectral d'un paquet d'onde de durée finie.	Calculer la vitesse de groupe à partir de la relation de dispersion. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes. Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre.
2.3. Ondes électromagnétiques planes dans des milieux conducteurs	
Cas d'un conducteur ohmique de conductivité réelle : effet de peau. Modèle du conducteur parfait en présence d'un champ électromagnétique variable.	Repérer une analogie formelle avec les phénomènes de diffusion. Établir la relation de dispersion. Associer l'atténuation de l'onde à une dissipation d'énergie. Citer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à 50 Hz. Justifier que les champs électrique et magnétique sont nuls dans le conducteur.
Interaction entre une onde plane progressive harmonique et un plasma localement neutre peu dense. Conductivité imaginaire pure. Interprétation énergétique. Équation de propagation dans le plasma. Onde	Décrire le modèle de la conduction électrique dans un plasma. Construire une conductivité complexe en justifiant les approximations. Associer le caractère imaginaire pur de la conductivité complexe à l'absence de puissance échangée entre le champ et les porteurs. Établir la relation de dispersion dans le plasma.

plane progressive harmonique dans le plasma. Onde évanescente dans le domaine réactif ; absence de propagation de l'énergie.	 Identifier une onde évanescente (onde stationnaire spatialement amortie). Expliquer la notion de fréquence de coupure et donner son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère.

Le bloc 3 est consacré à la réflexion et la transmission d'ondes à une interface plane sous incidence normale en acoustique et en électromagnétisme. Les relations de passages pour le champ électromagnétique sont affirmées, toute démonstration est hors programme. Tout calcul de courant à partir du vecteur densité de courant surfacique est à proscrire.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
3. Interfaces entre deux milieux	
3.1. Cas des ondes sonores	
Réflexion, transmission d'une onde sonore plane progressive sous incidence normale sur une interface plane infinie entre deux fluides : coefficients de réflexion et de transmission en amplitude des vitesses, des surpressions et des puissances sonores.	Expliciter des conditions aux limites à une interface. Établir les expressions des coefficients de transmission et de réflexion en amplitude de surpression, en amplitude de vitesse ou en puissance. Relier l'adaptation des impédances au transfert maximum de puissance.
Applications.	**Activité documentaire :** décrire la mise en œuvre des ondes ultra-sonores pour l'échographie médicale.
3.2. Cas des ondes électromagnétiques	
Relations de passage du champ électromagnétique en présence d'une distribution surfacique de charge ou de courant.	Interpréter le vecteur densité de courant surfacique comme un modèle pour décrire un déplacement de charges à travers un domaine d'épaisseur faible devant l'échelle de description. Utiliser les relations de passage fournies.
Réflexion d'une onde électromagnétique polarisée rectilignement sur un conducteur parfait, en incidence normale.	Exploiter la continuité de la composante tangentielle du champ électrique pour justifier l'existence d'une onde réfléchie et calculer celle-ci. Calculer le champ magnétique dans le vide, en déduire le courant surfacique sur le conducteur. Calculer le coefficient de réflexion en puissance.

THERMODYNAMIQUE DES TRANSFORMATIONS PHYSICO-CHIMIQUES

Présentation

La transformation de la matière a été abordée dès le début de la première année; les changements d'état du corps pur ont été évoqués et le critère d'évolution d'un système chimique en transformation a été présenté sans être démontré. Ce dernier a été utilisé au travers de l'étude de l'évolution des systèmes chimiques, étude restreinte au cas où une seule réaction modélise la transformation.

Le but de cette partie est double : d'une part, aborder les transferts thermiques d'un système engagé dans une transformation physico-chimique, et d'autre part, établir et utiliser le critère d'évolution spontanée d'un système chimique, ce qui nécessite l'introduction de la fonction G et du potentiel chimique.

La thermodynamique propose des outils performants permettant de décrire l'évolution macroscopique des systèmes. Ainsi l'introduction du potentiel chimique permet-elle de faire jouer à la quantité de matière un rôle comparable aux variables température et pression, déjà manipulées par les étudiants au cours de la première année. Le changement d'état physique d'un constituant chimique peut être traité avec le même formalisme que la transformation chimique.

On adopte pour les potentiels chimiques une expression générale $\mu_i(T, composition) = \mu_i°(T) + RT\ln(a_i)$ qui fait référence aux expressions des activités vues en première année. L'établissement de cette expression est hors programme. On se limite aux cas d'une espèce chimique pure, d'une solution aqueuse très diluée, ou d'un mélange idéal de gaz parfaits. L'influence de la pression sur le potentiel chimique d'un constituant en phase condensée pure est abordée uniquement en approche documentaire sur le thème de la pression osmotique.

Une étude approfondie des changements de phase permet de compléter les acquis de première année sur le corps pur et sur les propriétés des alliages métalliques au travers de leur comportement thermique.

Les grandeurs standard de réaction sont introduites. On se place systématiquement dans le cadre de l'approximation d'Ellingham. D'une part, le calcul de ces grandeurs à 298 K à partir de tables de données thermodynamiques rend possible, pour un système engagé dans une transformation physico-chimique, une estimation du transfert thermique qui peut être confrontée à l'expérience. D'autre part, les grandeurs standard de réaction permettent la détermination de la valeur de la constante thermodynamique K° caractéristique d'une réaction, valeur qui était simplement donnée en première année. C'est ainsi l'occasion de revenir sur la détermination de la composition du système physico-chimique en fin d'évolution.

Pour un système en équilibre, le calcul de la variance permet, *via* l'identification méthodique des variables intensives de description, une caractérisation de l'état intensif de celui-ci par la détermination de son « nombre de degrés de liberté ». L'utilisation du théorème de Gibbs ne relève pas du programme.

La notion d'affinité chimique n'est pas utilisée. Le sens d'évolution spontanée d'un système hors d'équilibre, à température et pression fixées, est déterminé d'après le signe de Δ_rG.

Enfin, l'étude de l'influence de la modification d'un paramètre (pression, température ou composition) sur un système initialement à l'équilibre chimique permet d'aborder la problématique de l'optimisation des conditions opératoires d'une synthèse. L'étude de tout ou partie d'une unité de synthèse industrielle est conduite à l'aide d'une approche documentaire.

Objectifs généraux de formation

– Faire preuve de rigueur dans la description d'un système physico-chimique.
– Distinguer modélisation d'une transformation chimique (réaction chimique et écriture de l'équation de réaction) et description quantitative de l'évolution d'un système prenant en compte les conditions expérimentales choisies pour réaliser la transformation.
– Utiliser des tables de données thermodynamiques.
– Confronter des grandeurs calculées avec des mesures expérimentales.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Application du premier principe à la transformation physico-chimique	
État standard. Capacité thermique standard à pression constante. Enthalpie standard de réaction. Enthalpie standard de changement d'état. État standard de référence d'un élément, enthalpie standard de formation. Loi de Hess. Enthalpie standard de dissociation de liaison.	Déterminer l'enthalpie standard de réaction à l'aide de tables de données thermodynamiques et de la loi de Hess. Estimer l'ordre de grandeur d'une enthalpie standard de réaction à partir des énergies de liaison.
Effets thermiques pour une transformation isobare : – transfert thermique causé par la transformation chimique en réacteur isobare isotherme (relation $\Delta H = Q_p = \xi\ \Delta_r H°$) ; – transfert thermique causé par un changement d'état physique isobare isotherme ; – transformation exothermique ou endothermique.	Déterminer le transfert thermique entre le système en transformation physico-chimique et le milieu extérieur. Évaluer la température atteinte par un système siège d'une transformation physico-chimique supposée isobare et réalisée dans un réacteur adiabatique. **Mettre en œuvre une démarche expérimentale mettant en jeu des effets thermiques lors d'une transformation chimique.**
2. Potentiel thermodynamique	
Enthalpie libre d'un système.	Justifier que l'enthalpie libre G est le potentiel thermodynamique adapté à l'étude des transformations isothermes, isobares et spontanées. Exprimer l'entropie créée en fonction de la variation d'enthalpie libre.
3. Identités thermodynamiques pour un système monophasé de composition variable	
Identités thermodynamiques. Potentiel chimique.	Citer les expressions des différentielles de U, H, G. Distinguer les caractères intensif ou extensif des variables utilisées.
4. Changement d'état du corps pur	
Potentiel chimique du corps pur. Conditions d'équilibre d'un corps pur sous plusieurs phases. Variance. Évolution d'un système sous plusieurs phases.	Identifier le potentiel chimique d'un corps pur à son enthalpie libre molaire. Établir l'égalité des potentiels chimiques pour un corps pur en équilibre sous plusieurs phases. En déduire l'existence d'une courbe d'équilibre sur un diagramme (P,T). Définir et déterminer la variance d'un système polyphasé en équilibre. Prévoir le sens de l'évolution d'un corps pur diphasé hors d'équilibre.
5. Mélanges	
Potentiel chimique d'un constituant dans un mélange ; enthalpie libre d'un système chimique.	Citer l'expression (admise) du potentiel chimique d'un constituant en fonction de son activité. Exprimer l'enthalpie libre d'un système en fonction des potentiels chimiques.

	Approche documentaire : à partir de documents sur la pression osmotique, discuter de l'influence de la pression sur le potentiel chimique et d'applications au laboratoire, dans l'industrie, ou dans la vie courante.
6. Changement d'état des alliages métalliques	
Diagrammes isobares d'équilibre solide-liquide : – avec miscibilité totale des solides ; – avec miscibilité nulle des solides, avec ou sans composé défini à fusion congruente. Théorème des moments chimiques.	Exploiter les diagrammes isobares d'équilibre entre deux phases pour, à composition en fraction massique donnée : – décrire le comportement d'un mélange binaire lors d'une variation de température en traçant l'allure de la courbe d'analyse thermique ; – déterminer les températures de début et de fin de changement d'état ; – donner la composition des phases en présence à une température fixée ainsi que les masses dans chaque phase ; – identifier les compositions relatives aux mélanges indifférents, eutectiques et aux composés définis et leur intérêt dans l'utilisation des alliages métalliques.
7. Application du second principe à une transformation chimique	
Enthalpie libre de réaction. Enthalpie libre standard de réaction. Relation entre Δ_rG, $\Delta_rG°$ et Q_r ; évolution d'un système chimique. Entropie standard de réaction $\Delta_rS°$.	Relier création d'entropie et enthalpie libre de réaction lors d'une transformation d'un système physico-chimique à P et T fixées. Prévoir le sens d'évolution à P et T fixées d'un système physico-chimique dans un état donné à l'aide de l'enthalpie libre de réaction. Déterminer les grandeurs standard de réaction à partir des tables de données thermodynamiques. Déterminer les grandeurs standard de réaction d'une réaction dont l'équation est combinaison linéaire d'autres équations de réaction. Interpréter ou prévoir le signe de l'entropie standard de réaction.
Constante d'équilibre ; relation de Van't Hoff. Relation entre Δ_rG, $K°$ et Q_r.	Définir la constante thermodynamique d'équilibre à partir de l'enthalpie libre standard de réaction. Prévoir le sens de réaction à P et T fixées d'un système physico-chimique dans un état donné à l'aide de $K°$ et Q_r. Énoncer et exploiter la relation de Van't Hoff. Déterminer la valeur de la constante d'équilibre thermodynamique à une température quelconque dans le cadre de l'approximation d'Ellingham. Déterminer la valeur d'une constante d'équilibre thermodynamique d'une réaction par combinaison de constantes d'équilibres thermodynamiques

État final d'un système : équilibre chimique ou transformation totale.	d'autres réactions. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. **Mettre en œuvre une démarche expérimentale pour déterminer la valeur d'une constante d'équilibre en solution aqueuse.**
Caractérisation de l'état intensif d'un système en équilibre physico-chimique : variance, nombre de degrés de liberté d'un système à l'équilibre. Optimisation d'un procédé chimique : – par modification de la valeur de K° ; – par modification de la valeur du quotient réactionnel.	Reconnaître si une variable intensive est ou non un paramètre d'influence d'un équilibre chimique. Recenser les variables intensives pertinentes de description du système à l'équilibre pour en déduire le nombre de degrés de liberté de celui-ci. Identifier les paramètres d'influence et leur sens d'évolution pour optimiser une synthèse ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable. **Approche documentaire** : à partir de documents décrivant une unité de synthèse industrielle, analyser les choix industriels, aspects environnementaux inclus.

ÉLECTROCHIMIE

Présentation

L'approche adoptée dans cette partie est principalement qualitative, et en dehors de l'étude thermodynamique d'une pile, elle ne requiert aucun formalisme physique ou mathématique.

Les caractéristiques générales des courbes courant-potentiel sont présentées sur différents exemples afin que les étudiants soient capables de proposer l'allure qualitative de courbes à partir d'un ensemble de données cinétiques et thermodynamiques fournies.

Ces courbes sont utilisées pour justifier ou prévoir le fonctionnement de dispositifs d'intérêt industriel, économique et écologique mettant en jeu la conversion énergie chimique-énergie électrique, qu'ils soient sièges de réactions d'oxydoréduction spontanées (piles électrochimiques, piles à combustibles, phénomènes de corrosion humide) ou forcées (électrolyseurs et accumulateurs).

L'ensemble des aspects étudiés donne lieu à des activités expérimentales qui visent à illustrer les phénomènes présentés et à souligner l'intérêt des dispositifs électrochimiques pour la détermination de grandeurs thermodynamiques et électrochimiques.

Les approches documentaires permettent de mettre en évidence la complexité des dispositifs de conversion énergie chimique-énergie électrique, au-delà de l'aspect strictement électrochimique.

Objectifs généraux de formation

– Choisir de manière rigoureuse et décrire le système physico-chimique étudié.
– Élaborer qualitativement des outils graphiques à partir d'un ensemble de données.

– Pratiquer un raisonnement qualitatif à partir de représentations graphiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Approche qualitative de la cinétique électrochimique	
Surtension.	Décrire le montage à trois électrodes permettant de mesurer une surtension.
Allure des courbes courant-potentiel (intensité ou densité de courant) : – systèmes rapides et systèmes lents ; – nature de l'électrode ; – courant limite de diffusion ; – vagues successives ; – mur du solvant.	Associer vitesse de réaction électrochimique et intensité du courant. Reconnaître le caractère lent ou rapide d'un système à partir des courbes courant-potentiel. Identifier les espèces électroactives pouvant donner lieu à une limitation en courant par diffusion. Identifier des paliers de diffusion sur des relevés expérimentaux. Avec la loi de Fick, relier l'intensité du courant limite de diffusion à la concentration du réactif et à l'aire de la surface immergée de l'électrode. Donner l'allure qualitative de branches d'oxydation ou de réduction à partir de données de potentiels standard, de concentrations et de surtensions « de seuil ». **Mettre en œuvre un protocole expérimental utilisant des courbes courant-potentiel.**
2. Phénomènes de corrosion humide	
Transformations spontanées : notion de potentiel mixte.	Positionner qualitativement un potentiel mixte sur un tracé de courbes courant-potentiel.
Potentiel de corrosion, courant de corrosion. Corrosion uniforme en milieu acide ou en milieu neutre oxygéné. Corrosion différentielle par hétérogénéité du support ou du milieu. .	Interpréter qualitativement un phénomène de corrosion uniforme à l'aide de données expérimentales, thermodynamiques et cinétiques. Citer des facteurs aggravants de la corrosion. Interpréter qualitativement un phénomène de corrosion différentielle faisant intervenir deux métaux à l'aide de courbes courant-potentiel.
Protection contre la corrosion : – revêtement ; – passivation ; – anode sacrificielle ; – protection électrochimique par courant imposé.	Exploiter des tracés de courbes courant-potentiel pour expliquer qualitativement : – la qualité de la protection par un revêtement métallique ; – le fonctionnement d'une anode sacrificielle. **Mettre en œuvre un protocole illustrant les phénomènes de corrosion et de protection.**
3. Énergie chimique et énergie électrique : conversion et stockage	
3.1. Conversion énergie chimique en énergie électrique	
Approche thermodynamique.	Établir l'inégalité reliant la variation d'enthalpie

	libre et le travail électrique. Citer la relation entre la tension à vide d'une pile et l'enthalpie libre de réaction. Déterminer la capacité d'une pile en Ah.
Approche cinétique.	Utiliser les courbes courant-potentiel pour expliquer le fonctionnement d'une pile électrochimique et prévoir la valeur de la tension à vide. Citer les paramètres influençant la résistance interne du dispositif électrochimique. **Mettre en œuvre une démarche expérimentale utilisant des piles.**
3.2. Conversion énergie électrique en énergie chimique	
Caractère forcé de la transformation. Électrolyseur.	Utiliser les courbes courant-potentiel pour expliquer le fonctionnement d'un électrolyseur et prévoir la valeur de la tension de seuil. Déterminer un rendement faradique à partir d'informations fournies concernant le dispositif étudié.
Dépôt électrolytique.	Évaluer l'épaisseur d'un dépôt électrolytique ou la masse de produit formé pour une durée donnée d'électrolyse.
Recharge d'un accumulateur.	Utiliser les courbes courant-potentiel pour justifier les contraintes dans la recharge d'un accumulateur. Évaluer l'épaisseur d'un dépôt électrolytique ou la masse de produit formé pour une durée donnée d'électrolyse. Utiliser les courbes courant-potentiel pour expliquer la recharge d'un accumulateur et prévoir la valeur de la tension de seuil. **Approche documentaire** : à partir de documents sur des accumulateurs (lithium ion, nickel-métal hydrure), comparer la constitution, le fonctionnement, et l'efficacité de tels dispositifs.

Appendice 1 : matériel

Cette liste complète celle donnée en annexe 1 du programme de physique de PCSI. Elle regroupe avec celle-ci le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée fournie sous forme de version papier ou numérique. Une utilisation de matériel hors de ces listes lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

1. Domaine conversion de puissance

– Wattmètre numérique
– Transformateur à noyau ferromagnétique
– Pont de Graetz
– Machine à courant continu
– Alimentation stabilisée

2. Domaine électrique

– Générateur de signaux Basse Fréquence
– Oscilloscope numérique avec analyseur de spectre
– ALI
– Multiplieur analogique
– Porte logique

3. Domaine ondes

– Câble coaxial, bouchons adaptés
– Emetteurs et récepteurs à ultrasons
– Haut parleur, microphone

Appendice 2 : outils mathématiques

Les outils mathématiques dont la maitrise est nécessaire à la mise en œuvre du programme de physique PSI sont d'une part ceux qui figurent dans l'appendice 2 du programme de PCSI et d'autre part ceux qui figurent dans la liste ci-dessous.

Le thème « analyse vectorielle » prolonge l'étude de l'outil « gradient » abordée en PCSI en introduisant de nouveaux opérateurs : seules leurs expressions en coordonnées cartésiennes sont exigibles. Toutes les autres formules utiles (expressions en coordonnées cylindriques ou sphériques, actions sur des produits, combinaisons d'opérateurs, etc.) doivent être fournies.

Le thème « analyse de Fourier » prolonge l'étude de l'outil « séries de Fourier » abordée en PCSI en admettant la décomposition d'une fonction non périodique du temps en une somme continue de fonctions sinusoïdales. De même qu'en PCSI où le calcul des coefficients d'un développement en série de Fourier est exclu, on ne cherche pas, en PSI, à expliciter le poids relatif et les déphasages relatifs des différentes composantes de Fourier, de telle sorte que la transformée de Fourier n'est pas exigible. On insiste en revanche sur la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale Δf et la durée caractéristique Δt d'un signal non périodique.

Dans le thème « équations aux dérivées partielles », aucune méthode générale d'étude n'est exigible : on se limite à chercher des solutions d'une forme donnée par substitution, menant ainsi soit à des équations différentielles classiques, soit à une relation de dispersion.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Calcul différentiel	
Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles. Dérivées partielles. Différentielle. Théorème de Schwarz. Intégration de l'expression d'une dérivée partielle.	Relier la différentielle et les dérivées partielles premières. Utiliser le théorème de Schwarz (admis). Intégrer une expression de la forme $\partial f/\partial x = g(x,y)$ à y fixé en introduisant une fonction $\phi(y)$ inconnue comme « constante d'intégration ».

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Analyse vectorielle	
a) gradient b) divergence c) rotationnel d) laplacien d'un champ scalaire e) laplacien d'un champ de vecteurs f) cas des champs proportionnels à exp(iωt-i**k.r**) ou exp(i**k.r**-iωt)	Relier le gradient à la différentielle d'un champ scalaire à t fixé. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes. Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes. Définir Δf = div (**grad** f). Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes. Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes. Exprimer l'action des opérateurs d'analyse vectorielle sur un tel champ à l'aide du vecteur i**k**.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Analyse de Fourier	
Synthèse spectrale d'une fonction périodique.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni. Utiliser un raisonnement par superposition.
Synthèse spectrale d'une fonction non périodique.	Utiliser un raisonnement par superposition. Citer et utiliser la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale Δf et la durée caractéristique Δt d'un signal non périodique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Equations aux dérivées partielles	
Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de diffusion, équation de d'Alembert.	Identifier une équation aux dérivées partielles connue. Transposer une solution familière dans un domaine de la physique à un autre domaine. Obtenir des solutions de forme donnée par substitution. Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites.

Appendice 3 : outils transversaux

La liste ci-dessous explicite un certain nombre d'outils transversaux dont la maîtrise est indispensable au physicien. Leur apprentissage progressif et contextualisé doit amener les étudiants au bout des deux années de CPGE à en faire usage spontanément quel que soit le contexte. S'agissant de l'analyse dimensionnelle, il convient d'éviter tout dogmatisme : en particulier la présentation de la dimension d'une grandeur par le biais de son unité dans le système international est autorisée. S'agissant de la recherche d'une expression par analyse dimensionnelle il ne s'agit en aucun cas d'en faire un exercice de style : en particulier le théorème Pi de Buckingham est hors programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Analyse de pertinence	
Homogénéité d'une expression.	Contrôler l'homogénéité d'une expression, notamment par référence à des expressions connues.
Caractère scalaire ou vectoriel des grandeurs physiques présentes dans une expression.	Contrôler la compatibilité d'une expression avec le caractère scalaire ou vectoriel des grandeurs mise en jeu.
Caractère infinitésimal ou non infinitésimal des grandeurs physiques présentes dans une expression.	Contrôler la compatibilité d'une expression avec le caractère infinitésimal ou non infinitésimal des grandeurs mise en jeu.
Sens de variation d'une expression par rapport à un paramètre.	Interpréter qualitativement et en faire un test de pertinence.
Limites d'une expression pour des valeurs nulles ou infinies des paramètres.	Tester les limites d'une expression. Interpréter qualitativement ou en faire un test de pertinence.
Nullité d'une expression.	Repérer l'annulation d'une expression pour une valeur particulière d'un paramètre. Interpréter qualitativement ou en faire un test de pertinence.
Divergence d'une expression.	Repérer la divergence d'une expression pour une valeur particulière d'un paramètre. Interpréter qualitativement ou en faire un test de pertinence. Proposer éventuellement des éléments non pris en compte dans le modèle susceptibles de brider la divergence (frottements, non linéarités, etc…).

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Calcul numérique	
Calcul numérique d'une expression.	Calculer sans outil l'ordre de grandeur (puissance de dix) d'une expression simple. Afficher un résultat numérique avec un nombre de chiffres significatifs cohérent avec les données et une unité correcte dans le cas d'un résultat dimensionné. Commenter un résultat numérique (justification d'une approximation, comparaisons à des valeurs de référence bien choisies, etc.). En faire un test de pertinence.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Outils de communication	
Tableaux de données numériques simples.	Transformer un tableau de données numériques en représentation graphique. Renseigner correctement les axes.
Exploitation d'une représentation graphique.	Repérer les comportements intéressants dans le contexte donné : monotonie, extrema, branches infinies, signes. Interpréter le caractère localement rectiligne selon qu'on travaille en échelles linéaire, semi-logarithmique ou log-log.

Schémas et figures.	Transposer un texte en une figure schématisant les éléments essentiels. Élaborer une courte synthèse à partir de plusieurs éléments graphiques : tableaux, schémas, courbes...

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Analyse dimensionnelle	
Dimension d'une expression.	Déterminer la dimension d'une expression, notamment par référence à des expressions connues.
Recherche d'une expression de type monôme par analyse dimensionnelle.	Déterminer les exposants d'une expression de type monôme $E=A^{\alpha}B^{\beta}C^{\chi}$ par analyse dimensionnelle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5. Analyse d'ordre de grandeur	
Comparaison en ordre de grandeur des différents termes d'une équation différentielle ou d'une équation aux dérivées partielles.	À partir d'une mise en évidence des échelles pertinentes d'un problème, évaluer et comparer l'ordre de grandeur des différents termes d'une équation afin de la simplifier en conséquence.