Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Direction générale pour l'enseignement supérieur et l'insertion professionnelle

Service de la stratégie de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle

Département de l'architecture et de la qualité des formations de niveau licence

NOTE DE PRÉSENTATION

Les présents arrêtés, au nombre de huit, vous sont soumis pour visa avant présentation devant les instances consultatives.

Ils s'inscrivent dans la seconde phase du chantier de rénovation des programmes des classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE) de la filière scientifique, phase consacrée aux programmes de seconde année.

Cependant, l'écriture des nouveaux programmes de seconde année d'informatique et de langues vivantes étrangères, ainsi que de sciences industrielles de l'ingénieur (SII), pour les voies MP, PC, PT, PSI et TSI, ayant pu être menée à bien en même temps que celle des programmes de première année, cette seconde phase ne concerne plus, en fait, que les programmes de mathématiques, de physique et de chimie pour les voies MP, PC, PT, PSI, TPC et TSI, et que ceux de mathématiques, de physique, de chimie et de sciences de la vie et de la terre (SVT) pour les voies BCPST et TB (pour cette dernière voie, un enseignement de biotechnologies étant, en outre, adjoint à celui de SVT). On notera que, pour des raisons de cohérence scientifique, les programmes des deux années de SVT, pour la voie BCPST, et de SVT et biotechnologies, pour la voie TB, n'ont pas été scindés et font l'objet d'une publication globale, la présente version des programmes de première année annulant et remplaçant, sans la modifier, celle publiée dans les arrêtés du 4 avril 2013.

Ces programmes de seconde année ont été élaborés selon les mêmes principes et les mêmes modalités que les programmes de la filière scientifique publiés au printemps dernier. Du 20 mai au 30 juin 2013, ils ont fait l'objet d'une consultation publique en ligne, sur le site du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche. Les 233 commentaires recueillis ont donné lieu à des corrections et ajustements.

Ces programmes entrent en vigueur à la rentrée 2013 pour ceux qui concernent la première année de CPGE, et à la rentrée 2014 pour ceux qui concernent la seconde année.

Les présents arrêtés n'affectent en rien les volumes horaires des enseignements concernés.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche

Arrêté du 2013

relatif aux programmes de mathématiques et de physique-chimie de la classe préparatoire scientifique mathématiques et physique (MP)

NOR ESRS A

Le ministre de l'éducation nationale et la ministre de l'enseignement supérieur et de la recherche,

Vu le code de l'éducation, et notamment ses articles D. 612-19 à D. 612-29 ;
Vu l'arrêté du 10 février 1995 modifié, définissant la nature des classes composant les classes préparatoires scientifiques aux grandes écoles ;
Vu l'arrêté du 20 juin 1996 modifié, définissant les objectifs de formation et le programme des classes préparatoires de seconde année de mathématiques et physique (MP) et de mathématiques et physique* (MP*) ;
Vu l'avis du ministre de la défense en date du 2013 ;
Vu l'avis du Conseil national de l'enseignement supérieur et de la recherche en date du 2013 ;
Vu l'avis du Conseil supérieur de l'éducation en date du 2013,

Arrêtent :

Article 1er

Les programmes de seconde année de mathématiques, de physique et de chimie de la classe préparatoire scientifique mathématiques et physique (MP), figurant respectivement aux annexes 1, 2 et 3 de l'arrêté du 20 juin 1996 modifié susvisé, sont remplacés par ceux figurant respectivement aux annexes 1 et 2 du présent arrêté.

Article 2

Les programmes du présent arrêté entrent en vigueur à compter de la rentrée universitaire 2014.

Article 3

Le directeur général de l'enseignement scolaire et la directrice générale pour l'enseignement supérieur et l'insertion professionnelle sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au *Journal officiel* de la République française.

Fait le 2013

Pour le ministre de l'éducation nationale et par délégation :
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
J.-P. DELAHAYE

Pour la ministre de l'enseignement supérieur et de la recherche et par délégation :
Par empêchement de la directrice générale pour l'enseignement supérieur et l'insertion professionnelle,
J.- M. JOLION

NB : Le présent arrêté et ses annexes seront consultables au *Bulletin officiel* du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche et au *Bulletin officiel* du ministère de l'éducation nationale du mis en ligne sur les sites www.enseignementsup-recherche.gouv.fr et www.education.gouv.fr

ANNEXE 1

Classe préparatoire MP
Projet de programme de mathématiques

Table des matières

Objectifs de formation **2**
- Description et prise en compte des compétences . . . 2
- Unité de la formation scientifique . . . 3
- Architecture et contenu du programme . . . 4
- Organisation du texte . . . 4
- Usage de la liberté pédagogique . . . 5

Programme **6**
- Structures algébriques usuelles . . . 6
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées . . . 7
- Fonctions convexes . . . 10
- Topologie des espaces vectoriels normés . . . 10
- Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens . . . 13
- Séries et familles sommables . . . 14
  - A - Séries numériques et vectorielles . . . 14
  - B - Familles sommables de nombres complexes . . . 15
- Suites et séries de fonctions, séries entières . . . 16
  - A - Suites et séries de fonctions . . . 16
  - B - Séries entières . . . 18
- Fonctions vectorielles, arcs paramétrés . . . 19
- Intégration sur un intervalle quelconque . . . 20
- Variables aléatoires discrètes . . . 23
- Équations différentielles linéaires . . . 26
- Calcul différentiel . . . 28

Le programme de mathématiques de MP, dans le prolongement de celui de MPSI, s'inscrit entre deux continuités : en amont avec les programmes rénovés du lycée, en aval avec les enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études universitaires. Il est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, et aussi pour leur permettre de se former tout au long de la vie.
Ce programme permet de conjuguer deux aspects de l'activité mathématique : d'une part la construction d'objets souvent introduits de manière intrinsèque et l'importance de la démonstration ; d'autre part la technique qui permet de rendre ces objets opérationnels.

Objectifs de formation

La formation mathématique en classe préparatoire scientifique vise deux objectifs :
- l'acquisition d'un solide bagage de connaissances et de méthodes permettant notamment de passer de la perception intuitive de certaines notions à leur appropriation, afin de pouvoir les utiliser à un niveau supérieur, en mathématiques et dans les autres disciplines. Ce degré d'appropriation suppose la maîtrise du cours, c'est-à-dire des définitions, énoncés et démonstrations des théorèmes figurant au programme ;
- le développement de compétences utiles aux scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs ou enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour les résoudre, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.

Pour répondre à cette double exigence, et en continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires définissent un corpus de connaissances et de capacités, et explicitent six grandes compétences qu'une activité mathématique permet de développer :
- **s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer à l'écrit et à l'oral** : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

S'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, le calcul différentiel et la théorie des équations différentielles linéaires apparaissent comme un champ d'utilisation des concepts développés en algèbre ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste, les familles sommables, et illustrent certains résultats d'analyse.
Percevoir la globalité et la complexité du monde réel exige le croisement des regards disciplinaires. Ainsi, les mathématiques interagissent avec des champs de connaissances partagés par d'autres disciplines. Aussi le programme valorise-t-il l'interprétation des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure de grandeurs, incertitudes...).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec les autres disciplines.
Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle. Certaines notions de géométrie affine et euclidienne étudiées au lycée ou en MPSI sont reprises dans un cadre plus général.

Le programme d'algèbre comprend trois volets. Le premier formalise les différentes structures algébriques rencontrées dans le programme et introduit l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme exemple de structure quotient. Le deuxième prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en MPSI et aboutit à une théorie de la réduction qui allie le registre des éléments propres et celui des polynômes annulateurs. Le troisième, consacré à l'algèbre préhilbertienne, conduit, en dimension infinie, à l'étude des familles orthonormales totales et en dimension finie au théorème spectral et aux isométries vectorielles, mettant l'accent sur les relations entre les points de vue vectoriel, matriciel et géométrique.

Le programme d'analyse comporte un chapitre sur les fonctions convexes d'une variable réelle qui permet de faire le lien avec la géométrie. La topologie est étudiée dans le cadre général des espaces vectoriels normés. Son étude permet d'étendre les notions de suite, limite, continuité étudiées en première année dans le cadre de la droite réelle, et d'introduire les concepts de compacité et de connexité par arcs.
Le chapitre sur les séries complète l'étude des séries numériques abordée en MPSI et la prolonge par celles des séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie et des familles sommables. L'extension de la notion de série convergente à celle de famille sommable est réduite au minimum nécessaire à une présentation rigoureuse des espaces probabilisés dénombrables et des variables aléatoires discrètes.
Le chapitre sur les séries entières permet de construire des fonctions de variable complexe et de fournir un outil pour la résolution d'équations différentielles linéaires.
La définition des différents modes de convergence d'une suite de fonctions bénéficie du cadre topologique introduit dans le chapitre « Espaces vectoriels normés ». L'étude des suites et séries de fonctions conduit aux théorèmes de régularité de leur limite ou somme et aboutit à l'énoncé de deux théorèmes d'approximation.
La généralisation aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie des résultats d'analyse réelle étudiés en première année fournit, avec une étude modeste des arcs paramétrés, une nouvelle occasion de relier les registres analytique et géométrique.
L'étude de l'intégration, entamée en première année dans le cadre des fonctions continues sur un segment, se poursuit dans celui des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque. L'intégrale généralisée est un intermédiaire à l'introduction de la notion de fonction intégrable. L'intégration des relations de comparaison dans le cas des fonctions positives permet de faire le lien avec les théorèmes similaires étudiés sur les séries. Les théorèmes classiques sur l'intégration des suites et séries de fonctions et sur les intégrales à paramètre concluent ce chapitre.
Le chapitre relatif au calcul différentiel a pour cadre les espaces vectoriels normés de dimension finie. La différentielle en un point est définie de manière intrinsèque afin d'établir un lien avec l'algèbre linéaire. Les notions de dérivée selon un vecteur ou le long d'un arc, de gradient, de vecteurs tangents à une partie constituent une première approche de la géométrie différentielle. Parallèlement à cette vision algébrique et géométrique, ce chapitre fournit aussi des outils opérationnels pour la résolution de problèmes pouvant être issus d'autres disciplines scientifiques (recherche d'extremums, équations aux dérivées partielles). Il concourt au développement de la compétence « Représenter » en proposant des interprétations et visualisations géométriques.
L'étude des équations et des systèmes différentiels est limitée au cas linéaire, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. L'utilisation dans ce cadre du théorème de Cauchy permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'origine analytique. Le cas particulier où les coefficients sont constants permet d'utiliser l'exponentielle d'endomorphisme et de mettre en œuvre des techniques de réduction matricielle.

L'enseignement des probabilités présente brièvement le formalisme de Kolmogorov qui sera repris dans le cursus ultérieur des étudiants. Son objectif majeur est l'étude des variables aléatoires discrètes, en prolongement des variables finies étudiées en première année, ce qui permet d'élargir aux processus stochastiques à temps discret le champ des situations réelles se prêtant à une modélisation probabiliste.
La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants. L'inégalité qui la sous-tend précise la vitesse de convergence de cette approximation et valide l'interprétation de la variance comme indicateur de dispersion.
Ce chapitre a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à

respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.
Le programme est décliné en chapitres. Chaque chapitre comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes.
En particulier, l'ordre de présentation des différents chapitres ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :
- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents chapitres ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.
Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les autres disciplines scientifiques.
Les liens avec les disciplines scientifiques et technologiques sont identifiés par le symbole ⇆ PC pour la physique et la chimie, ⇆ SI pour les sciences industrielles de l'ingénieur et ⇆ I pour l'informatique.

Usage de la liberté pédagogique

Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :
- pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est en effet d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Quel que soit le contexte (cours, travaux dirigés), la pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants.
- didacticien, il choisit le contexte favorable à l'acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective d'une problématique avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, mais aussi des questions d'actualité ou des débats d'idées, permet de motiver son enseignement.

Programme

Structures algébriques usuelles

L'étude des structures algébriques permet d'approfondir plusieurs points abordés en première année : arithmétique de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$, congruences, algèbre linéaire, groupe symétrique, groupes issus de l'algèbre linéaire et de la géométrie des espaces euclidiens. Ce chapitre gagne à être illustré par de nombreux exemples.
Le paragraphe relatif aux polynômes permet de revenir sur l'étude menée en première année, dans un cadre étendu et dans un esprit plus algébrique, mettant l'accent sur la notion d'idéal.
Sans soulever de difficulté, on signalera que les notions d'algèbre linéaire étudiées en MPSI s'étendent au cas où le corps de base est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Groupes et sous-groupes	
Groupe. Produit fini de groupes. Sous-groupe. Caractérisation. Intersection de sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$.	Exemples issus de l'algèbre et de la géométrie.
b) Morphismes de groupes	
Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme. Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité d'un morphisme. Isomorphisme de groupes. Réciproque d'un isomorphisme.	Exemples : signature, déterminant. Exemple : groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien.
c) Groupes monogènes et cycliques	
Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Groupe monogène, groupe cyclique. Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.	Groupe des racines n-ièmes de l'unité.
d) Ordre d'un élément dans un groupe	
Élément d'ordre fini d'un groupe, ordre d'un tel élément.	Si x est d'ordre fini, l'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x.
Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G, alors, pour n dans $\mathbb{Z}$, on a $x^n = e \iff d \mid n$.	
L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.	La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.
e) Anneaux	
Anneau. Produit fini d'anneaux.	Les anneaux sont unitaires.
Sous-anneaux. Morphisme d'anneaux. Image et noyau d'un morphisme. Isomorphisme d'anneaux.	
Anneau intègre. Corps. Sous-corps.	Les corps sont commutatifs.
f) Idéaux d'un anneau commutatif	
Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.	
Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre.	Interprétation de la divisibilité en termes d'idéaux.
Idéaux de $\mathbb{Z}$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
g) L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.
Théorème chinois : si m et n sont deux entiers premiers entre eux, isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	Application aux systèmes de congruences.
Indicatrice d'Euler φ. Calcul de $\varphi(n)$ à l'aide de la décomposition de n en facteurs premiers.	⇆ I : calcul de $\varphi(n)$ à l'aide d'une méthode de crible.
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat étudié en première année. ⇆ I : codage RSA.
h) Anneaux de polynômes à une indéterminée	
Dans ce paragraphe, K est un sous-corps de $\mathbb{C}$.	
Idéaux de $K[X]$.	
PGCD de deux polynômes.	Par convention, le PGCD est unitaire. Extension au cas d'une famille finie.
Relation de Bézout. Lemme de Gauss.	⇆ I : algorithme d'Euclide étendu sur les polynômes, recherche simultanée du PGCD et des coefficients de Bézout.
Irréductible de $K[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles.	Les étudiants doivent connaître les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. L'étude des polynômes sur un corps fini est hors programme.
i) Algèbres	
Algèbre.	Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$.
Sous-algèbre.	
Morphisme d'algèbres.	

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en classe de MPSI et trouve des applications dans d'autres domaines du programme.

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont de deux types, qu'il convient de souligner : les premières, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les secondes, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

On se limite en pratique au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Matrices semblables, interprétation géométrique.	Les étudiants doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace F par un endomorphisme u à l'aide de la matrice de u dans une base adaptée à F.

Contenus	Capacités & Commentaires

b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.	⥃ SI : matrice d'inductance : inductance cyclique et inductance homopolaire.
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.	La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe. Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n. Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.

c) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_u, χ_A. Les étudiants doivent connaître les valeurs des coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.	La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.

d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E. Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.	Cas des projecteurs, des symétries.
Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.	Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.	Traduction matricielle.
Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.

e) Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.	Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.	La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas $n = 2$ et à des cas particuliers simples pour $n = 3$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres. $\leftrightarrows$ I : recherche de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux itérées successives.

f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	

g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Pour u dans $\mathscr{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$.	Pour M dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de M, sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire.
Si d est le degré du polynôme minimal, alors la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda\, x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\, x$.
Théorème de Cayley-Hamilton.	Démonstration non exigible.

h) Lemme de décomposition des noyaux

Si $P_1, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors :

$$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_i(u)).$$

i) Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.	Traduction matricielle.

j) Endomorphismes à polynôme minimal scindé

S'il existe un polynôme scindé annulant u, décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.	Traduction matricielle. La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont hors programme.

Fonctions convexes

L'objectif de ce chapitre est double :
- *introduire brièvement la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel ;*
- *étudier les fonctions convexes d'une variable réelle.*

Le cours gagne à être illustré par de nombreuses figures.
La notion de barycentre est introduite exclusivement en vue de l'étude de la convexité.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Parties convexes d'un espace vectoriel réel	
Barycentre. Partie convexe. Caractérisation à l'aide de barycentres à coefficients positifs.	⇆ PC et SI : centre de masse (ou centre de gravité).
b) Fonctions convexes d'une variable réelle	
Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tout (x, y) de I^2 et tout λ de $[0,1]$: $$f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$	Les étudiants doivent connaître l'inégalité $$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$ où $x_1,\dots,x_n$ sont des points de I et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels positifs de somme 1.
Caractérisations : convexité de l'épigraphe, inégalité des pentes. Fonction concave.	Position relative du graphe et de ses cordes.
c) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables sur I, des fonctions convexes deux fois dérivables sur I. Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.	Exemples d'inégalités de convexité.

Topologie des espaces vectoriels normés

Ce chapitre prolonge les notions de limites de suites et de fonctions étudiées en première année, et introduit la topologie des espaces vectoriels normés. Son objectif est triple :
- *introduire, dans le cadre des espaces vectoriels normés, le vocabulaire de la topologie ;*
- *introduire la notion de compacité dans un espace vectoriel normé ;*
- *donner, à travers l'étude des espaces vectoriels normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, équations différentielles linéaires, suites et séries de fonctions).*

Il convient de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment à l'aide de nombreuses figures.
Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme.
Les notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach sont hors programme.
Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules. Parties, suites, fonctions bornées. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Normes $\| \|_1$, $\| \|_2$, $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. Produit fini d'espaces vectoriels normés.	

b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

c) Comparaison des normes

Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des étudiants.

d) Topologie d'un espace normé

Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie. Voisinage d'un point.	Une boule ouverte est un ouvert.
Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie. Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées.
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif.	Caractérisation séquentielle des fermés de A.

e) Étude locale d'une application, continuité

Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.	
Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues. Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Les étudiants doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Contenus	Capacités & Commentaires
Applications uniformément continues, applications lipschitziennes. Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ tel que : $$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|.$$	Exemple : l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie de E. Notation $\mathscr{L}_c(E, F)$. La notion de norme subordonnée est hors programme.

f) Parties compactes d'un espace normé

Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Une partie fermée d'une partie compacte est compacte. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Produit d'une famille finie de compacts.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.

g) Applications continues sur une partie compacte

Image d'une partie compacte par une application continue. Théorème de Heine.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.

h) Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé

Chemin continu joignant deux points.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs.
Parties connexes par arcs.	Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs. Cas des parties convexes, des parties étoilées.
Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

i) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.	Démonstration non exigible.
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.	Les étudiants doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence. Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé. Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.	
Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.	Exemple : déterminant.

Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens

L'objectif de ce chapitre est triple :

- *consolider les acquis de MPSI concernant les espaces préhilbertiens réels et euclidiens ;*
- *introduire la notion de suite orthonormale totale de vecteurs d'un espace préhilbertien, notamment afin de donner un exemple important de convergence dans un espace normé ;*
- *à travers l'étude des endomorphismes symétriques et orthogonaux, approfondir simultanément les connaissances de MPSI relatives aux isométries et celles de MP relatives à la réduction des endomorphismes.*

Les espaces préhilbertiens considérés dans ce chapitre sont réels. Toute notion sur les espaces préhilbertiens complexes est hors programme.
La notion de forme quadratique est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Caractérisation métrique du projeté orthogonal. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale. Inégalité de Bessel.	⇆ PC : polariseur, loi de Malus.
b) Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel	
Suite totale. Si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien E, et si, pour tout n de $\mathbb{N}$, p_n désigne le projecteur orthogonal de E sur Vect $(e_0,\dots,e_n)$, alors, pour tout x de E, $\big(p_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.	Exemples de suites de polynômes orthogonaux. ⇆ I : calcul explicite des polynômes d'une telle suite ; application à l'approximation des fonctions.
c) Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien	
Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.	Lien avec les matrices symétriques réelles. La notion d'adjoint d'un endomorphisme est hors programme.
Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs symétriques. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Théorème spectral : si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; de manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant u.	Interprétation matricielle de ce résultat. La notion d'endomorphisme symétrique positif (resp. défini positif) est hors programme. ⇆ SI : matrice d'inductance, matrice d'inertie.
d) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle d'un espace euclidien.	Autre dénomination : automorphisme orthogonal. Lien avec les matrices orthogonales.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale.	Interprétation dans le registre matriciel.
Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». ⇆ SI : liaisons entre solides.

Séries et familles sommables

L'objectif de cette partie est triple :
- *consolider les acquis de MPSI relatifs aux séries numériques ;*
- *étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie, en particulier aux espaces de matrices ;*
- *introduire brièvement, exclusivement en vue du cours de probabilités, la notion de famille sommable de nombres complexes.*

Les séries sont avant tout un outil. L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

A - Séries numériques et vectorielles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ ont même nature.
Série absolument convergente.	Cas des séries matricielles.
Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
b) Compléments sur les séries numériques	
Règle de d'Alembert.	Introduite principalement en vue de l'étude des séries entières.
Critère des séries alternées. Signe et encadrement des restes.	L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. La transformation d'Abel est hors programme. L'étude de la sommation par tranches dans le cas semi-convergent est hors programme.
Comparaison série-intégrale : Si f est une fonction continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$ converge.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas où f est monotone. Interprétation géométrique.
Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	La suite de référence est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ à partir d'un certain rang. Cas des séries convergentes, des séries divergentes.

B - Familles sommables de nombres complexes

La notion de famille sommable est introduite en vue de l'étude des probabilités.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles dénombrables, au plus dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble est dit au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est fini ou dénombrable.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable. Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.	Démonstrations non exigibles.
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	Démonstration non exigible.
b) Familles sommables	
Famille sommable de réels positifs indexée par un ensemble dénombrable. Somme.	La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si l'ensemble des sommes $\sum\limits_{i\in F} u_i$ où F décrit l'ensemble des parties finies de I est majoré ; dans ce cas, la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est la borne supérieure de l'ensemble précédent. Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, sa somme est $+\infty$. Dans tous les cas, la somme est notée $\sum\limits_{i\in I} u_i$.
Théorème de sommation par paquets : si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I, alors, pour toute famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$: $$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right).$$	Démonstration hors programme.
Famille sommable de nombres complexes indexée par un ensemble au plus dénombrable	La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si la famille $(\lvert u_i\rvert)_{i\in I}$ l'est.
Somme d'une telle famille.	Pour une famille de réels, on se ramène à ses parties positive et négative.
Lorsque $I=\mathbb{N}$, lien avec la convergence absolue de la série $\sum u_n$.	
Invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation de l'ensemble des indices.	Démonstration non exigible.
Linéarité de la somme.	
Théorème de sommation par paquets.	Démonstration hors programme. On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille $(\lvert u_i\rvert)_{i\in I}$.
c) Applications des familles sommables	
La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est sommable si et seulement si pour tout n, la série $\sum a_{m,n}$ converge et la série $\sum\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge. Si tel est le cas $$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right).$$	

Contenus	Capacités & Commentaires
Si la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est sommable, alors : $$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}.$$	On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant l'énoncé précédent à la famille $(\lvert a_{m,n}\rvert)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	

Suites et séries de fonctions, séries entières

A - Suites et séries de fonctions

L'objectif de ce chapitre est triple :

- *définir les différents modes de convergence des suites et séries de fonctions ;*
- *étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite ;*
- *énoncer deux théorèmes d'approximation uniforme choisis pour leur intérêt intrinsèque, les applications qu'ils offrent et l'interprétation qu'ils permettent en termes de densité.*

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut commencer par traiter le programme dans ce cadre et expliquer brièvement l'extension au cas général.

Dans ce chapitre, les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple sur A.	
Convergence uniforme sur A. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation de la convergence uniforme sur A en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur un voisinage de a, alors u est continue en a.	
Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme au voisinage de tout point de A.
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $$u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$	Démonstration non exigible. Adaptation, si $A\subset\mathbb{R}$, aux cas où $a=+\infty$ et $a=-\infty$.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans I, soit : $$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$ Alors $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers u sur le segment S, alors : $$\int_S u_n \to \int_S u.$$
d) Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur I vers une fonction notée u, et si $(u'_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction notée v, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u' = v$.	Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})_{n\geqslant 0}$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(u_n^{(k)})_{n\geqslant 0}$ sur tout segment de I.
e) Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme.	Ces notions sont définies via la suite des sommes partielles.
Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Adaptation au cas des séries de fonctions des résultats des paragraphes b), c) et d) ci-dessus.	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.	Les étudiants doivent savoir étudier la somme d'une série de fonctions (régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale).
e) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.	
Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales.	Démonstration non exigible.

B - Séries entières

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :
- *étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme ;*
- *introduire la notion de développement d'une fonction en série entière ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Série entière. Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence d'une série entière.	Disque ouvert de convergence ; intervalle ouvert de convergence.
La convergence est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R ; la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout z tel que $\lvert z\rvert > R$. Si $a_n = O(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence. Règle de d'Alembert : rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ lorsque $\left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert$ admet une limite dans $[0, +\infty]$.	
Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence. Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
b) Série entière d'une variable réelle	
Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence. La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.	
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.	Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout n, $a_n = b_n$.
c) Fonctions développables en série entière, développements usuels	
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$. Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C},\ \lvert z\rvert < 1\}$. Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$. Série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $]-r, r[$.	
Développements de fonctions de variable réelle.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

Ce chapitre poursuit trois objectifs :
- *étendre le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles ;*
- *préciser les notions de tangente et de vitesse instantanée ;*
- *fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel.*

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Dérivabilité en un point	
Dérivabilité en un point.	Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. ⇆ PC : vitesse instantanée. Traduction par les coordonnées dans une base de E.
Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point.	
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L\circ f$, où L est linéaire. Dérivabilité et dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire.	
Cas du produit scalaire.	⇆ PC : dérivée de la densité volumique de l'énergie électromagnétique.
Dérivabilité et dérivée de $f\circ\varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle.	
Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$.	⇆ PC et SI : vecteur accélération.
c) Intégration sur un segment	
Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E.	Définie par les intégrales des coordonnées dans une base. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. ⇆ PC et SI : intégration d'un champ de vecteurs en mécanique et électromagnétisme.
Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Inégalité $\left\lVert \int_a^b f \right\rVert \leqslant \int_a^b \lVert f\rVert$.	
Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	Extension de l'énoncé relatif aux fonctions numériques étudié en MPSI.
e) Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue.	Ce paragraphe fournit l'occasion de revoir les résultats correspondants pour les fonctions numériques et les techniques de calcul de primitives.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
f) Formules de Taylor	
Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	Les étudiants doivent connaître la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).

Contenus	Capacités & Commentaires
g) Arcs paramétrés	
Arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans E. Paramètre régulier. Exemples simples d'arcs paramétrés plans.	Interprétation géométrique de la dérivée : tangente en un point associé à un paramètre régulier. Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier. L'étude des points stationnaires, des courbes asymptotes et des arcs définis par une équation polaire est hors programme. La pratique du tracé des arcs paramétrés n'est pas un objectif du programme. ⇆ I : réalisation de tracés à l'aide de l'outil informatique.

Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des réels ou des complexes.

L'objectif de ce chapitre est double :

- *définir, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, la notion d'intégrabilité sur un intervalle non compact ;*
- *compléter l'étude des séries de fonctions par celle des intégrales à paramètre.*

La technicité n'est pas un but en soi. On privilégie donc les exemples significatifs (par exemple intégrales eulériennes ou transformées intégrales).

Le programme ne contient aucune forme du théorème de Fubini, qui pourra être admis pour traiter un exercice ou un problème nécessitant son utilisation.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty} f$ cette limite. Linéarité de l'intégrale sur $[a,+\infty[$, positivité. Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si $\int_a^{+\infty} \lvert f\rvert$ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ », et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».
Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
c) Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Si f est positive sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée. Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1,+\infty[$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Pour f et g deux fonctions réelles positives continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: – si $0 \leqslant f \leqslant g$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; – si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; – si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.	

d) Intégration sur un intervalle quelconque

Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,b[$ », et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ».
Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a,b]$, de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{\|x-a\|^\alpha}$ sur $[b,a[$.	
Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, linéarité et positivité de l'application $f \mapsto \int_I f$ sur l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge. Relation de Chasles. Espace des fonctions intégrables de I dans E. Inégalité triangulaire. Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.	Notation $\int_I f$.
Intégration par parties sur un intervalle quelconque.	L'existence de deux des trois termes apparaissant dans la formule justifie le calcul. Notation $[F]_a^b$.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. Les étudiants peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable simples (fonctions affines, puissances, exponentielle, logarithme).

e) Intégration des relations de comparaison

Intégration des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est positive.

f) Passage à la limite sous l'intégrale

Théorème de convergence dominée : soit $(f_n)_{n\geqslant1}$ une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction g intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant : $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \|f_n\| \leqslant g.$$ Alors : $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$	L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination. La démonstration est hors programme. Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème d'intégration terme à terme : soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions continues par morceaux intégrables de I dans $\mathbb{K}$ telle que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I, ait une somme continue par morceaux et que : $$\sum \int_I \lvert f_n\rvert < +\infty.$$ Alors : $$\int_I \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I f_n.$$	L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I \lvert f_n\rvert$. En pratique, on commence par un calcul formel que l'on justifie ensuite. La démonstration est hors programme.

g) Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde. On suppose également qu'il existe une fonction φ intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x,.)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$ est définie et continue sur A.	L'hypothèse de continuité par morceaux, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination. Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite au voisinage d'un point a de A. Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de A. ⇆ SI : transformée de Laplace.

h) Dérivation d'une intégrale à paramètre

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable, que, pour tout x de J, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I, que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde. On suppose également qu'il existe une fonction φ intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout x de J, $\lvert \frac{\partial f}{\partial x}(x,.)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t$$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et vérifie : $$\forall x \in J, \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$	Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de J. Classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse d'intégrabilité de $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,.)$ pour tout x de J si $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et domination sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,.)$.
Exemples d'étude de fonctions définies comme intégrales : régularité, étude asymptotique.	⇆ PC : transformée de Fourier. ⇆ SI : théorème de la valeur initiale, théorème de la valeur finale.

Variables aléatoires discrètes

Ce chapitre, dont l'objectif est d'aborder l'étude des variables aléatoires discrètes, généralise celle qui a été effectuée en première année et fournit des outils permettant d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place de ces outils nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités. Ces dernières font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- *la notion de tribu n'appelle aucun développement théorique ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;*
- *les diverses notions de convergence des suites de variables aléatoires (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.*

Les résultats vus en première année s'étendent de manière très naturelle au cas des variables aléatoires discrètes. Cette extension doit être effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour des activités pratiques.
La notion de variable à densité est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces probabilisés	
Tribu sur un ensemble Ω.	On se borne à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année. Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.
Si $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω, une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application P définie sur $\mathcal{T}$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait : $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
Si Ω est au plus dénombrable et si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{T})$ s'identifie, via la formule : $$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$ à une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ sommable de somme 1.	
b) Propriétés élémentaires des probabilités	
Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors : $$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$	
Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors : $$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$	
Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements, alors : $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	

Contenus	Capacités & Commentaires
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.	Propriétés presque sûres. Tout développement sur ces notions est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles et indépendance

Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes. Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants.	Notations $P_B(A), P(A\|B)$.

d) Variables aléatoires discrètes

Étant donnés un ensemble E et un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$, une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que, pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{T}$.	Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.
Loi P_X de la variable aléatoire X.	Notations $X \sim Y, X \sim \mathscr{L}$. Notations $(X \geqslant x), (X \leqslant x), (X < x), (X > x)$ pour une variable aléatoire réelle X.

e) Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	
Loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.	Extension au conditionnement par $X > x$ ou autres inégalités.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires. Vecteurs aléatoires discrets.	
Couple de variables aléatoires indépendantes.	Extension des résultats vus en première année.
Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.	
Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f et g, les variables $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.	Démonstration non exigible.
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	La démonstration est hors programme. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.

f) Lois usuelles

Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p. La variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{G}(p)$ si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1}p.$$	Notation $\mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p.
Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k).$$	
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ.	Notation $\mathscr{P}(\lambda)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers λ, alors : $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	$\leftrightarrows$ I : simulation de cette approximation. Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

g) Espérance

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, l'espérance de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(P(X = x)\ x)_{x\in X(\Omega)}$.	Notation $\mathrm{E}(X)$. $\leftrightarrows$ PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.
Si X est une variable aléatoire réelle, la variable aléatoire X est dite d'espérance finie si la famille $(x\,P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X.	Notation $\mathrm{E}(X)$. Variables centrées.
Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.	
Linéarité, positivité et croissance de l'espérance sur l'espace des variables aléatoires d'espérance finie définies sur Ω.	Si $\lvert X\rvert \leqslant Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.
Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(P(X = x)\ f(x)\big)$ est sommable ; si tel est le cas : $$E\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X = x).$$	Démonstration non exigible.
Inégalité de Markov.	
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances finies, alors : $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	

h) Variance, écart type et covariance

Moments.	
Si une variable aléatoire admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$.	
Espace des variables aléatoires définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2.	
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites. $\leftrightarrows$ PC : écart quadratique énergétique.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable aléatoire géométrique, d'une variable aléatoire de Poisson.	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Covariance de deux variables aléatoires.	
Relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes.	
Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.	

Contenus	Capacités & Commentaires
i) Loi faible des grands nombres	
Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$, on a, $$P\left(\left\|\frac{S_n}{n} - m\right\| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$	Les étudiants doivent savoir retrouver, pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité : $$P\left(\left\|\frac{S_n}{n} - m\right\| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$ où σ est la variance commune des X_k. ⇆ I : simulation d'une suite de tirages.
j) Fonctions génératrices	
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\, t^k.$$	La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X.
Détermination de la loi de X par G_X. Utilisation de G_X pour calculer les moments de X. La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = G_X{}'(1)$. La variable aléatoire X admet un second moment si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.	Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de la variance de X à l'aide de $G_X{}'(1)$ et $G_X{}''(1)$. Les étudiants doivent savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	

Équations différentielles linéaires

La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1*, équation scalaire homogène d'ordre* 2 *à coefficients constants.*

La résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limitera en conséquence la technicité des exercices d'application. On pourra en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2*, représenter certaines des courbes intégrales.*

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)(x) + b(t)$$ où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.	Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires $X' = A'(t)X + B(t)$. Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition.
Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration non exigible. $\leftrightarrows$ I : méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée.
Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	
Exemples d'équations scalaires d'ordre 1 (resp. 2) non résolues en y' (resp. y'') : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ (resp. $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$).	Les étudiants doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.
c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe.	Notations $\exp(a), \mathrm{e}^a, \exp(A), \mathrm{e}^A$. $\leftrightarrows$ I : calcul de l'exponentielle d'une matrice.
Continuité de l'exponentielle.	
Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent.	Démonstration non exigible.
Dérivation, si a est un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, de l'application $t \mapsto \exp(ta)$.	Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$ si A est une matrice carrée réelle ou complexe.
d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n \leqslant 3$.
e) Méthode de variation des constantes	
Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus.	Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.
Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.	Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.
f) Équations différentielles scalaires du second ordre	
Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.	
Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2.	Définition et calcul. Cas d'une équation $x'' + q(t)x = 0$.

Calcul différentiel

L'objectif de ce chapitre est de présenter les premières notions de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Ce chapitre fait intervenir à la fois des aspects intrinsèques et calculatoires, permettant ainsi de développer la compétence « Représenter ».

La différentielle d'une application en un point est introduite à l'aide d'un développement limité. De nombreuses questions se ramènent, via la paramétrisation de chemins, à des énoncés relatifs aux fonctions d'une variable réelle. En particulier, les dérivées partielles fournissent un outil de calcul dans le cas où l'espace de départ est muni d'une base.

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	
Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.	Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles dans une base.	Notations $\mathrm{D}_i f(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, l'identification entre $f(x)$ et $f(x_1,\dots,x_n)$ est autorisée.
b) Différentielle	
Application différentiable au point a. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.
Différentielle de f en a, encore appelée application linéaire tangente à f en a. Relation $\mathrm{d}f(a)\cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$.	Notations $\mathrm{d}f(a)$, $\mathrm{d}f(a)\cdot v$.
Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω. Cas particuliers : application constante, restriction à un ouvert d'une application linéaire. Lien entre différentielle et dérivées partielles. Matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans un couple de bases. Matrice jacobienne d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot 1$.	Notation $\mathrm{d}f$.
c) Opérations sur les applications différentiables	
Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $B(f,g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.	On utilise l'existence d'un réel positif C tel que, pour tout (u,v), on ait $\|B(u,v)\| \leqslant C\|u\|\,\|v\|$. Tout développement sur les applications bilinéaires continues est hors programme.
Différentielle d'une composée d'applications différentiables.	
Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.	Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + th$. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$.
Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	Règle de la chaîne : calcul des dérivées partielles de $(u_1,\dots,u_m) \mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m))$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Cas des applications numériques	
Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée.	Le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien est établi à ce stade. Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.
Point critique d'une application différentiable. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Exemples de recherche d'extremums globaux.	
e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie	
Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeurs dans X, tels que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.	
Cas où $E = \mathbb{R}^3$ et où X est le graphe d'une fonction f différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.	Plan affine tangent à une surface d'équation $z = f(x, y)$: équation cartésienne.
Si f est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert de l'espace euclidien E, si X est une ligne de niveau de f, alors les vecteurs tangents à X au point x de X sont orthogonaux au gradient de f en x.	Le théorème des fonctions implicites est hors programme. ⇆ PC : électrostatique.
f) Applications de classe $\mathscr{C}^1$	
Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.	
L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.	Démonstration non exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$.	
Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, alors : $$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$	⇆ PC : circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel.
Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.	Démonstration pour Ω convexe.
g) Applications de classe $\mathscr{C}^k$	
Dérivées partielles d'ordre k.	
Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.	La notion de différentielle seconde est hors programme. ⇆ PC : laplacien.
Théorème de Schwarz.	Démonstration non exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^k$.	Démonstrations non exigibles.

Contenus	Capacités & Commentaires
Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.	Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires. L'utilisation de tout autre changement de variables suppose une indication. La notion de difféomorphisme étant hors programme, l'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas un attendu. ⇆ PC : équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

ANNEXE 2

Programme de physique-chimie de la voie MP

Le programme de physique-chimie de la classe de MP s'inscrit dans la continuité du programme de MPSI. La formation scientifique de la filière MP s'appuie sur des champs disciplinaires variés : en physique, des compléments sont apportés en mécanique, électronique, thermodynamique, et optique interférentielle ; l'électromagnétisme est abordé de manière approfondie et une découverte structurée de la physique quantique et de la physique statistique est proposée ; la formation en chimie s'organise en deux parties : thermodynamique de la transformation chimique et électrochimie. Le programme est conçu pour amener tous les étudiants à poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, pour éveiller leur curiosité et leur permettre de se former tout au long de la vie.

L'objectif de l'enseignement de physique-chimie est d'abord de développer des compétences propres à la pratique de la démarche scientifique :

- observer et s'approprier une problématique ;
- analyser et modéliser ;
- valider ;
- réaliser et créer.

Cette formation doit aussi développer d'autres compétences dans un cadre scientifique :

- communiquer, à l'écrit et à l'oral ;
- être autonome et faire preuve d'initiative.

Ces compétences sont construites à partir d'un socle de connaissances et de capacités défini par ce programme. Comme celui de première année, ce programme identifie, pour chacun des items, les connaissances scientifiques, mais aussi les savoir-faire, les capacités que les étudiants doivent maîtriser à l'issue de la formation. L'acquisition de ces capacités constitue un objectif prioritaire pour le professeur.

Observer, mesurer, confronter un modèle au réel nécessitent la pratique d'une démarche expérimentale. La formation expérimentale de l'étudiant revêt donc une importance essentielle, au même titre que sa formation théorique. En outre elle donne un sens aux concepts et aux lois introduites. En classe de MP, cette formation expérimentale est poursuivie ; elle s'appuie sur les capacités développées en première année, elle les affermit et les complète.

Comprendre, décrire, modéliser, prévoir, nécessitent aussi une solide formation théorique. Celle-là est largement complétée en classe de MP. Le professeur s'appuiera sur des exemples concrets afin de lui donner du sens. La diversité des domaines scientifiques abordés ne doit pas masquer à l'étudiant la transversalité des concepts et des méthodes utilisés, que le professeur veillera à souligner. Théorique et expérimentale, la formation de l'étudiant est multiforme et doit être abordée par des voies variées. Ainsi le professeur doit-il rechercher un point d'équilibre entre des approches apparemment distinctes, mais souvent complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative.

L'autonomie de l'étudiant et sa capacité à prendre des initiatives sont développées à travers la pratique d'activités de type « résolution de problèmes », qui visent à apprendre à mobiliser des savoirs et des savoir-faire pour répondre à des questionnements précis. Ces résolutions de problèmes peuvent aussi être de nature expérimentale ; la formation expérimentale vise non seulement à apprendre à l'étudiant à réaliser des mesures ou des expériences selon un protocole fixé, mais aussi à l'amener à proposer lui-même un protocole et à le mettre en œuvre. Cette capacité à proposer un protocole doit être résolument développée au cours de la formation expérimentale.

Dans ce programme comme dans celui de première année, il est proposé au professeur d'aborder certaines notions à partir de l'étude d'un document. L'objectif de cette « approche documentaire » est d'apprendre à l'étudiant à compléter ses connaissances et ses savoir-faire par l'exploitation de ressources et de documents scientifiques variés, ce qu'il aura inévitablement à pratiquer dans la suite de sa formation et de sa vie professionnelle.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

La mise en œuvre de la démarche scientifique en physique-chimie fait souvent appel aux mathématiques, tant pour la formulation du modèle que pour en extraire des prédictions. Le professeur veillera à n'avoir recours à la technicité mathématique que lorsqu'elle s'avère indispensable, et à mettre l'accent sur la compréhension des phénomènes physiques. Néanmoins l'étudiant doit savoir utiliser de façon autonome certains outils mathématiques (précisés dans l'appendice « outils mathématiques ») dans le cadre des activités relevant de la physique-chimie.

Enfin, lorsqu'il en aura l'opportunité, le professeur familiarisera l'étudiant à recourir à une approche numérique, qui permet une modélisation plus fine et plus réaliste du réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires. C'est l'occasion pour l'étudiant d'exploiter ses capacités concernant l'ingénierie numérique et la simulation qu'il a acquises en première année en informatique et sciences du numérique. Dans ce domaine des démarches collaboratives sont recommandées.

Le programme de physique-chimie de la classe de MP inclut celui de la classe de MPSI, et son organisation est la même :

- Dans la première partie sont décrites les compétences que la pratique de la **« démarche scientifique »** permet de développer pendant les deux années de formation à travers certaines de ses composantes : la démarche expérimentale, la résolution de problèmes et les approches documentaires. Ces compétences et les capacités associées continueront à être exercées et mises en œuvre dans des situations variées tout au long de la deuxième année en s'appuyant sur les autres parties du programme. Les compétences mentionnées dans cette partie tissent des liens transversaux entre les différentes rubriques du programme, contribuant ainsi à souligner l'idée d'une science constituée de domaines interdépendants.
- Dans la deuxième partie, intitulée **« formation expérimentale »,** sont décrites les méthodes et les capacités expérimentales que les élèves doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Elles complètent celles décrites dans la deuxième partie du programme de MPSI, qui restent exigibles, et devront être régulièrement exercées durant la classe de MP. Leur mise en œuvre à travers les activités expérimentales doit s'appuyer sur des problématiques concrètes contenant celles identifiées en gras dans la partie « formation disciplinaire ».
- La troisième partie, intitulée « **formation disciplinaire** », décrit les connaissances et capacités associées aux contenus disciplinaires propres à la classe de MP. Comme dans le programme de première année, elles sont présentées en deux colonnes : la première colonne décrit les « notions et contenus » ; en regard, la seconde colonne précise les « capacités exigibles » associées dont l'acquisition par les étudiants doit être la priorité du professeur. L'évaluation vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants. Lors de la conception des évaluations, on veillera soigneusement à identifier les capacités mobilisées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

  Certains items de cette partie**, identifiés en caractères gras**, se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés, au choix, à travers des expériences de cours exploitées de manière approfondie et collective, ou lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant sont davantage privilégiées. D'autres items sont signalés comme devant être abordés au moyen d'une approche numérique ou d'une approche documentaire.
- Trois appendices listent le matériel, les outils mathématiques et les outils transversaux que les étudiants doivent savoir utiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique en fin de l'année de MP. Ils complètent le matériel et les outils mathématiques rencontrés en première année et dont la maîtrise reste nécessaire.

Ce programme indique les objectifs de formation à atteindre en fin d'année pour tous les étudiants. Il ne représente en aucun cas une progression imposée pour chaque semestre. La formation de seconde année est divisée en deux semestres. Toutefois le professeur est ici libre de traiter le programme dans l'ordre qui lui semble le plus adapté à ses étudiants. Dans le cadre de sa liberté pédagogique, le professeur, pédagogue et didacticien, organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- Il doit privilégier la mise en activité des étudiants en évitant le dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences sera d'autant plus efficace que les étudiants

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

seront acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment aider à la réflexion, la participation et l'autonomie des étudiants. La formation expérimentale, l'approche documentaire, la résolution de problèmes favorisent cette mise en activité.
- Il doit savoir recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés ou d'objets technologiques. Lorsque le thème traité s'y prête, le professeur peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, des questions d'actualité ou des débats d'idées.
- Il contribue à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en physique-chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines, mathématiques, informatique et sciences industrielles pour l'ingénieur.

Partie 1 - Démarche scientifique

1. Démarche expérimentale

La physique et la chimie sont des sciences à la fois théoriques et expérimentales. Ces deux parties de la démarche scientifique s'enrichissant mutuellement, leur intrication est un élément essentiel de notre enseignement.
C'est la raison pour laquelle ce programme fait une très large place à la méthodologie expérimentale, selon deux axes forts et complémentaires :

- Le premier a trait à la formation expérimentale à laquelle l'intégralité de la deuxième partie est consacrée. Compte tenu de l'important volume horaire dédié aux travaux pratiques, ceux-ci doivent permettre l'acquisition de compétences spécifiques décrites dans cette partie, de capacités dans le domaine de la mesure (réalisation, évaluation de la précision, analyse du résultat…) et des techniques associées. Cette composante importante de la formation d'ingénieur ou de chercheur a vocation à être évaluée de manière appropriée dans l'esprit décrit dans cette partie.
- Le second concerne l'identification, tout au long du programme dans la troisième partie (contenus disciplinaires), de problématiques se prêtant particulièrement à une approche expérimentale. Ces items, **identifiés en gras**, doivent être abordés, au choix, à travers des expériences de cours exploitées de manière approfondie et collective, ou lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant sont davantage privilégiées.

Les expériences de cours et les séances de travaux pratiques, complémentaires, ne répondent donc pas tout à fait aux mêmes objectifs :

- Les expériences de cours doivent susciter un questionnement actif et collectif autour d'une expérience bien choisie permettant de faire évoluer la réflexion théorique et la modélisation, d'aboutir à des lois simplificatrices et unificatrices, de dégager des concepts transversaux entre différents domaines de la physique.
- Les séances de travaux pratiques doivent permettre, dans une approche contextualisée, suscitée par une problématique clairement identifiée et, chaque fois que cela est possible, transversale, l'acquisition de savoir-faire techniques, de connaissances dans le domaine de la mesure et de l'évaluation de sa précision, d'autonomie dans la mise en œuvre de protocoles simples associés à la mesure des grandeurs physiques les plus souvent mesurées.

La liste de matériel jointe en appendice de ce programme précise le cadre technique dans lequel les étudiants doivent savoir évoluer en autonomie avec une information minimale. Son placement en appendice du programme, et non à l'intérieur de la partie dédiée à la formation expérimentale, est délibéré : il exclut l'organisation de séances de travaux pratiques dédiées à un appareil donné et centrées seulement sur l'acquisition des compétences techniques associées.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Compétences spécifiques mobilisées lors des activités expérimentales

Les activités expérimentales en classe préparatoire aux grandes écoles (CPGE) mobilisent les compétences spécifiques qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation expérimentale en CPGE, le niveau d'exigence est naturellement à mettre en perspective avec celui des autres parties du programme de la filière concernée. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les élèves et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

L'ordre de présentation de celles-ci ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces compétences lors d'une séance ou d'une séquence. Certaines ne sont d'ailleurs pas propres à la seule méthodologie expérimentale, et s'inscrivent plus largement dans la démarche scientifique, voire toute activité de nature éducative et formatrice (communiquer, autonomie, travail en équipe, etc.).

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec une situation expérimentale - énoncer une problématique d'approche expérimentale - définir les objectifs correspondants
Analyser	- formuler et échanger des hypothèses - proposer une stratégie pour répondre à la problématique - proposer un modèle - choisir, concevoir ou justifier un protocole ou un dispositif expérimental - évaluer l'ordre de grandeur d'un phénomène et de ses variations
Réaliser	- mettre en œuvre un protocole - utiliser (avec la notice) le matériel de manière adaptée, en autonomie pour celui de la liste « matériel », avec aide pour tout autre matériel - mettre en œuvre des règles de sécurité adéquates - effectuer des représentations graphiques à partir de données expérimentales
Valider	- exploiter des observations, des mesures en identifiant les sources d'erreurs et en estimant les incertitudes - confronter un modèle à des résultats expérimentaux - confirmer ou infirmer une hypothèse, une information - analyser les résultats de manière critique - proposer des améliorations de la démarche ou du modèle
Communiquer	- à l'écrit comme à l'oral : o présenter les étapes de son travail de manière synthétique, organisée, cohérente et compréhensible o utiliser un vocabulaire scientifique adapté o s'appuyer sur des schémas, des graphes - faire preuve d'écoute, confronter son point de vue
Être autonome, faire preuve d'initiative	- travailler seul ou en équipe - solliciter une aide de manière pertinente - s'impliquer, prendre des décisions, anticiper

Concernant la compétence « **Communiquer** », l'aptitude à rédiger un compte-rendu écrit constitue un objectif de la formation. Dans ce cadre, on doit développer les capacités à définir la problématique du questionnement, à décrire les méthodes, en particulier expérimentales, utilisées pour y répondre, à présenter les résultats obtenus et l'exploitation, graphique ou numérique, qui en a été faite, et à analyser les réponses apportées au questionnement initial et leur qualité. Les activités expérimentales sont aussi l'occasion de travailler l'expression orale lors d'un point de situation ou d'une synthèse finale par

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

exemple. Le but est de préparer les élèves de CPGE à la présentation des travaux et projets qu'ils auront à conduire et à exposer au cours de leur formation en école d'ingénieur et, plus généralement, dans le cadre de leur métier de chercheur ou d'ingénieur. L'utilisation d'un cahier de laboratoire, au sens large du terme en incluant par exemple le numérique, peut constituer un outil efficace d'apprentissage.
La compétence « **Être autonome, faire preuve d'initiative »** est par nature transversale et participe à la définition du niveau de maîtrise des autres compétences. Le recours à des activités s'appuyant sur les questions ouvertes est particulièrement adapté pour former les élèves à l'autonomie et l'initiative.

2. Résolution de problèmes

Dans l'acquisition de l'autonomie, la « résolution de problèmes » est une activité intermédiaire entre l'exercice cadré qui permet de s'exercer à de nouvelles méthodes, et la démarche par projet, pour laquelle le but à atteindre n'est pas explicite. Il s'agit pour l'étudiant de mobiliser ses connaissances, capacités et compétences afin d'aborder une situation dans laquelle il doit atteindre un but bien précis, mais pour laquelle le chemin à suivre n'est pas indiqué. Ce n'est donc pas un « problème ouvert » pour lequel on soumet une situation en demandant « Que se passe-t-il ? ». L'objectif à atteindre doit être clairement donné et le travail porte sur la démarche à suivre, l'obtention du résultat et son regard critique.
La résolution de problèmes permet de se confronter à des situations où plusieurs approches sont possibles, qu'il s'agisse de la méthode mise en œuvre ou du degré de précision recherché. Ces situations se prêtent bien à une résolution progressive pour laquelle un premier modèle permettra d'obtenir rapidement un résultat, qui sera ensuite discuté et amélioré. Cette résolution étagée doit permettre à tous les élèves d'aborder le problème selon leur rythme en s'appuyant sur les compétences qu'ils maîtrisent.

C'est sur la façon d'appréhender une question scientifique, sur le choix raisonné de la méthode de résolution et sur les moyens de vérification qu'est centrée la formation de l'élève lors de la démarche de résolution de problèmes. La résolution de problèmes mobilise les compétences qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier le problème.	Faire un schéma modèle. Identifier les grandeurs physiques pertinentes, leur attribuer un symbole. Évaluer quantitativement les grandeurs physiques inconnues et non précisées. Relier le problème à une situation modèle connue. ….
Établir une stratégie de résolution (analyser).	Décomposer le problème en des problèmes plus simples. Commencer par une version simplifiée. Expliciter la modélisation choisie (définition du système, …). Déterminer et énoncer les lois physiques qui seront utilisées. …..
Mettre en œuvre la stratégie (réaliser).	Mener la démarche jusqu'au bout afin de répondre explicitement à la question posée. Savoir mener efficacement les calculs analytiques et la traduction numérique. Utiliser l'analyse dimensionnelle. …
Avoir un regard critique sur les résultats obtenus (valider).	S'assurer que l'on a répondu à la question posée. Vérifier la pertinence du résultat trouvé, notamment en comparant avec des estimations ou ordres de grandeurs connus. Comparer le résultat obtenu avec le résultat d'une autre approche (mesure expérimentale donnée ou déduite d'un document joint,

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

	simulation numérique, …). Étudier des cas limites plus simples dont la solution est plus facilement vérifiable ou bien déjà connue …
Communiquer.	Présenter la solution ou la rédiger, en en expliquant le raisonnement et les résultats. …

3. Approches documentaires

En seconde année, comme en première année, le programme de physique-chimie prévoit un certain nombre **d'approches documentaires**, identifiées comme telles dans la colonne « capacités exigibles » de la partie « formation disciplinaire ».
L'objectif de ces activités reste le même puisqu'il s'agit :
- dans la perspective d'une formation tout au long de la vie, d'habituer les étudiants à se cultiver en utilisant des documents variés (texte, schéma, graphe, vidéo, photo,...), démarche dans laquelle ils sont acteurs de leur formation ;
- d'acquérir des éléments de culture (construction du savoir scientifique, histoire des sciences, étapes d'une démarche scientifique, raisonnements, ordres de grandeurs, avancée de la recherche sur des sujets contemporains, ouverture sur les problèmes sociétaux…) dans les domaines de la physique et de la chimie des XX^{ème} et XXI^{ème} siècles et de leurs applications ;
- de mobiliser et de développer des compétences liées à la recherche, à l'extraction, à l'organisation, à l'analyse et à la synthèse de l'information recueillie ou fournie, compétences essentielles pour les futurs ingénieurs et chercheurs scientifiques. Ces compétences et des exemples de capacités associées sont présentés dans le tableau ci-dessous. Elles peuvent servir de support pour la formation et l'évaluation des étudiants.

À l'issue de l'activité documentaire, une synthèse finale est indispensable pour bien identifier les nouvelles connaissances, les nouveaux modèles et les éléments de culture générale que les étudiants doivent s'approprier.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Dégager la problématique principale - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau,…)
Analyser	- Identifier les idées essentielles et leurs articulations - Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments du ou des documents - Identifier une tendance, une corrélation, une grandeur d'influence - Conduire un raisonnement scientifique qualitatif ou quantitatif. - S'appuyer sur ses connaissances et savoir-faire et sur les documents proposés pour enrichir l'analyse
Réaliser	- Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau - Trier et organiser des données, des informations - Tracer un graphe à partir de données - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure,… - Décrire un phénomène à travers la lecture d'un graphe, d'un tableau,… - Conduire une analyse dimensionnelle - Utiliser un modèle décrit
Valider	- Faire preuve d'esprit critique - Confronter le contenu du document avec ses connaissances et savoir-faire - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude,…) - Estimer des ordres de grandeur et procéder à des tests de vraisemblance

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Communiquer à l'écrit comme à l'oral	- Rédiger/présenter une synthèse, une analyse, une argumentation,… (clarté, justesse, pertinence, exhaustivité, logique) - Résumer un paragraphe sous la forme d'un texte, d'un schéma, d'une carte mentale - Illustrer son propos par des schémas, des graphes, des développements mathématiques

Partie 2 - Formation expérimentale

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales nouvelles que les élèves doivent acquérir au cours de l'année de MP durant les séances de travaux pratiques. Elle vient prolonger la partie correspondante du programme de MPSI dont les capacités doivent être complètement acquises à l'issue des deux années de préparation, et restent donc au programme de seconde année de MP.

Les capacités rassemblées ici ne constituent en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'articuleraient autour d'une découverte du matériel, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif et contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion d'un problème concret.

Les activités expérimentales sur le thème de la chimie sont aussi l'occasion de consolider les savoir-faire de la classe de MPSI en particulier dans le domaine des solutions aqueuses.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
- **Mesures de longueur et d'angles**	Mesurer le déplacement du miroir mobile d'un interféromètre de Michelson.
- **Mesures de temps et de fréquences** Analyse spectrale.	Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre provoqué par l'échantillonnage avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition. Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.
- **Électricité** Filtrage analogique d'un signal périodique.	Mettre en évidence l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique dans les domaines temporel et fréquentiel.
Électronique numérique.	Numériser un signal et utiliser un traitement numérique pour effectuer un filtrage de ce signal.
Onde électromagnétique.	Mettre en œuvre un détecteur dans le domaine des ondes centimétriques.
- **Optique** Analyser une lumière.	Identifier, à l'aide d'un polariseur, une onde polarisée rectilignement et repérer sa direction de polarisation.
Analyser une figure d'interférence.	Mettre en œuvre un photodétecteur en sortie d'un interféromètre.
Étudier la cohérence temporelle d'une source.	Régler un interféromètre de Michelson pour une observation en lame d'air avec une source étendue à

	l'aide d'un protocole proposé. Obtenir une estimation de la longueur de cohérence d'une radiation et de l'écart $\Delta\lambda$ d'un doublet spectral à l'aide d'un interféromètre de Michelson en lame d'air.
- **Mécanique**	Mesurer un coefficient de frottement.
- **Thermodynamique** Conduction thermique et rayonnement.	Mettre en œuvre un dispositif de mesure de conductivité thermique. Utiliser un capteur dans le domaine des infrarouges.
- **Chimie** Effectuer des bilans d'énergie. Mesures électriques. Électrochimie.	Mettre en œuvre une technique de calorimétrie. Mettre en œuvre des mesures électriques dans un environnement électrochimique. Mettre en œuvre des piles et des électrolyseurs.

Prévention des risques au laboratoire

Les élèves doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation et au rejet des produits chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité chimique, électrique et optique leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Prévention des risques	Adopter une attitude adaptée au travail en laboratoire.
- chimique Règles de sécurité au laboratoire. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Phrases H et P.	Relever les indications sur le risque associé au prélèvement et au mélange des produits chimiques. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
- **électrique**	Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.
- **optique**	Utiliser les sources laser de manière adaptée.
2. Impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.	Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

Utilisation de l'outil informatique

L'outil informatique sera utilisé :

- dans le domaine de la simulation : pour interpréter et anticiper des résultats ou des phénomènes, pour comparer des résultats obtenus expérimentalement à ceux fournis par un modèle et pour visualiser, notamment dans les domaines de la cristallographie, de la modélisation moléculaire, et plus généralement dans les situations exigeant une représentation tridimensionnelle.
- pour l'acquisition de données, en utilisant un appareil de mesure interfacé avec l'ordinateur.
- pour la saisie et le traitement de données à l'aide d'un tableur ou d'un logiciel dédié.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Partie 3 - Formation disciplinaire

1. Mécanique

Le programme de mécanique de MP vise à compléter les acquis de mécanique du cours de MPSI. Il est structuré en deux sous-parties, la première est consacrée aux changements de référentiels, la seconde à un complément de mécanique du solide.

L'étude des référentiels non galiléens est organisée autour de deux situations : la translation et la rotation uniforme autour d'un axe fixe. L'étude cinématique est l'occasion, pour le professeur, de revenir sur le caractère absolu du temps en mettant cette hypothèse en perspective avec le phénomène de dilatation des durées vu en classe de terminale S. L'accent est mis sur la compréhension qualitative des effets observés, l'évaluation des ordres de grandeurs et les conséquences expérimentales.

L'étude des lois de Coulomb, limitée au seul cas de la translation, permet de mettre en œuvre un mode de raisonnement spécifique et particulièrement formateur, sans pour autant omettre les conséquences expérimentales.

Objectifs généraux de formation

Les compétences suivantes seront développées dans cette partie du programme :

- relier les fondements de la cinématique classique au thème « temps et relativité restreinte » du programme de terminale S ;
- choisir de manière autonome un référentiel d'étude éventuellement non galiléen en évaluant les avantages et les inconvénients de ce choix ;
- donner du sens à l'expression familière « force centrifuge » ;
- discuter dans une situation concrète le caractère approximativement galiléen du référentiel terrestre ;
- conduire l'étude d'un problème avec frottement solide.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Compléments de dynamique du point matériel : référentiels non galiléens	
Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre dans les cas du mouvement de translation et du mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe.	Reconnaître et caractériser un mouvement de translation et un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe d'un référentiel par rapport à un autre.
Vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre.	Exprimer le vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre.
Lois de composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'une translation, et dans le cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe : vitesse d'entraînement, accélérations d'entraînement et de Coriolis.	Relier les dérivées d'un vecteur dans des référentiels différents par la formule de la dérivation composée. Citer et utiliser les expressions de la vitesse d'entrainement et des accélérations d'entraînement et de Coriolis.
Lois de la dynamique du point en référentiel non	Exprimer les forces d'inerties, dans les seuls cas où

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

galiléen dans le cas où le référentiel entraîné est en translation, ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen. Forces d'inertie.	le référentiel entraîné est en translation, ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen. Décrire et interpréter les effets des forces d'inertie dans des cas concrets : sens de la force d'inertie d'entraînement dans un mouvement de translation ; caractère centrifuge de la force d'inertie d'entraînement dans le cas où le référentiel est en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen. Utiliser les lois de la dynamique en référentiel non galiléen dans les seuls cas où le référentiel entraîné est en translation, ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen.
Caractère galiléen approché de quelques référentiels : référentiel de Copernic, référentiel géocentrique, référentiel terrestre.	Citer quelques manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre. Estimer, en ordre de grandeur, la contribution de la force d'inertie de Coriolis dans un problème de dynamique terrestre.
1.2. Complément de mécanique du solide : lois du frottement solide	
Lois de Coulomb du frottement de glissement dans le seul cas d'un solide en translation. Aspect énergétique.	Utiliser les lois de Coulomb dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider. Effectuer un bilan énergétique. **Effectuer une mesure d'un coefficient de frottement.**

2. Éléments de traitement du signal

Ce thème du programme, décomposé en deux parties, complète l'étude des circuits électriques linéaires menée dans la partie « signaux physiques » du programme de MPSI. La composante expérimentale est forte et les capacités exigibles ont vocation à être principalement développées au cours de séances de travaux pratiques.

Dans la première partie intitulée « signaux périodiques », l'accent est mis sur l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique, l'objectif étant de comprendre le rôle central de la linéarité des systèmes pour interpréter la forme du signal de sortie.

La seconde partie, à vocation uniquement expérimentale, constitue une initiation au traitement numérique des signaux à travers les points suivants : l'échantillonnage et le repliement de spectre, la conversion analogique/numérique et le filtrage numérique. Le phénomène de repliement de spectre est présenté qualitativement au moyen d'illustrations démonstratives, l'objectif étant de mettre en place la condition de Nyquist-Shannon afin de réaliser convenablement une acquisition numérique. Un filtrage numérique, du type passe-bas, est réalisé à l'aide d'un convertisseur analogique/numérique et d'un traitement numérique, un convertisseur numérique/analogique restitue ensuite un signal de sortie analogique.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Objectifs de formation

- exploiter la décomposition sinusoïdale d'un signal pour prévoir son évolution à travers un système linéaire ;
- relier les représentations temporelle et fréquentielle d'un signal ;
- illustrer expérimentalement la condition de Nyquist-Shannon ;
- expliquer et mettre en œuvre un filtrage numérique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Signaux périodiques	
Signaux périodiques.	Commenter le spectre d'un signal périodique : selon leur rang, attribuer aux différentes harmoniques le rôle qu'elles jouent dans la forme du signal analysé.
Action d'un filtre linéaire du premier ou du second ordre sur un signal périodique.	Prévoir l'effet d'un filtrage linéaire sur la composition spectrale d'un signal périodique. Expliciter les conditions pour obtenir un comportement intégrateur ou dérivateur. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'action d'un filtre sur un signal périodique**. **Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences en sortie pour une entrée sinusoïdale.**
2.2. Électronique numérique	
Échantillonnage : fréquence d'échantillonnage, théorème de Nyquist-Shannon.	**Réaliser l'échantillonnage d'un signal. Commenter la structure du spectre du signal obtenu après échantillonnage.** **Choisir la fréquence d'échantillonnage afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.** **Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre au moyen d'un oscilloscope numérique ou d'un logiciel de calcul numérique.**
Filtrage numérique.	**Mettre en œuvre un convertisseur analogique/numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe-bas ; utiliser un convertisseur numérique/analogique pour restituer un signal analogique.**

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

3. Optique

Le programme d’optique de la filière MP s’inscrit dans le prolongement de la partie « Signaux physiques » du programme de MPSI. Il s’agit pour les étudiants d'approfondir l'étude des phénomènes d'interférences lumineuses, dans le cadre du modèle ondulatoire de la lumière.

Si certaines notions ont été abordées au lycée et en classe de première année MPSI, le formalisme utilisé constitue une avancée importante dans la modélisation des phénomènes décrits ; l’enseignant veillera particulièrement à privilégier les aspects expérimentaux et à utiliser tous les supports de visualisation (expériences de cours, simulations, animations,…) pour aider les étudiants dans la construction de leurs représentations. L'enseignant ne manquera pas non plus de rappeler que ces phénomènes, étudiés ici dans le cadre de l'optique, sont généralisables à tout comportement ondulatoire.

Le programme utilise uniquement le mot « intensité » pour décrire la grandeur détectée mais on peut utiliser indifféremment les mots « intensité » et « éclairement » sans chercher à les distinguer à ce niveau de formation.

L'établissement et la connaissance de la fonction réseau ne constituent pas des capacités exigibles.

L'approche expérimentale sera centrée sur la mise en œuvre de l'interféromètre de Michelson et, dans le prolongement du programme de MPSI, de dispositifs d’interférences à N ondes.

Dans le cadre de l’optique, on qualifiera de plane ou sphérique une onde par référence à la forme des surfaces d’ondes.

Objectifs généraux de formation

Les compétences suivantes seront développées dans cette partie du programme :

- maîtriser la notion de phase d'une vibration harmonique et de sa variation au cours d'une propagation ;

- associer les caractéristiques géométriques d'un phénomène d'interférences (position et forme des franges, interfrange) à celles du dispositif interférentiel et du milieu de propagation ;

- connaître certains ordres de grandeur propres aux phénomènes lumineux dans le domaine du visible (longueur d'onde, temps de cohérence, temps de réponse d'un récepteur) ; faire le lien avec les problèmes de cohérence ;

- maîtriser les outils de l'optique géométrique (rayon lumineux, loi du retour inverse, relations de conjugaison) et de l'optique ondulatoire (chemin optique, surface d'onde, théorème de Malus) afin de conduire un calcul de différence de marche entre deux rayons lumineux dans des situations simples.

© Ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses	
Modèle de propagation dans l'approximation de l'optique géométrique. Chemin optique. Déphasage dû à la propagation. Surfaces d'ondes. Théorème de Malus (admis). Onde plane, onde sphérique ; effet d'une lentille mince dans l'approximation de Gauss.	Savoir que la grandeur lumineuse (ou grandeur scalaire de l'optique) est une composante du champ électrique. Exprimer le retard de phase en un point (par rapport à un autre) en fonction de la durée de propagation ou du chemin optique. Associer une description de la formation des images en termes de rayon lumineux et en termes de surfaces d'onde. Utiliser la propriété énonçant que le chemin optique séparant deux points conjugués est indépendant du rayon lumineux choisi.
Modèle d'émission. Relation (admise) entre le temps de cohérence et la largeur spectrale.	Citer l'ordre de grandeur du temps de cohérence Δt de quelques radiations visibles. Utiliser la relation $\Delta f . \Delta t \sim 1$ pour relier le temps de cohérence à la largeur spectrale $\Delta\lambda$ de la radiation.
Récepteurs. Intensité de la lumière.	Relier l'intensité à la moyenne temporelle du carré de la grandeur scalaire de l'optique. Citer l'ordre de grandeur du temps de réponse de quelques récepteurs de lumière. **Mettre en œuvre des expériences utilisant un capteur CCD.**
3.2. Superposition d'ondes lumineuses	
Superposition de deux ondes incohérentes entre elles.	Justifier et utiliser l'additivité des intensités.
Superposition de deux ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre elles : formule de Fresnel $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi$. Facteur de contraste.	Citer les principales conditions pour que le phénomène d'interférences apparaisse (ondes quasi synchrones, déphasage constant dans le temps ou très lentement variable). Établir et utiliser la formule de Fresnel. Associer un bon contraste à des intensités I_1 et I_2 voisines.
Superposition de N ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre elles, de même amplitude et dont les phases sont en progression arithmétique.	Établir la relation fondamentale des réseaux liant la condition d'interférences constructives à l'expression de la différence de marche entre deux ondes issues de motifs consécutifs. Établir la demi-largeur $2\pi/N$ des pics principaux de la courbe d'intensité en fonction du déphasage. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant un phénomène d'interférences à N ondes.**
3.3. Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young	
Trous d'Young ponctuels dans un milieu non dispersif : source ponctuelle à distance finie et observation à grande distance. Champ d'interférences. Ordre d'interférences p. Variations de l'ordre d'interférences p avec la	Définir, exprimer et utiliser l'interfrange et l'ordre d'interférences. Justifier que les franges ne sont pas localisées. Interpréter la forme des franges observées.

position du point d'observation ; franges d'interférences. Variations de l'ordre d'interférences p avec la position d'un point source ; perte de contraste par élargissement angulaire de la source. Variations de p avec la longueur d'onde. Perte de contraste par élargissement spectral de la source.	 Utiliser le critère semi-quantitatif de brouillage des franges $\lvert\Delta p\rvert > 1/2$ (où $\lvert\Delta p\rvert$ est évalué sur la moitié de l'étendue spatiale de la source) pour interpréter des observations expérimentales. Utiliser le critère semi-quantitatif de brouillage des franges $\Delta p > 1/2$ (où $\lvert\Delta p\rvert$ est évalué sur la moitié de l'étendue spectrale de la source) pour interpréter des observations expérimentales.
3.4. Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue	
Interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue. Localisation (constatée) des franges. Lame d'air : franges d'égale inclinaison. Étude expérimentale en coin d'air : franges d'égale épaisseur.	Connaître les conditions d'éclairage et d'observation en lame d'air et en coin d'air. **Régler un interféromètre de Michelson pour une observation en lame d'air avec une source étendue à l'aide d'un protocole proposé.** Établir et utiliser l'expression de l'ordre d'interférences en fonction de la longueur d'onde, de l'épaisseur de la lame d'air équivalente et de l'angle d'incidence des rayons. **Mettre en œuvre un protocole pour accéder au profil spectral d'une raie ou d'un doublet à l'aide d'un interféromètre de Michelson.** Utiliser l'expression (admise) de la différence de marche en fonction de l'épaisseur pour exprimer l'ordre d'interférences. **Analyser un objet (miroir déformé, lame de phase introduite sur un des trajets, etc.) à l'aide d'un interféromètre de Michelson.** **Interpréter qualitativement les observations en lumière blanche.**

4. Électromagnétisme

Le programme d'électromagnétisme de la filière MP s'inscrit dans le prolongement des parties « Signaux physiques » et « Induction et forces de Laplace » du programme de MPSI. Il s'agit pour les étudiants de découvrir les lois locales et intégrales qui gouvernent les champs électrique et magnétique et quelques applications dans des domaines variés.

Si certaines notions ont été abordées au lycée et en classe de première année de MPSI, le formalisme utilisé constitue, bien souvent, pour les étudiants une première découverte ; il convient pour l'enseignant d'être particulièrement attentif aux difficultés potentielles des étudiants et d'utiliser tous les outils de visualisation (expériences de cours, simulations, animations,…) pour aider les étudiants dans la construction de leurs représentations.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

L’étude des champs électrostatique et magnétostatique est présentée en deux parties distinctes ; l'enseignant est libre, s’il le souhaite, de procéder à une présentation unifiée de la notion de champ statique. Pour les calculs de champs, l’accent est mis sur les situations à haut degré de symétrie qui permettent l’utilisation efficace des propriétés de flux ou de circulation. Les équations locales des champs statiques sont introduites comme cas particuliers des équations de Maxwell.

La loi de Biot et Savart et les notions de potentiel vecteur et d’angle solide ne relèvent pas du programme.

Les relations de passage relatives au champ électromagnétique peuvent être exploitées mais doivent être systématiquement rappelées.

Après une présentation des équations de Maxwell et des aspects énergétiques, le programme analyse le phénomène de propagation d’une onde électromagnétique dans le vide, la structure des champs associés et la réflexion des ondes sur un métal parfait. La propagation dans les milieux s’appuie sur les études d’une onde électromagnétique dans un milieu ohmique et dans un plasma.

Le programme aborde enfin la question des sources avec l’étude du champ rayonné à grande distance par un dipôle oscillant.

Objectifs généraux de formation

Les compétences suivantes seront développées dans cette partie du programme :

- maîtriser les concepts de champ scalaire et de champ de vecteurs ;
- citer quelques ordres de grandeur relatifs à l’intensité des champs statiques, aux flux énergétiques moyens ;
- conduire des analyses de symétrie et d’invariance et calculer des champs à l’aide de propriétés de flux ou de circulation ;
- énoncer des lois de l’électromagnétisme sous formes locale et intégrale et faire le lien entre les deux formulations ;
- conduire des bilans énergétiques mettant en jeu matière et champ électromagnétique ;
- associer au phénomène de propagation un couplage entre les champs, une équation locale et des solutions dans des cas simples ;
- décrire la propagation d’une onde électromagnétique dans le vide et dans un milieu dispersif ;
- relier un champ électromagnétique à ses sources dans le cas d’un dipôle oscillant.

Bloc 1 : Électrostatique

La notion de champ électrostatique a été introduite en classe de première S, cette partie constitue un approfondissement des lois quantitatives qui régissent le champ électrostatique. Les notions abordées sont donc centrées sur l’essentiel : distributions de charges, champ et potentiel. Pour le champ électrostatique et le potentiel, on se limite aux expressions dans le cas de charges ponctuelles.
L’accent est mis sur les propriétés intégrales du champ et sur le théorème de Gauss pour des situations présentant un haut degré de symétrie ; ce dernier est admis.
Des capacités sur la lecture des lignes de champ et des surfaces équipotentielles sont développées.
Le condensateur plan est introduit mais l’étude des conducteurs en équilibre électrostatique ne relève

© Ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche, 2013

pas du programme.
Une approche énergétique est conduite dans un cas simple : une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.
Le dipôle est traité, l'accent est mis sur les effets qualitatifs.
Les analogies avec la gravitation sont centrées sur l'application du théorème de Gauss.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1. Électrostatique	
Loi de Coulomb. Champ électrostatique. Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles. Principe de superposition. Distributions continues de charges : volumique, surfacique, linéique. Symétries et invariances du champ électrostatique.	Exprimer le champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques. Choisir un type de distribution continue adaptée à la situation modélisée. Relier les densités de charges de deux types de distributions modélisant une même situation. Déterminer la charge totale d'une distribution continue dans des situations simples. Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de charges. Identifier les invariances d'une distribution de charges. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de charges pour caractériser le champ électrostatique créé.
Circulation du champ électrostatique. Notion de potentiel électrostatique. Opérateur gradient.	Relier le champ électrostatique au potentiel. Exprimer le potentiel créé par une distribution discrète de charges. Citer l'expression de l'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes. Déterminer un champ électrostatique à partir du potentiel, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie dans le cas des coordonnées sphériques et cylindriques. Déterminer une différence de potentiel par circulation du champ électrostatique dans les cas simples.
Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss. Cas de la sphère, du cylindre « infini » et du plan « infini ».	Reconnaître les situations pour lesquelles le champ électrostatique peut être calculé à l'aide du théorème de Gauss. Établir les expressions des champs électrostatiques créés en tout point de l'espace par une sphère uniformément chargée en volume, par un cylindre « infini » uniformément chargé en volume et par un plan « infini » uniformément chargé en surface. Établir et énoncer qu'à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution. Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Étude du condensateur plan comme la superposition de deux distributions surfaciques, de charges opposées.	Établir et citer l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide.
Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentielles.	Orienter les lignes de champ électrostatique créées par une distribution de charges. Représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement. Associer les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution. **Approche numérique :** à l'aide d'un logiciel dédié représenter des cartes de lignes de champ et d'équipotentielles.
Énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur.	Établir et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.
Notion de dipôle électrostatique, moment dipolaire. Champ et potentiel créés par un dipôle électrostatique. Dipôle électrostatique placé dans un champ électrostatique extérieur : actions subies et énergie potentielle d'interaction.	Exprimer le moment dipolaire d'un doublet de charges. Évaluer des ordres de grandeur dans le domaine microscopique. Expliciter l'approximation dipolaire. Représenter l'allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles d'un dipôle électrostatique. Établir et exploiter les expressions du champ et du potentiel créés par un doublet de charges dans l'approximation dipolaire. Expliquer qualitativement le comportement d'un dipôle placé dans un champ électrostatique extérieur. Établir et exploiter les expressions des actions mécaniques subies par un doublet de charges dans un champ électrostatique extérieur uniforme. Exploiter l'expression fournie de la force subie par un dipôle placé dans un champ électrostatique extérieur non uniforme. Citer et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'interaction.
Analogies avec la gravitation.	Utiliser le théorème de Gauss de la gravitation.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Bloc 2 : Magnétostatique

L’étude de la magnétostatique s’appuie le plus possible sur les différents aspects qualitatifs et quantitatifs vus en première année de MPSI, les étudiants sont donc déjà familiarisés avec le concept de champ magnétostatique. La loi de Biot et Savart n’est pas introduite ; l’utilisation de celle-ci pour calculer un champ magnétostatique est donc exclue.

Les distributions de courants surfaciques ne sont pas introduites à ce niveau du programme, elles le seront uniquement à l’occasion de la réflexion d’une onde électromagnétique sur un métal parfait.

On aborde les propriétés intégrales du champ et on utilise le théorème d’Ampère pour des calculs dans des cas présentant un haut degré de symétrie.

La notion de dipôle magnétique a déjà été vue, certaines capacités exigibles en classe de MPSI sont reprises, l’étude est complétée, les effets qualitatifs sont à connaître. On pourra, sur ce thème, souligner les analogies avec l’électrostatique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2. Magnétostatique	
Courant électrique. Vecteur densité de courant volumique. Distributions de courant électrique filiformes.	Déterminer l'intensité du courant électrique traversant une surface orientée.
Symétries et invariances du champ magnétostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courants. Identifier les invariances d'une distribution de courants. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de courants pour caractériser le champ magnétostatique créé.
Propriétés de flux et de circulation. Théorème d’Ampère. Applications au fil rectiligne « infini » de section non nulle et au solénoïde « infini ».	Reconnaître les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère. Citer quelques ordres de grandeur de champs magnétostatiques. Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne « infini » de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume, par un solénoïde « infini » en admettant que le champ est nul à l’extérieur. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
Lignes de champ, tubes de champ.	Orienter les lignes de champ magnétostatique créées par une distribution de courants. Associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution. **Approche numérique :** à l’aide d’un logiciel dédié représenter des cartes de lignes de champ magnétostatique.

© Ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Notion de dipôle magnétique. Moment magnétique.	Exprimer le moment magnétique d'une boucle de courant plane. Évaluer des ordres de grandeur dans les domaines macroscopique et microscopique.
Champ créé par un dipôle magnétique.	Expliciter l'approximation dipolaire. Représenter l'allure des lignes de champ d'un dipôle magnétique. Exploiter l'expression fournie du champ créé par un dipôle magnétique.
Dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique extérieur : actions subies et énergie potentielle d'interaction.	Expliquer qualitativement le comportement d'un dipôle passif placé dans un champ magnétostatique extérieur. Exploiter les expressions fournies des actions mécaniques subies par un dipôle magnétique dans un champ magnétostatique extérieur uniforme. Exploiter l'expression fournie de la force subie par un dipôle magnétique dans un champ magnétostatique extérieur non uniforme. Citer et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'interaction. **Approche documentaire** : Expérience de Stern et Gerlach : expliquer sans calculs les résultats attendus dans le cadre de la mécanique classique ; expliquer les enjeux de l'expérience.

Bloc 3 : Équations de Maxwell

Dans cette partie une vision cohérente des lois de l'électromagnétisme est présentée. Elle constitue une première approche quantitative du phénomène de propagation et permet également de revenir qualitativement sur l'induction étudiée en première année de MPSI.

Le professeur peut souligner que l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide par changement de référentiel galiléen peut se déduire de l'invariance des équations de Maxwell, ce qui permet d'effectuer un retour sur ce « principe » déjà énoncé en classe de terminale S.

Les lois locales de l'électrostatique relatives au potentiel constituent un support pertinent pour procéder à une approche numérique de la résolution d'une équation différentielle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.3. Équations de Maxwell	
Principe de la conservation de la charge : formulation locale.	Établir l'équation locale de la conservation de la charge en coordonnées cartésiennes dans le cas à une dimension.
Équations de Maxwell : formulations locale et intégrale.	Associer l'équation de Maxwell-Faraday à la loi de Faraday. Citer, utiliser et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale. Associer le couplage spatio-temporel entre champ électrique et champ magnétique au phénomène de propagation. Vérifier la cohérence des équations de Maxwell avec l'équation locale de la conservation de la charge.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants.	Établir les équations de propagation à partir des équations de Maxwell.
Cas des champs statiques : équations locales. Équation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique.	Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell. Établir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique. **Approche numérique :** mettre en œuvre un outil de résolution numérique fourni pour déterminer une solution à l'équation de Laplace, les conditions aux limites étant fixées.

Bloc 4 : Énergie du champ électromagnétique

Aucun modèle relatif à la loi d'Ohm locale n'est exigible ; l'accent est mis sur les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique, sur l'utilisation du flux du vecteur de Poynting pour évaluer une puissance rayonnée à travers une surface et sur les bilans d'énergie et de puissance.
Les éventuels liens avec la statique sont laissés à l'initiative du professeur dans le cadre de sa liberté pédagogique, aucun savoir-faire n'est exigible de la part des étudiants sur ce thème.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.4. Energie du champ électromagnétique	
Densité volumique de force électromagnétique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge. Loi d'Ohm locale ; densité volumique de puissance Joule.	Établir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge. Analyser les aspects énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting : bilan d'énergie.	Citer des ordres de grandeur de flux énergétiques moyens (flux solaire, laser,…) Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. Effectuer un bilan d'énergie sous forme locale et intégrale. Interpréter chaque terme de l'équation locale de Poynting, l'équation locale de Poynting étant fournie.

Bloc 5 : Propagation et rayonnement

Cette partie est l'occasion d'illustrer l'efficacité du formalisme local des équations de Maxwell en insistant sur les aspects qualitatifs et sur la variété des applications qui en découlent.

Dans cette partie, on qualifiera de plane une onde par référence à sa dépendance spatiale f(x,t). Si le modèle de l'onde plane est présenté dans le cadre de l'espace vide de courant et de charge, les études des ondes électromagnétiques dans un plasma ainsi que dans un milieu ohmique permettent d'enrichir les compétences des étudiants sur les phénomènes de propagation en abordant, par exemple, l'effet de peau, le phénomène de dispersion, les notions de vitesse de groupe et de phase et de fréquence de coupure.

La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait et son confinement dans une cavité permettent aux étudiants d'approfondir leurs connaissances sur les ondes stationnaires et de découvrir des savoir-faire spécifiques permettant leur étude efficace. La notion de densité de courant surfacique est introduite mais le calcul de l'intensité à travers un segment ne relève pas du programme.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Enfin, l'étude du rayonnement dipolaire est l'occasion de procéder à une approche qualitative approfondie : d'une part l'expression des champs peut être justifiée en utilisant des arguments simples (symétrie, analyse dimensionnelle, conservation de l'énergie,…) et d'autre part des approches documentaire et expérimentale visent à privilégier les applications dans le domaine des télécommunications et la compréhension de certains phénomènes physiques naturels.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.5. Propagation et rayonnement	
Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant ; onde plane progressive et aspects énergétiques.	Citer les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension. Décrire la structure d'une onde plane et d'une onde plane progressive dans l'espace vide de charge et de courant.
Onde plane progressive monochromatique. Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement.	Expliquer le caractère idéal du modèle de l'onde plane monochromatique. Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications. Reconnaître une onde polarisée rectilignement. **Utiliser des polariseurs et étudier quantitativement la loi de Malus.**
Propagation d'une onde plane transverse progressive monochromatique dans un plasma localement neutre et peu dense. Vitesse de phase, vitesse de groupe. Cas de l'ionosphère.	Utiliser la notation complexe et établir la relation de dispersion. Définir le phénomène de dispersion. Expliquer la notion de fréquence de coupure et citer son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère. Décrire la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu linéaire dispersif par superposition d'ondes planes progressives monochromatiques. Calculer la vitesse de groupe à partir de la relation de dispersion. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes. **Approche documentaire :** à l'aide de données sur l'ionosphère illustrer quelques aspects des télécommunications.
Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique en régime lentement variable. Effet de peau. Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire. Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire.	Établir et interpréter l'expression de la grandeur caractéristique d'atténuation de l'onde électromagnétique dans un milieu ohmique. Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Reconnaître et caractériser une onde stationnaire. Utiliser la méthode de séparation des variables. **Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques.**
Champ électromagnétique rayonné par un dipôle oscillant dans la zone de rayonnement. Puissance	Justifier le choix du modèle du dipôle oscillant et citer des exemples dans différents domaines.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

rayonnée.	Formuler et commenter les approximations reliant les trois échelles de longueur pertinentes. Analyser la structure du champ électromagnétique rayonné, les expressions des champs étant fournies, en utilisant des arguments généraux : symétrie, conservation de l'énergie et analyse dimensionnelle. Effectuer un bilan énergétique, les expressions des champs étant fournies. Représenter l'indicatrice de rayonnement. **Détecter une onde électromagnétique rayonnée.** **Approche documentaire :** expliquer certaines propriétés optiques de l'atmosphère (couleur du ciel, du Soleil couchant, polarisation,…) en lien avec le thème du rayonnement dipolaire.

5. Thermodynamique

Le programme de thermodynamique de MP s'inscrit dans le prolongement du programme de MPSI : les principes de la thermodynamique sont désormais écrits sous forme infinitésimale $dU+dE = \delta W+\delta Q$ et $dS = \delta S_e + \delta S_c$. Le premier principe infinitésimal est réinvesti dans l'étude des transferts thermiques.

Après une partie consacrée aux systèmes ouverts, le programme s'articule autour de la problématique des transferts thermiques :

- pour la diffusion thermique, la mise en équation est limitée au cas des solides ; on peut utiliser les résultats ainsi établis dans d'autres situations, notamment dans des fluides, en affirmant la généralisation des équations obtenues dans les solides. Les mises en équations locales sont faites exclusivement sur des géométries où une seule variable d'espace intervient. On admet ensuite les formes générales des équations en utilisant les opérateurs d'analyse vectorielle. Enfin, aucune connaissance spécifique sur les solutions d'une équation de diffusion ne figure au programme.

- la loi phénoménologique de Newton à l'interface entre un solide et un fluide est introduite.

- les transferts thermiques par rayonnement sont abordés uniquement au travers d'une activité expérimentale.

Objectifs de formation

Le cours de thermodynamique de MP permet un réinvestissement du cours de thermodynamique de MPSI et contribue à asseoir les compétences correspondantes. Au-delà, l'étude de la diffusion thermique contribue à consolider la maîtrise d'outils puissants (divergence, laplacien) dans un contexte concret. Les compétences développées sont :

- identifier la nature des transferts thermiques ;

- réaliser des bilans d'énergie ;

- analyser et résoudre des équations aux dérivées partielles (analyse en ordre de grandeur, conditions initiales, conditions aux limites).

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.1. Systèmes ouverts en régime stationnaire	
Premier et deuxième principes de la thermodynamique pour un système ouvert en régime stationnaire, dans le seul cas d'un écoulement unidimensionnel dans la section d'entrée et la section de sortie.	Établir les relations $\Delta h+\Delta e = w_u+q$ et $\Delta s = s_e+s_c$ et les utiliser pour étudier des machines thermiques réelles à l'aide du diagramme (p,h).
5.2. Transferts thermiques	
Conduction, convection et rayonnement.	Reconnaître un mode de transfert thermique. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.**
Vecteur densité de flux thermique.	Calculer un flux thermique à travers une surface orientée et interpréter son signe.
Premier principe de la thermodynamique.	Effectuer un bilan local d'énergie interne pour un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique.
Loi de Fourier.	Interpréter et utiliser la loi phénoménologique de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, verre, acier. **Mesurer la conductivité thermique d'un matériau.**
Équation de la diffusion thermique.	Établir l'équation de la diffusion thermique sans terme de source au sein d'un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique. Utiliser une généralisation de l'équation de la diffusion en présence d'un terme de source. Utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur laplacien et son expression fournie. Analyser une équation de diffusion thermique en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. **Approche numérique :** mettre en œuvre un outil de résolution numérique fourni pour déterminer une solution à l'équation de la diffusion thermique, les conditions aux limites et les conditions initiales étant fixées.
Régime stationnaire. Résistance thermique.	Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Déterminer l'expression de la résistance thermique d'un solide dans le cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Exploiter les lois d'association de résistances thermiques.
Coefficient de transfert thermique de surface h, loi de Newton.	Utiliser la loi de Newton comme condition aux limites à une interface solide-fluide.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

6. Physique quantique

Cette partie s'inscrit dans le prolongement des programmes du lycée et de la classe de MPSI. Il s'agit cependant de dépasser l'approche descriptive et qualitative et de donner aux étudiants leurs premiers outils quantitatifs d'analyse. Le cœur de cet enseignement est construit sur la mécanique ondulatoire de Schrödinger et propose des résolutions complètes d'exemples simples mais fondamentaux pour la bonne compréhension de problèmes plus complexes : particule dans une marche de potentiel et effet tunnel, particule dans un puits de potentiel infini et quantification de l'énergie d'une particule confinée. On se limitera à l'introduction heuristique de la dualité onde/particule et de la densité de courant de probabilité pour une particule libre sans développer la notion de paquet d'ondes. L'accent doit être mis sur l'interprétation et l'exploitation des résultats et non pas sur les calculs, non exigibles pour l'exemple plus délicat de la barrière de potentiel. Le professeur pourra au contraire, s'il le souhaite, proposer des analyses de graphes, des exploitations de formules analytiques fournies, des estimations numériques, des simulations… afin d'aborder des modélisations plus réalistes.

Objectifs généraux de formation

Les compétences suivantes seront développées dans cette partie du programme :

- mettre en relation les effets quantiques avec les prédictions classiques ;
- mobiliser ses savoir-faire sur les ondes pour interpréter les phénomènes quantiques ;
- être en mesure de prévoir des effets quantiques grâce à des estimations numériques ;
- passer de la description corpusculaire à une description ondulatoire d'une particule ;
- utiliser le principe de superposition.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.1. Fonction d'onde et équation de Schrödinger	
Fonction d'onde ψ d'une particule sans spin et densité de probabilité de présence. Équation de Schrödinger à une dimension dans un potentiel V(x). États stationnaires de l'équation de Schrödinger.	Interpréter en termes de probabilité l'amplitude d'une onde associée à une particule. Utiliser le caractère linéaire de l'équation (principe de superposition). Procéder à la séparation des variables temps et espace. Distinguer l'onde associée à un état stationnaire en mécanique quantique d'une onde stationnaire au sens usuel de la physique des ondes. Relier l'énergie de la particule à l'évolution temporelle de sa fonction d'onde et faire le lien avec la relation de Planck-Einstein. Identifier le terme associé à l'énergie cinétique.
6.2. Particule libre	
Fonction d'onde d'une particule libre non localisée. Relation de de Broglie.	Établir les solutions. Connaître et interpréter la difficulté de normalisation de cette fonction d'onde. Relier l'énergie de la particule et le vecteur d'onde de l'onde plane associée.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Densité de courant de probabilité associée à un état stationnaire $\boldsymbol{J} = \lvert\psi\rvert^2 \frac{\hbar \boldsymbol{k}}{m}$. Inégalité d'Heisenberg spatiale et paquet d'ondes.	Interpréter et exploiter l'expression fournie de la densité de courant de probabilité par analogie avec la densité de courant électrique. Expliquer, en s'appuyant sur l'inégalité d'Heisenberg spatiale, que la localisation de la particule peut s'obtenir par superposition d'ondes planes.
6.3. États stationnaires d'une particule dans des potentiels constants par morceaux	
États stationnaires d'une particule dans le cas d'une marche de potentiel Cas E > V : probabilité de transmission et de réflexion. Cas E < V : évanescence.	Citer des exemples physiques illustrant cette problématique. Exploiter les conditions de continuité (admises) relatives à la fonction d'onde. Établir la solution dans le cas d'une particule incidente sur une marche de potentiel. Expliquer les différences de comportement par rapport à une particule classique Déterminer les coefficients de transmission et de réflexion en utilisant les courants de probabilités Reconnaître l'existence d'une onde évanescente et la caractériser.
Barrière de potentiel et effet tunnel.	Décrire qualitativement l'influence de la hauteur ou de largeur de la barrière de potentiel sur le coefficient de transmission. Exploiter un coefficient de transmission fourni. **Approche documentaire** : en utilisant le coefficient de transmission fourni, expliquer le rôle de l'effet tunnel dans la radioactivité α ou la microscopie à effet tunnel.
États stationnaires d'une particule dans un puits de potentiel infini. Énergie de confinement.	Établir les solutions et les niveaux d'énergie de la particule confinée. Identifier les analogies avec la corde vibrante. Estimer l'énergie d'une particule confinée dans son état fondamental pour un puits non rectangulaire. Associer l'analyse à l'inégalité d'Heisenberg.
6.4. États non stationnaires d'une particule	
Combinaison linéaire d'états stationnaires.	Expliquer qu'une superposition de deux états stationnaires engendre une évolution au cours du temps de l'état de la particule. Établir l'expression de la densité de probabilité de présence de la particule dans le cas d'une superposition de deux états stationnaires ; interpréter le résultat. **Approche numérique** : en utilisant un logiciel dédié, décrire l'évolution temporelle d'une particule confinée (puits infini, oscillateur harmonique,…).

7. Éléments de thermodynamique statistique

L’objectif de cette partie est de relier certaines propriétés macroscopiques d’un système constitué d’un grand nombre de particules avec celles des constituants microscopiques.

Le facteur de Boltzmann est introduit de manière inductive à partir du modèle d’atmosphère isotherme. L’étude des systèmes à spectre discret d’énergies est l’occasion de montrer, qu’à température donnée, l’énergie fluctue et que les fluctuations relatives diminuent avec la taille du système. L’étude des systèmes à deux niveaux, conduite de manière plus exhaustive, permet une analyse plus fine des phénomènes.

Le théorème d’équipartition de l’énergie est l‘occasion de procéder à une évaluation des capacités thermiques des gaz et des solides

Objectifs généraux de formation

Les compétences suivantes seront développées dans cette partie du programme :

- évaluer certaines grandeurs macroscopiques en fonction de paramètres microscopiques ;

- mettre en œuvre des modes de raisonnement relevant du domaine de l’analyse statistique et probabiliste ;

- relier l’étude des systèmes à spectre discret d’énergies avec le phénomène de quantification de l’énergie vu dans le cours d’introduction à la physique quantique ;

- affiner la compréhension de certaines grandeurs de la thermodynamique classique comme l’énergie, la température, la capacité thermique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
7.1. Monde microscopique, monde macroscopique	
Échelles microscopique, mésoscopique et macroscopique.	Définir chacune de ces échelles et en expliquer la pertinence.
7.2. Facteur de Boltzmann	
Modèle de l’atmosphère isotherme.	Établir la variation de la pression avec l’altitude dans l’hypothèse d’une atmosphère isotherme.
Poids de Boltzmann d’une particule indépendante à l'équilibre avec un thermostat.	Interpréter la loi du nivellement barométrique avec le poids de Boltzmann. Reconnaître un facteur de Boltzmann. Comparer k_BT à des écarts d’énergie et estimer les conséquences d'une variation de température.
7.3. Systèmes à spectre discret d'énergies	
Probabilité d'occupation d'un état d'énergie non dégénéré par une particule indépendante.	Exprimer la probabilité d'occupation d’un état d’énergie en utilisant la condition de normalisation. Exploiter un rapport de probabilités entre deux états.
Énergie moyenne et écart quadratique moyen.	Exprimer sous forme d'une somme sur ses états l'énergie moyenne et l’écart-quadratique énergétique d'un système.
Cas d'un système à N particules indépendantes.	Expliquer pourquoi les fluctuations relatives d'énergie régressent quand la taille du système augmente et associer cette régression au caractère

© Ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Système à deux niveaux non dégénérés d'énergies ±ε.	quasi-certain des grandeurs thermodynamiques. Citer des exemples de systèmes modélisables par un système à deux niveaux. Déterminer l'énergie moyenne et la capacité thermique de ce système. Interpréter l'évolution de l'énergie moyenne avec la température, notamment les limites basse et haute température. Relier les fluctuations d'énergies à la capacité thermique.
7.4. Capacités thermiques classiques des gaz et des solides	
Théorème d'équipartition pour un degré de liberté énergétique indépendant quadratique.	Connaître et exploiter la contribution $k_BT/2$ par degré quadratique à l'énergie moyenne.
Capacité thermique molaire des gaz classiques dilués monoatomiques et diatomiques. Capacité thermique molaire des solides dans le modèle d'Einstein classique : loi de Dulong et Petit.	Dénombrer de degrés de libertés énergétiques quadratiques indépendants et en déduire la capacité thermique molaire d'un système.

8. Thermodynamique de la transformation chimique

La transformation de la matière a été abordée au début de la classe de MPSI ; les changements d'état du corps pur ont été évoqués et le critère d'évolution d'un système chimique en transformation a été présenté sans être démontré. Ce dernier a été utilisé au travers de l'étude de l'évolution des systèmes chimiques, étude restreinte au cas où une seule réaction modélise la transformation.

Le but de cette partie est double : d'une part aborder les transferts thermiques d'un système engagé dans une transformation chimique, et d'autre part établir et utiliser le critère d'évolution spontané d'un système chimique, ce qui nécessite l'introduction de la fonction G et du potentiel chimique.

On adopte pour les potentiels chimiques une expression générale $\mu_i(T,\text{composition}) = \mu_i°(T) + RT\ln(a_i)$ qui fait référence aux expressions des activités vues en première année. L'établissement de cette expression est hors programme. L'influence de la pression sur le potentiel chimique d'un constituant en phase condensée pure n'est pas abordée. On se limite aux cas d'une espèce chimique pure ou dans un mélange dans le cas de solutions aqueuses très diluées ou de mélanges idéaux de gaz parfaits, avec référence à l'état standard.

Les grandeurs standard de réaction sont introduites. Pour le calcul des grandeurs standard de réaction, les enthalpies et entropies standard de réaction sont supposées indépendantes de la température. D'une part, le calcul de ces grandeurs à 298 K à partir de tables de données thermodynamiques rend possible, pour un système engagé dans une transformation physico-chimique, une estimation du transfert thermique qui peut être confrontée à l'expérience. D'autre part, les grandeurs standard de réaction permettent la détermination de la valeur de la constante thermodynamique K° caractéristique d'une réaction, valeur qui était simplement donnée en première année. C'est ainsi l'occasion de revenir sur la détermination de la composition du système physico-chimique en fin d'évolution.

Pour un système en équilibre, le calcul de la variance permet, *via* l'identification méthodique des variables intensives de description, une caractérisation de l'état intensif de celui-ci par la détermination de son « nombre de degrés de liberté ». L'utilisation du théorème de Gibbs ne relève pas du programme.

La notion d'affinité chimique n'est pas utilisée, le sens d'évolution spontanée d'un système hors d'équilibre, à température et pression fixées, est déterminé par le signe de Δ_rG.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Enfin, l'étude de l'influence de la modification d'un paramètre (pression, température ou composition) sur un système chimique permet d'aborder la problématique de l'optimisation des conditions opératoires d'une synthèse. L'étude de tout ou partie d'une unité de synthèse industrielle est conduite à l'aide d'une approche documentaire.

Objectifs généraux de formation

Les compétences suivantes seront développées dans cette partie du programme :

- choisir de manière rigoureuse et décrire le système physico-chimique étudié ;
- distinguer modélisation d'une transformation chimique (réaction chimique et écriture de l'équation de réaction) et description quantitative de l'évolution d'un système prenant en compte les conditions expérimentales choisies pour réaliser la transformation ;
- utiliser des tables de données thermodynamiques ;
- confronter des grandeurs calculées à des mesures expérimentales.

Notions et contenus	Capacités exigibles
8.1 Application du premier principe à la transformation chimique	
État standard. Enthalpie standard de réaction. Enthalpie standard de changement d'état. Enthalpie standard de formation, état standard de référence d'un élément. Loi de Hess.	Déterminer l'enthalpie standard de réaction à l'aide de tables de données thermodynamiques ou de la loi de Hess.
Effets thermiques pour une transformation isobare : - transfert thermique causé par la transformation chimique en réacteur isobare isotherme (relation $\Delta H = Q_p = \xi \, \Delta_r H°$) ; - transformation chimique exothermique ou endothermique.	Prévoir le sens du transfert thermique entre le système en transformation chimique et le milieu extérieur. Évaluer la température atteinte par un système siège d'une transformation chimique supposée isobare et réalisée dans un réacteur adiabatique. **Mettre en œuvre une démarche expérimentale mettant en jeu des effets thermiques d'une transformation chimique.**
8.2 Application du second principe à la transformation chimique	
Potentiel thermodynamique ; enthalpie libre d'un système.	Justifier que G est le potentiel thermodynamique adapté à l'étude des transformations isothermes, isobares et spontanées.
Potentiel chimique ; enthalpie libre d'un système chimique.	Citer l'expression de la différentielle de G ; distinguer les caractères intensif ou extensif des variables utilisées. Définir le potentiel chimique à l'aide de la fonction G et donner l'expression (admise) du potentiel chimique d'un constituant en fonction de son activité. Exprimer l'enthalpie libre d'un système chimique en fonction des potentiels chimiques.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Enthalpie libre de réaction. Enthalpie libre standard de réaction. Relation entre $\Delta_r G$, $\Delta_r G°$ et Q_r ; évolution d'un système chimique. Entropie molaire standard absolue. Entropie standard de réaction $\Delta_r S°$.	Relier création d'entropie et enthalpie libre de réaction lors d'une transformation d'un système physico-chimique à p et T fixées. Prévoir le sens d'évolution à p et T fixées d'un système physico-chimique dans un état donné à l'aide de l'enthalpie libre de réaction. Déterminer les grandeurs standard de réaction à l'aide de tables de données thermodynamiques ou de la loi de Hess. Déterminer les grandeurs standard de réaction d'une réaction dont l'équation est combinaison linéaire d'autres équations de réaction. Interpréter ou prévoir le signe de l'entropie standard de réaction.
Constante d'équilibre ; relation de Van't Hoff. Relation entre $\Delta_r G$, K° et Q_r. État final d'un système : équilibre chimique ou transformation totale.	Définir la constante thermodynamique d'équilibre à partir de l'enthalpie libre standard de réaction. Prévoir le sens d'évolution à p et T fixées d'un système physico-chimique dans un état donné à l'aide de Q_r et K°. Énoncer et exploiter la relation de Van't Hoff. Déterminer la valeur de la constante d'équilibre thermodynamique à une température quelconque. Déterminer la valeur d'une constante d'équilibre thermodynamique d'une réaction par combinaison de constantes d'équilibres thermodynamiques d'autres réactions. Déterminer la composition chimique d'un système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. **Mettre une œuvre une démarche expérimentale pour déterminer la valeur d'une constante d'équilibre en solution aqueuse.**
Caractérisation de l'état intensif d'un système en équilibre : nombre de degrés de liberté (variance) d'un système à l'équilibre. Optimisation d'un procédé chimique : - par modification de la valeur de K° ; - par modification de la valeur du quotient réactionnel.	Reconnaître si une variable intensive est ou non un paramètre d'influence d'un équilibre chimique. Recenser les variables intensives pertinentes de description du système à l'équilibre pour en déduire le nombre de degrés de liberté de celui-ci. Identifier les paramètres d'influence et leur sens d'évolution pour optimiser une synthèse ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable. **Approche documentaire** : à partir de documents décrivant une unité de synthèse industrielle, analyser les choix industriels, aspects environnementaux inclus.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

9. Électrochimie

L'approche adoptée dans cette partie est principalement qualitative, et en dehors de l'étude thermodynamique d'une pile, elle ne requiert aucun formalisme physique ou mathématique.

Les caractéristiques générales des courbes courant-potentiel sont présentées sur différents exemples afin que les étudiants soient capables de proposer l'allure qualitative de courbes à partir d'un ensemble de données cinétiques et thermodynamiques fournies.
Ces courbes sont utilisées pour justifier ou prévoir le fonctionnement de dispositifs d'intérêt industriel, économique et écologique mettant en jeu la conversion énergie chimique-énergie électrique ou énergie électrique-énergie chimique , qu'ils soient sièges de réactions d'oxydoréduction spontanées (piles électrochimiques, piles à combustibles, phénomènes de corrosion humide) ou forcées (électrolyseurs et accumulateurs).

L'ensemble des aspects étudiés donne lieu à des activités expérimentales qui visent à illustrer les phénomènes présentés et à souligner l'intérêt des dispositifs électrochimiques pour la détermination de grandeurs thermodynamiques et électrochimiques.

Les approches documentaires permettent de mettre en évidence la complexité de ces dispositifs de conversion d'énergie, au-delà de l'aspect strictement électrochimique.

Objectifs généraux de formation

Les compétences suivantes seront développées dans cette partie du programme :

- choisir de manière rigoureuse et décrire le système physico-chimique étudié ;
- élaborer qualitativement des outils graphiques à partir d'un ensemble de données ;
- pratiquer un raisonnement qualitatif à partir de représentations graphiques.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
9.1. Approche qualitative de la cinétique électrochimique	
Surtension.	Décrire le montage à trois électrodes permettant de mesurer une surtension.
Allure des courbes courant-potentiel (intensité ou densité de courant) : - systèmes rapides et systèmes lents ; - nature de l'électrode ; - courant limite de diffusion ; - vagues successives ; - mur du solvant.	Associer vitesse de réaction électrochimique et intensité du courant. Reconnaître le caractère lent ou rapide d'un système à partir des courbes courant-potentiel. Identifier les espèces électroactives pouvant donner lieu à une limitation en courant par diffusion. À partir de relevés expérimentaux, associer l'intensité du courant limite de diffusion à la concentration du réactif et à la surface immergée de l'électrode. Donner l'allure qualitative de branches d'oxydation ou de réduction à partir de données de potentiels standard, concentrations et surtensions de « seuil ». **Mettre en œuvre un protocole expérimental utilisant des courbes courant-potentiel.**

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

9.2. Phénomènes de corrosion humide	
Transformations spontanées : notion de potentiel mixte.	Positionner qualitativement un potentiel mixte sur un tracé de courbes courant-potentiel.
Potentiel de corrosion, intensité de courant de corrosion, densité de courant de corrosion. Corrosion uniforme en milieu acide ou en milieu neutre oxygéné. Corrosion différentielle par hétérogénéité du support ou du milieu. .	Interpréter qualitativement un phénomène de corrosion uniforme à l'aide de données expérimentales, thermodynamiques et cinétiques. Citer des facteurs aggravants de la corrosion. Interpréter qualitativement un phénomène de corrosion différentielle faisant intervenir deux métaux à l'aide de courbes courant-potentiel.
Protection contre la corrosion : - revêtement ; - passivation ; - anode sacrificielle ; - protection électrochimique par courant imposé.	Exploiter des tracés de courbes courant-potentiel pour expliquer qualitativement : - la qualité de la protection par un revêtement métallique ; - le fonctionnement d'une anode sacrificielle. **Mettre en œuvre des protocoles illustrant les phénomènes de corrosion et de protection.**

9.3. Énergie chimique et énergie électrique : conversion et stockage	
Conversion énergie chimique en énergie électrique : Approche thermodynamique. Approche cinétique.	 Établir l'inégalité reliant la variation d'enthalpie libre et le travail électrique. Citer la relation entre la tension à vide d'une pile et l'enthalpie libre de réaction. Déterminer la capacité d'une pile en Ah. Utiliser les courbes courant-potentiel pour expliquer le fonctionnement d'une pile électrochimique et prévoir la valeur de la tension à vide. Citer les paramètres influençant la résistance interne du dispositif électrochimique. **Mettre en œuvre une démarche expérimentale utilisant des piles.**
Conversion énergie électrique en énergie chimique : Caractère forcé de la transformation. Électrolyseur. Recharge d'un accumulateur.	 Utiliser les courbes courant-potentiel pour expliquer le fonctionnement d'un électrolyseur et prévoir la valeur de la tension de seuil. Utiliser les courbes courant-potentiel pour justifier les contraintes dans la recharge d'un accumulateur. **Approche documentaire** : à partir de documents sur des accumulateurs (lithium ion, nickel-métal hydrure,…), comparer la constitution, le fonctionnement et l'efficacité de tels dispositifs.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Appendice 1 : matériel

Cette liste complète celle donnée en annexe 1 du programme de physique chimie de la classe de MPSI. Elle regroupe avec celle-ci le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée fournie sous forme de version papier ou numérique. Une utilisation de matériel hors de ces listes lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

1. **Domaine optique**
- Polariseur dichroïque
- Interféromètre de Michelson motorisé
- Capteur CCD

2. **Domaine électrique**
- Oscilloscope numérique avec analyseur de spectre
- Émetteur et récepteur dans le domaine des ondes centimétriques

3. **Domaine thermodynamique**
- Caméra thermique

Appendice 2 : outils mathématiques

Les outils mathématiques dont la maîtrise est nécessaire à la mise en œuvre du programme de physique de la classe de MP sont d'une part ceux qui figurent dans l'annexe 2 du programme de la classe de MPSI et d'autre part ceux qui figurent dans la liste ci-dessous.

Le thème « analyse vectorielle » n'a pas fait l'objet d'une rubrique en première année, l'expression des différents opérateurs introduits sont exigibles en coordonnées cartésiennes. Les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques et sphériques et les formules d'analyse vectorielle ne sont pas exigibles ; elles doivent donc être systématiquement rappelées.

Le thème « analyse de Fourier » prolonge l'étude de l'outil « séries de Fourier » abordée en MPSI et réutilisée en classe de MP, on étend la décomposition d'un signal périodique comme somme de ses harmoniques à l'expression d'un signal non périodique sous forme d'une intégrale (synthèse spectrale). Aucun résultat n'est exigible, on souligne en revanche la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale « utile » ($\Delta\omega$ ou Δk_x) et l'étendue caractéristique d'un signal non périodique (Δt ou Δx).

Dans le thème « équations aux dérivées partielles », aucune méthode générale d'étude n'est exigible : on se limite à chercher des solutions d'une forme donnée par substitution, menant ainsi soit à des équations différentielles classiques, soit à une relation de dispersion. L'accent sera mis sur le rôle des conditions aux limites.

Les capacités relatives à la notion de différentielle d'une fonction de plusieurs variables sont limitées à l'essentiel, elles seront mobilisées principalement dans le cours de chimie sur la thermodynamique de la transformation chimique ; les fondements feront l'objet d'une étude dans le cadre du chapitre « calcul différentiel » du cours de mathématique.

L'introduction d'éléments de thermodynamique statistique est l'occasion d'utiliser des notions simples sur les variables aléatoires.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Analyse vectorielle	
a) gradient.	Connaître le lien entre le gradient et la différentielle. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.
b) divergence.	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
c) rotationnel.	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
d) laplacien d'un champ scalaire.	Définir $\Delta f = \text{div}(\textbf{grad}\, f)$. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
e) laplacien d'un champ de vecteurs .	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes
f) cas des champs proportionnels à $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}.\mathbf{r})$ ou $\exp(i\mathbf{k}.\mathbf{r} - i\omega t)$	Exprimer l'action des opérateurs d'analyse vectorielle sur un tel champ à l'aide du vecteur $i\mathbf{k}$.
2. Analyse de Fourier	
Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni. Utiliser un raisonnement par superposition. Transposer l'analyse de Fourier du domaine temporel au domaine spatial.
Synthèse spectrale d'un signal non périodique.	Utiliser un raisonnement par superposition. Transposer l'analyse de Fourier du domaine temporel au domaine spatial. Citer et utiliser la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale « utile » ($\Delta\omega$ ou Δk_x) et l'étendue caractéristique d'un signal non périodique (Δt ou Δx).
3. Équations aux dérivées partielles	
Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de diffusion, équation de d'Alembert, équation de Schrödinger.	Identifier une équation aux dérivées partielles connue. Transposer une solution fréquemment rencontrée dans un domaine de la physique à un autre domaine. Obtenir des solutions de forme donnée par substitution. Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites.
4. Calcul différentiel	
Différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Dérivées partielles.	Connaître l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Identifier la valeur d'une dérivée partielle, l'expression de la différentielle étant donnée.
5. Variables aléatoires	
Variables aléatoires discrètes. Variables aléatoires à densité.	Espérance et écart-type d'une variable aléatoire discrète. Espérance d'une variable aléatoire à densité.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Appendice 3 : outils transversaux

La liste ci-dessous explicite un certain nombre d'outils transversaux dont la maîtrise est indispensable au physicien. Leur apprentissage progressif et contextualisé doit amener les étudiants au bout des deux années de CPGE à en faire usage spontanément quel que soit le contexte. S'agissant de l'analyse dimensionnelle, il convient d'éviter tout dogmatisme : en particulier la présentation de la dimension d'une grandeur par le biais de son unité dans le système international est autorisée. S'agissant de la recherche d'une expression par analyse dimensionnelle il ne s'agit en aucun cas d'en faire un exercice de style : en particulier le théorème Pi de Buckingham est hors-programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Analyse de pertinence	
Homogénéité d'une expression.	Contrôler l'homogénéité d'une expression, notamment par référence à des expressions connues.
Caractère scalaire ou vectoriel des grandeurs physiques présentes dans une expression.	Contrôler la compatibilité d'une expression avec le caractère scalaire ou vectoriel des grandeurs mise en jeu.
Caractère infinitésimal ou non infinitésimal des grandeurs physiques présentes dans une expression.	Contrôler la compatibilité d'une expression avec le caractère infinitésimal ou non infinitésimal des grandeurs mise en jeu.
Sens de variation d'une expression par rapport à un paramètre.	Interpréter qualitativement et en faire un test de pertinence.
Limites d'une expression pour des valeurs nulles ou infinies des paramètres.	Tester les limites d'une expression. Interpréter qualitativement ou en faire un test de pertinence.
Nullité d'une expression.	Repérer l'annulation d'une expression pour une valeur particulière d'un paramètre. Interpréter qualitativement ou en faire un test de pertinence.
Divergence d'une expression.	Repérer la divergence d'une expression pour une valeur particulière d'un paramètre. Interpréter qualitativement ou en faire un test de pertinence. Proposer éventuellement des éléments non pris en compte dans le modèle susceptibles de brider la divergence (frottements, non linéarités, etc…).

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Calcul numérique.	
Calcul numérique d'une expression.	Calculer sans outil l'ordre de grandeur (puissance de dix) d'une expression simple. Afficher un résultat numérique avec un nombre de chiffres significatifs cohérent avec les données et une unité correcte dans le cas d'un résultat dimensionné. Commenter un résultat numérique (justification d'une approximation, comparaisons à des valeurs de référence bien choisies, etc.). En faire un test de pertinence.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Outils de communication	
Tableaux de données numériques simples.	Transformer un tableau de données numériques en représentation graphique. Renseigner correctement les axes.
Exploitation d'une représentation graphique.	Repérer les comportements intéressants dans le contexte donné : monotonie, extrema, branches infinies, signes. Interpréter le caractère localement rectiligne selon qu'on travaille en échelles linéaire, semi-logarithmique ou log-log.
Schémas et figures.	Transposer un texte en une figure schématisant les éléments essentiels. Élaborer une courte synthèse à partir de plusieurs éléments graphiques : tableaux, schémas, courbes...

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Analyse dimensionnelle	
Dimension d'une expression.	Déterminer la dimension d'une expression, notamment par référence à des expressions connues.
Recherche d'une expression de type monôme par analyse dimensionnelle.	Déterminer les exposants d'une expression de type monôme $E=A^{\alpha}B^{\beta}C^{\chi}$ par analyse dimensionnelle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5. Analyse d'ordre de grandeur	
Comparaison en ordre de grandeur des différents termes d'une équation différentielle ou d'une équation aux dérivées partielles.	À partir d'une mise en évidence des échelles pertinentes d'un problème, évaluer et comparer l'ordre de grandeur des différents termes d'une équation afin de la simplifier en conséquence.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr