

Introduction.

On parle d'interférences de deux ondes quand l'intensité mesurée en un point est différente de la somme des intensités provenant de chaque source. Ce phénomène existe quelque soit la nature de l'onde en question (vagues à la surface de l'eau, ondes sonores, ondes électriques dans un circuit) mais revêt une importance particulière en optique. Il a en effet :

- d'une part contribué à comprendre la nature du fait lumineux, en confirmant son caractère ondulatoire, suggéré plus tôt par l'observation de la diffraction ;
- d'autre part, sa mise en application dans des instruments de mesure permet d'atteindre des précisions exceptionnelles, qu'il s'agisse de mesures de longueur ou encore de diamètre angulaire.

Conditions d'interférences : géométrie + cohérence temporelle + cohérence spatiale.

La durée τ des trains d'onde lumineux est toujours très faible : de 10^{-12} s pour une lampe à vapeur de mercure basse pression à 10^{-5} s pour certains lasers. Cette durée t est très largement supérieure à la pseudo-période T_0 des trains d'ondes dont la durée est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-7}$ m / $3 \cdot 10^8$ s $\sim 10^{-15}$ s.

En notant c la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, la longueur du train d'onde $l = c\tau$ s'appelle la longueur de cohérence. Dans le cas des exemples ci-dessus, la longueur de cohérence est de 0,3 mm pour la lampe à vapeur de mercure basse pression tandis qu'elle de 3 km pour le laser.

⇒ Une source ponctuelle sera dite cohérente temporellement si elle émet des trains d'onde de grande longueur de cohérence, c'est-à-dire si leur durée τ est très grande devant la pseudo-période T_0 . Dans ce cas, on considère que la lumière émise est pratiquement monochromatique de fréquence ν ; chaque train d'onde est une sinusoïde très faiblement amortie comportant des millions de périodes.

Superposition de deux ondes et sources étendues / cohérence spatiale :

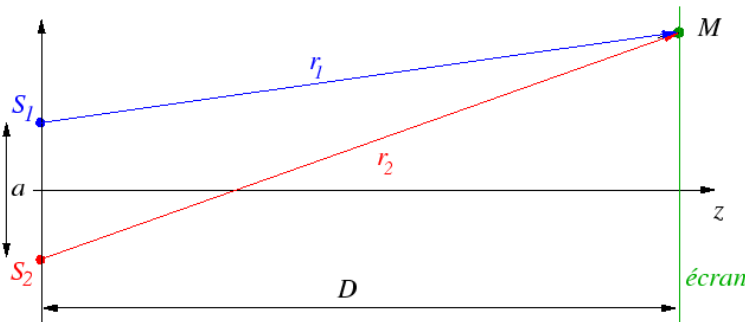
Pourquoi on ne peut pas observer des interférences avec le Soleil et un système standard de fentes ?

→ Expression de l'intensité.

- On considère deux sources S_1 et S_2 « images » d'une source S_a donnée. Ces deux sources sont éloignées de l'écran, ont même amplitude, pulsation et phase à l'origine nulle (géométrie, conditions de cohérence temporelle et pas de terme ϕ « à trainer »).

$$\mathcal{A}_1 = a_0 / r_1 \cos (kr_1 - \omega t + \phi) = \mathcal{A}_0 \cos (kr_1 - \omega t).$$

$$\mathcal{A}_2 = a_0 / r_2 \cos (kr_2 - \omega t + \phi) = \mathcal{A}_0 \cos (kr_2 - \omega t).$$



Ces deux sources, où $k = 2\pi / \lambda$ et $\omega = 2\pi/T$, sont cohérentes d'où :

$$\mathcal{A}_{tot} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_0 \{ \cos (kr_1 - \omega t) + \cos (kr_2 - \omega t) \} = 2 \mathcal{A}_0 \cos [k(r_1 + r_2)/2 - \omega t] \cdot \cos [k(r_2 - r_1)/2].$$

L'intensité I vaut $I_{mes} = \langle I \rangle = \langle \mathcal{A}_{tot} \cdot \mathcal{A}_{tot}^* \rangle = 2 \langle \mathcal{A}_{tot}^2 \rangle = 8 \mathcal{A}_0^2 \langle \cos^2 [k(r_1 + r_2)/2 - \omega t] \rangle \cos^2 [k(r_2 - r_1)/2] = 4 \mathcal{A}_0^2 \cos^2 [k(r_2 - r_1)/2] = 2 \mathcal{A}_0^2 [1 + \cos k(r_2 - r_1)].$

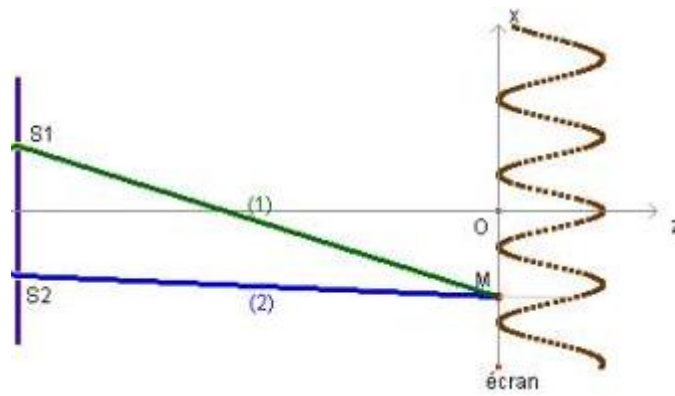
Soit : $I_{mes} = 2 I_0 [1 + \cos (k\delta)]$ avec $I_0 = \mathcal{A}_0^2$ et $\delta = r_2 - r_1$, le terme souligné est le terme remarquable, celui d'interférences.

- On se place dans le cas des franges d'interférence et ce avec deux conditions particulières :
 - $a \ll D$: sinon, les franges ne seront pas vues, l'interfrange étant alors trop petite,
 - $x \ll D$: sinon, ce ne sont pas les mêmes trains d'ondes qui interfèrent, la cohérence temporelle étant perdue.

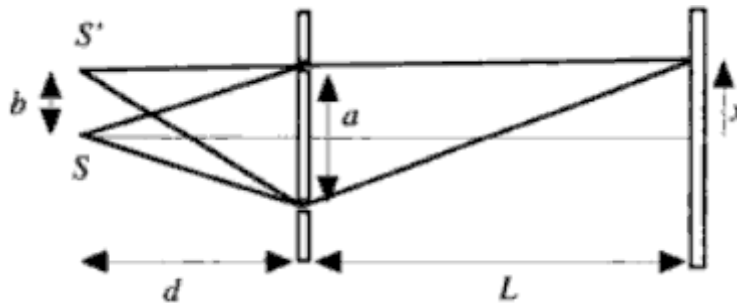
$$r_1 = D^2 + (x - a/2)^2 = (1/D) [1 + (x - a/2)^2/D^2]^{1/2} = D [1 + 1/2 (- ax/D^2 + x^2/D^2 + a^2/4D^2)]$$

$$r_2 = D^2 + (x + a/2)^2 = \dots \dots \dots = D [1 + 1/2 (+ ax/D^2 + x^2/D^2 + a^2/4D^2)]$$

Soit : $\delta = r_2 - r_1 = D \cdot 1/2 \cdot 2 \cdot ax/D^2 = ax/D$



- Or on s'intéresse à une source étendue dont les sources asynchrones n'auront pas parcouru la même distance jusqu'aux fentes d'où :
 - une différence de marche supplémentaire $\delta' = r_2' - r_1' = ay / d$ ajouté à $\delta = r_2 - r_1 = ax / D$,
 - une intégration sur l'axe y le long de la source étendue de $-b/2$ à $+b/2$.



Ainsi

$$\begin{aligned}
 I_{\text{mes}} &= 2 (I_0 / b) \int_{-b/2}^{+b/2} [1 + \cos (ka \{x / D + y / d\})] dy \\
 &= 2 (I_0 / b) [b + (d/ka) [\sin (ka \{x / D + y / d\})]_{-b/2}^{+b/2}] \\
 &= 2 I_0 [1 + (d/kab) [\sin (ka \{x / D + b / 2d\}) - \sin (ka \{x / D - b / 2d\})]] \\
 &= 2 I_0 [1 + 2(d/kab) \cos (kax/D) \sin (kab/2d)] \\
 &= 2 I_0 [1 + \text{sinc} (kab/2d) \cos (kax/D)]
 \end{aligned}$$

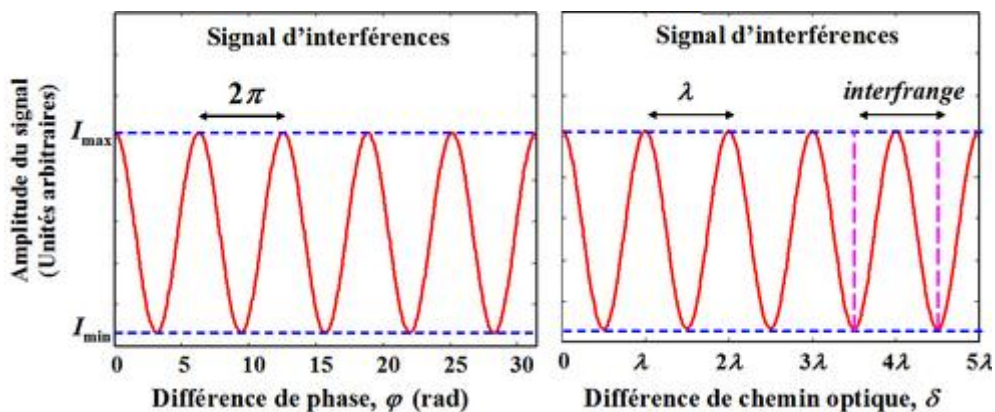
On définit la visibilité des franges par le facteur de contraste C où :

$$C = (I_{\text{max}} - I_{\text{min}}) / (I_{\text{max}} + I_{\text{min}}).$$

→ **Exploitation.**

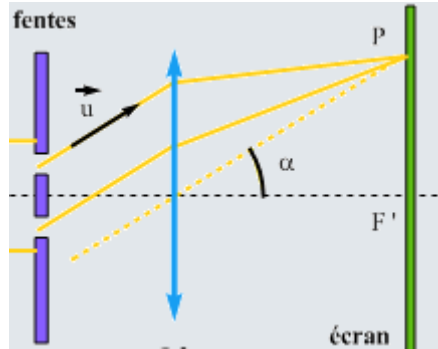
- Cas $b=0$: $I_{\text{mes}} = 2 I_0 [1 + \cos (kax/D)]$.
 - Si le cos est maximal (= 1), alors $I_{\text{mes}} = 4 I_0 \rightarrow$ les interférences sont un bon moyen pour concentrer l'énergie.
 - Le contraste vaut $C = [(1+1) - (1-1)] / [(1+1) + (1-1)] = 1$ et est alors maximal pour une source ponctuelle.
 - Les interférences sont constructives pour $k\delta = 2\pi p$ [ordre entier], destructives pour $k\delta = 2\pi(p + 1/2)$ [ordre 1/2-entier].
 - On définit l'interfrange : $kai/D = 2\pi i / (\lambda D) = 2\pi$ soit $i = \lambda D / a$. [dilatation et transformée de Fourier pour retrouver la formule].

AN : $\lambda = 5.10^{-7} \text{ m}, D = 10 \text{ m}, a = 10^{-1} \text{ m} \rightarrow i = 5.10^{-5} \text{ m} = 50 \mu\text{m}$; franges microscopiques.
 $\lambda = 5.10^{-7} \text{ m}, D = 10 \text{ m}, a = 10^{-3} \text{ m} \rightarrow i = 5.10^{-3} \text{ m} = 5 \text{ mm}$; franges observables.

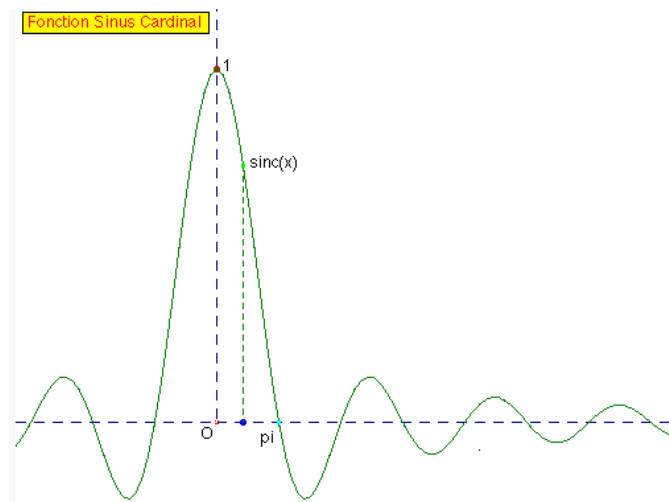


- En pratique, on peut observer non pas à $D = 10$ m entre les fentes et l'écran, mais plus près en utilisant une lentille convergente de distance focale f . En effet, avec une telle lentille, $\delta = ax / D$ avec d'une part $\delta = a \sin \theta \approx a \theta$ et d'autre part $x = f \tan \theta = f \theta$ soit $1 = f / D \leftrightarrow D = f$.

On peut ainsi se permettre d'avoir, avec une lentille de distance focale de 20 cm par exemple, une figure d'interférences raisonnable et proche du montage alors qu'il eut fallu auparavant sans lentille une distance de plusieurs mètres entre les fentes et l'écran.



- Cas $b \neq 0$:

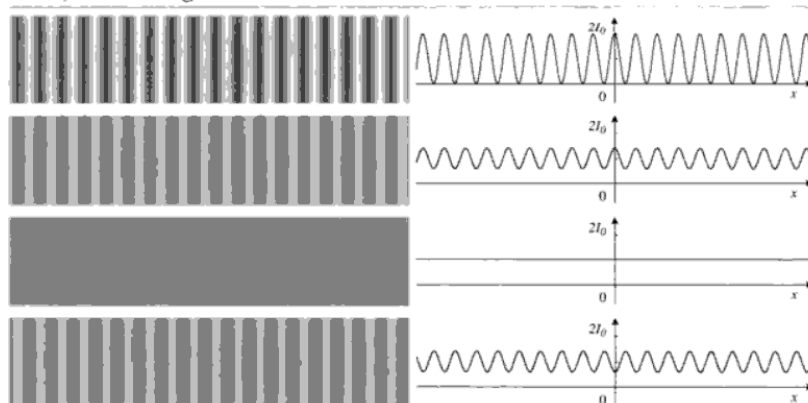


- Ce que l'on appelle le brouillage intervient pour l'annulation du sinus cardinal soit $kab/2d = \pi ab / \lambda d = \pi \leftrightarrow ab = \lambda d \leftrightarrow \boxed{D_{\text{brouillage}} = \lambda d / a}$.

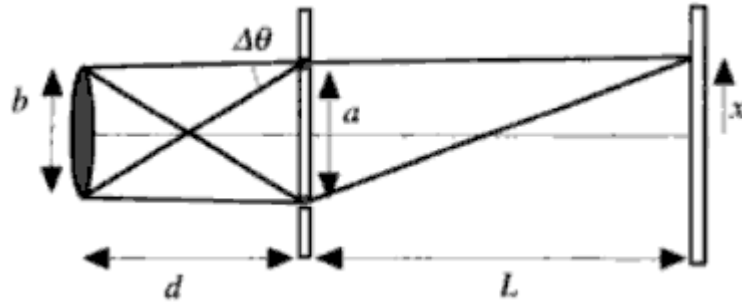
Dans ce cas, l'intensité I_{mes} vaut $2 I_0$ et $V = (1-1) / (1+1) = 0$: les interférences ont disparu, l'écran est illuminé de manière homogène.

- AN : $\lambda = 5.10^{-7}$ m, $d = 0,5$ m, $a = 10^{-3}$ m $\rightarrow b = 2,5.10^{-4}$ m = 0,25 mm ;
si la source est plus grande que 0,25 mm, on aura alors brouillage.
 $\lambda = 5.10^{-7}$ m, $d = 0,5$ m, $a = 10^{-3}$ m
- La figure est donc modulée par le sinus cardinal. A l , b et d fixés, selon la valeur de b , le contraste peut être maximal, décroître, s'annuler (c'est le brouillage) ou encore s'inversé (c'est l'inversion de contraste qui se produit pour $\pi ab / \lambda d = 3\pi / 2 \leftrightarrow b = 3\lambda d / 2a$).

FIG 3.24 Brouillage des franges pour $\pi aL / \lambda d = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Les franges du bas sont inversées par rapport à celles du haut, les franges sombres étant remplacées par des franges brillantes et vice versa.



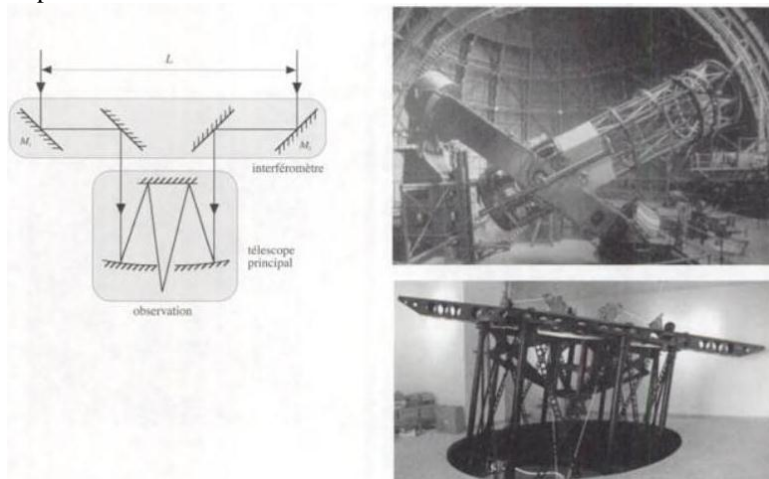
- On peut considérer la cohérence spatiale sous un autre point de vue. En fixant la taille de la source, la cohérence spatiale est aussi perdue si les fentes sont trop écartés l'une de l'autre. On n'observe les franges que si :
 $ab < \lambda d \Leftrightarrow b/d < \lambda/a$ où b/d est l'angle que font entre eux les rayons qui passent par chaque fente.



AN : $b = 1\,400\,000\text{ km}$; $d = 150\,000\,000\text{ km}$: $b/d = 10^{-2}\text{ rad} = 0,573^\circ \sim 30\text{ minutes d'arc}$
 $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}\text{ m}$; $a = 5 \cdot 10^{-4}\text{ m}$: $\lambda/a = 10^{-3}\text{ rad}$

On ne peut donc pas observer des interférences avec le Soleil et des fentes séparés de 0,5 mm !

- Une méthode pour déterminer le diamètre angulaire d'une seule source distante de lumière est d'utiliser une expérience des trous d'Young pour laquelle la séparation a entre les fentes est variable. Ainsi la figure d'interférence disparaît pour une séparation entre les fentes égale à $\lambda/(b/d)$. C'est la méthode employée par l'interféromètre stellaire de Michelson.
 - ✓ Pour Bételgeuse, $b/d = 0,047\text{ s d'arc} = 2,3 \cdot 10^{-7}\text{ rad}$ et $\lambda = 7 \cdot 10^{-7}\text{ m}$, on observe ainsi un brouillage des fentes pour un écartement entre les miroirs (« fentes ») de $\lambda/(b/d) = 3\text{ m}$.
 - ✓ De plus, la position relative des miroirs doit être réglée avec une précision meilleure que le micron, afin de garder la cohérence temporelle !



- En résumé, si l'angle (b/d) est trop grand, c'est-à-dire si l'on sépare trop les rayons spatialement, les interférences disparaissent. Ainsi les dispositifs à division du front d'onde sont particulièrement affectés par ce phénomène : ils divisent spatialement l'onde incidente et créent différents rayons faisant entre eux un angle non nul. On peut s'affranchir du problème de cohérence spatiale avec les dispositifs à division d'amplitude, qui n'opèrent pas cette division spatiale (au prix cependant de la perte de non-localisation des interférences).

Conclusion.

Si nous n'observons pas de figure d'interférences dans la vie quotidienne, cela est dû aux deux raisons suivantes :

- les sources qui nous entourent ont une largeur spectrale très grande ce qui conduit à un recouvrement des figures d'interférences. On parle de perte de cohérence temporelle en comparaison à une source parfaitement monochromatique ;
- les sources qui nous entourent sont souvent étendues ce qui conduit aussi à un recouvrement des figures d'interférences. On parle de perte de cohérence spatiale en comparaison à une source parfaitement ponctuelle.

Il existe toutefois un moyen d'obtenir des interférences avec des sources de tailles quelconques : ces systèmes se nomment systèmes à division d'amplitude. De tels systèmes permettent d'observer des interférences plus lumineuses et contrastées, le prix à payer étant la perte de non-localisation des franges : on doit ainsi se placer dans un plan d'observation bien particulier, celui où les franges sont localisées.

Enfin, comme dit en introduction, il existe des interférences autres que dans le domaine de l'optique. Citons ainsi les expériences de fentes d'Young réalisées avec des atomes préalablement refroidis par laser au millikelvin. La distribution des impacts des atomes à l'arrivée étant la même que celle de l'intensité lumineuse dans le même dispositif, avec des franges d'interférences au même endroit, pourvu que la relation de Louis de Broglie $\lambda = h/p$ soit satisfaite. (Bien entendu, il faut, dans ce cas précis, tenir compte de ce que les atomes soient uniformément répartis).

Dispositifs expérimentaux pour l'interférométrie : « Michelson » utilisé en coin d'air pour l'observation d'anneaux.

→ Franges d'égale inclinaison : calcul de δ .

Calculons la différence de marche δ entre les rayons (1) et (2) en faisant apparaître une surface d'onde pour éliminer les contributions infinies HM_∞ et KM_∞ qui sont égales. Alors :

$$\delta_{M,S} = (SM_\infty) - (KM_\infty) = (IJ) + (JK) - (IH) = IJ + JK - IH.$$

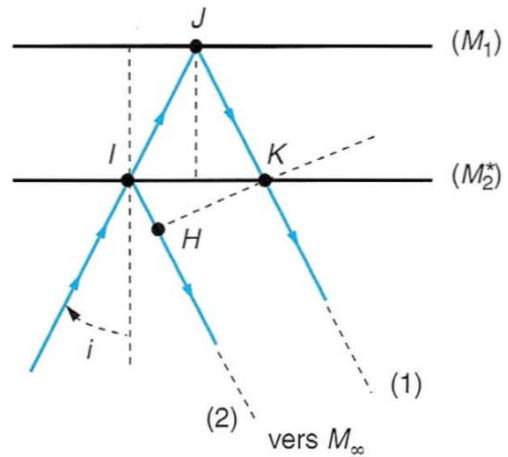
Si e désigne l'épaisseur de la lame, on a :

$$e = IJ \cos i = JK \cos i ; \quad IH = IK \sin i \text{ avec } IK = 2e \tan i$$

Soit :

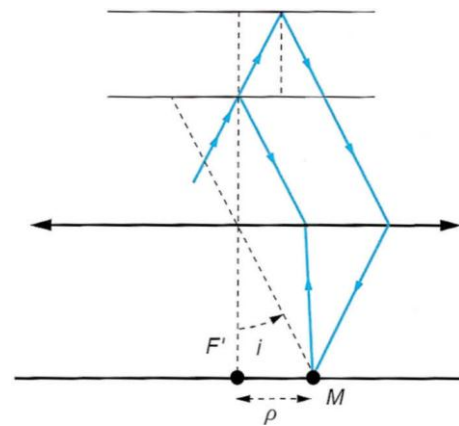
$$\delta_{M,S} = 2e/\cos i - 2e \sin i \tan i = 2e/\cos i - (2e \sin^2 i) / \cos i = 2e (1 - \sin^2 i) / \cos i$$

Soit finalement : $\boxed{\delta = 2e \cos i}$.



→ Nature des franges d'égale inclinaison.

Les franges sont les points à l'infini tels que $d = \text{constante}$, cad $i = \text{constante}$, ce qu'on justifie qu'on les appelle franges d'égales inclinaison. Ces franges sont des cercles centrés sur la normale aux miroirs. On peut les observer à distance finie dans le plan focal-image d'une lentille mince convergente de distance focale f dont l'axe optique est confondu avec la normale aux miroirs. Pour obtenir un champ le plus vaste possible, on place un diffuseur entre la source et l'interféromètre.



La frange centrale correspondant à $i = 0$ est quelconque. En effet, l'ordre d'interférence y est égal à $p_0 = 2e/\lambda_0$: il peut être entier, demi-entier ou ni l'un, ni l'autre. Avec $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$, il suffit de faire varier e de 150 nm pour transformer une frange centrale brillante en frange centrale sombre. Ce calcul numérique montre aussi comment un interféromètre permet une mesure de distance macroscopique avec une distance meilleure que la longueur d'onde.

→ Rayons des franges brillantes.

Dans le cas où la frange centrale ($i=0$) est brillante, c'est-à-dire où $p_0 = 2e / \lambda_0$ est entier, cherchons les rayons des franges brillantes. Celles-ci correspondent à un ordre d'interférence entier ; se déplaçant vers les rayons extérieurs (i augmente), la différence de marche $\delta = (p_0 - n) \lambda_0$ diminue (la fonction cosinus est décroissante), on a ainsi nécessairement $p = p_0 - n$, soit :

$$(p_0 - n) \lambda_0 = p_0 \lambda \cos i_n \leftrightarrow 1 - \cos i_n = n / p_0$$

Dans l'approximation de Gauss, on remplace $1 - \cos i_n$ par son développement à l'ordre le plus bas non nul soit $i_n^2/2$ et on obtient le rayon $\rho_n = f i_n$ de la nième frange brillante :

$$\{i_n^2/2 = \rho_n^2/(2 f^2)\} = n / p_0 \leftrightarrow \rho_n = f \sqrt{2 n / p_0}$$

D'où en remplaçant p_0 par son expression $p_0 = 2e / \lambda_0$:

$$\boxed{\rho_n = f \sqrt{n} \sqrt{[\lambda_0 / e]}}$$

