— Mathématiques — Cours —
— Champs scalaires et vectoriels —

1 Définitions

• Soit un système physique ayant une localisation particulière dans l'espace $\mathcal{E}$. Les propriétés de ce système peuvent être décrites par des grandeurs, fonctions des points de l'espace $\mathcal{E}$, appelées **champs**.
• Champs les plus courants :
- **Champ scalaire** : champ dont la valeur en tout point où il est défini est un nombre. Exemples : champ de pression dans un fluide, champ de température dans un métal ...
- **Champ vectoriel** : champ dont la valeur en tout point de l'espace où il est défini est un vecteur de l'espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$. Exemples : champ électrique, champ des vitesses d'un solide, champ de gravitation ...

• Champ uniforme : dans une région de l'espace, un champ uniforme garde une seule et même valeur.
Exemple : accélération de la pesanteur terrestre (en première approximation).

• Surface de niveau d'un champ scalaire : ensemble des points où un champ scalaire non uniforme conserve une même valeur.

• Courbe de niveau : intersection d'une surface de niveau avec une autre surface.
Exemple : courbes (ou lignes) de niveau du champ altitude : intersection des surfaces de niveau du champ altitude avec le sol.

• Ligne de champ d'un champ vectoriel : $\overrightarrow{V}(M)$ est tangent en chaque point de la courbe. L'équation de la ligne de champ est donnée par : $\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{0}$.

2 Gradient d'un champ scalaire

2.1 Définition et propriétés

Le gradient au point M_0 du champ scalaire f est défini par : $df = (\overrightarrow{\text{grad}} f)(M_0) \cdot d\overrightarrow{OM}$, où df est la différentielle en M_0 du champ et $d\overrightarrow{OM}$ celle du champ vectoriel position (appelé déplacement élémentaire).
Propriétés immédiates :
- $\overrightarrow{\text{grad}}(f+g) = \overrightarrow{\text{grad}}(f) + \overrightarrow{\text{grad}}(g)$
- $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\overrightarrow{\text{grad}}(g) + \overrightarrow{\text{grad}}(f)g$

2.2 Opérateur gradient

Opérateur gradient (nabla), $\overrightarrow{\nabla}$: opérateur qui à chaque champ scalaire différentiable associe un champ vectoriel, le champ de gradient.

- Expression en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \overrightarrow{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

- Expression en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \overrightarrow{e_r}\frac{\partial}{\partial r} + \overrightarrow{e_\theta}\frac{\partial}{r\partial \theta} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

- Expression en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \overrightarrow{e_r}\frac{\partial}{\partial r} + \overrightarrow{e_\theta}\frac{\partial}{r\partial \theta} + \overrightarrow{e_\phi}\frac{\partial}{r\sin\theta\partial \phi}$$

2.3 Direction et sens du gradient

En tout point le gradient du champ scalaire f est perpendiculaire à la surface de niveau passant par ce point et il est dirigé suivant la direction de variation la plus rapide de f, dans le sens des valeurs croissantes de f.
Exemple : les torrents de montagne matérialisent les lignes de champ de l'<u>opposé</u> du gradient de l'altitude.

3 Intégrale curviligne d'un champ

3.1 Définition

Soit f un champ défini en tout point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ d'une courbe (Γ). L'abcisse curviligne s étant définie sur cette courbe, on considère l'**intégrale curviligne** de f sur l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ donnée par :

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\, ds = \int_{s_a}^{s_b} f(x(s), y(s), z(s))\, ds$$

Remarque : Pour un paramètre quelconque la même intégrale curviligne se calcule par l'intégrale suivante :

$$I = \int_{t_A}^{t_B} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}\, dt$$

3.2 Circulation d'un champ vectoriel

Soient $\overrightarrow{V}(M)$ un champ vectoriel et (Γ) une courbe définis dans une région de l'espace. La **circulation** le long de (Γ) du champ vectoriel est définie par l'intégrale curviligne du champ scalaire $\overrightarrow{V}(M) \cdot \overrightarrow{e_t}(M)$ où $\overrightarrow{e_t}(M)$ est le vecteur unitaire tangent à (Γ) en M. On a donc :

$$C_\Gamma = \int_\Gamma \overrightarrow{V}(M) \cdot \overrightarrow{e_t}(M)\, ds = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{V}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} = C_{\widehat{AB}}$$

Exemple : travail d'un champ de force le long de l'arc $\widehat{AB}$: $W = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$

3.3 Cas particulier : circulation d'un champ de gradient

Soit l'arc de courbe $\widehat{AB}$ sur lequel on cherche à calculer la circulation du champ $\overrightarrow{V}(M) = (\overrightarrow{\text{grad}} f)(M)$:

$$\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{V}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_{\widehat{AB}} (\overrightarrow{\text{grad}} f)(M) \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_{f(A)}^{f(B)} df = f(B) - f(A)$$

La circulation ne dépend donc pas du chemin suivi par le point M entre A et B.
En physique, lorsqu'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}(M)$ est un champ de gradient, on dit qu'il dérive d'un **potentiel scalaire** $\Phi(M)$, ce qui signifie que $\overrightarrow{V}(M) = -(\overrightarrow{\text{grad}}\Phi)(M)$. La circulation de $\overrightarrow{V}$ d'un point A à un point B ne dépend pas du chemin suivi et vaut donc

$$\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{V}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} = \Phi(A) - \Phi(B)$$

Cette différence est souvent désignée comme la chute de potentiel entre A et B. Dans le cas d'un champ de force, le potentiel U dont dérive $\overrightarrow{F}$ est l'énergie potentielle : $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}U$.
On remarque que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel Φ
- $\overrightarrow{V}$ est **conservatif**
- $\exists$ un champ scalaire Φ tel que $\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{\text{grad}}\Phi$
- $\overrightarrow{V}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}$ est une forme différentielle exacte ($= -d\Phi$)
- la circulation de $\overrightarrow{V}$ entre deux points A et B est indépendante du chemin effectivement suivi
- la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de tout contour fermé est nulle

Exemple : potentiel électrostatique pour le champ électrostatique

4 Flux d'un champ vectoriel à travers une surface

Par définition le **flux** d'un champ vectoriel $\overrightarrow{v}$ à travers une surface (Σ) vaut :

$$\Phi = \iint_\Sigma \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}\, d\sigma$$

4.1 Angle solide

Soit un observateur placé en O et observant un objet de forme quelconque. Pour être vu de l'observateur, imaginons que cet objet émette de la lumière. Les rayons lumineux parvenant en O forment alors un cône de lumière qui s'appuie sur le contour apparent de l'objet et qui a pour sommet O. La portion de l'espace ainsi délimitée est l'**angle solide** sous lequel, depuis O, on voit l'objet. On conçoit que cette région de l'espace aurait pu être définie de manière équivalente à partir de la surface d'intersection entre le cône et une sphère de centre O et de rayon r. Ceci permet de définir l'angle solide par le rapport :

$$d\Omega = d\sigma \overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{n}/r^2$$

où $\overrightarrow{e_r}$ désigne le vecteur unitaire de la direction OM, M repérant un point sur la surface observée depuis O. On note l'analogie avec la définition d'un angle : $d\alpha = dl/r$ comme rapport de la longueur de l'arc intersecté par un cercle de rayon r.
Unités : radian (rd ou rad) pour un angle, stéradian (sr) pour un angle solide.
L'angle solide sous lequel est vue une surface fermée d'un point situé à l'intérieur de cette surface vaut 4π sr.

4.2 Théorème de Gauss pour les champs en $1/r^2$

Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{V} = K\overrightarrow{e_r}/r^2$. Le flux de ce champ à travers un élément de surface $d\Sigma$ situé à une distance r de O, d'aire $d\sigma$ et de normale unitaire $\overrightarrow{n}$ est :

$$d\phi = K\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{n}/r^2\, d\sigma = Kd\Omega$$

Il est proportionnel à l'angle solide sous lequel est vu $d\Sigma$ du point O. On choisit par convention d'orienter les surfaces vers l'extérieur.
Considérons alors une surface fermée Σ. Suivant l'orientation de $\overrightarrow{e_r}$, les contributions élémentaires $d\phi$ au flux total à travers Σ vont être positives ou négatives.
Lorsque le point O est intérieur à la surface, le flux total sera donc $\phi = K\iint_\Sigma d\Omega = K4\pi$.
Lorsque le point O est extérieur à la surface, l'angle solide sous lequel on voit la surface depuis O intervient une fois avec le signe $+$ et une fois avec le signe $-$, le flux total est donc nul.
Théorème : le flux d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V} = K\overrightarrow{e_r}/r^2$ sortant à travers une surface fermée Σ est égal à

- $4\pi K$ si le point O est situé à l'intérieur de Σ
- $2\pi K$ si le point O est un point régulier de Σ
- 0 si le point O est extérieur à Σ

5 Divergence et rotationnel d'un champ vectoriel

5.1 Divergence

C'est par définition le champ scalaire : $\text{div}(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V}$. Il découle immédiatement que

- $\text{div}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = \text{div}(\overrightarrow{A}) + \text{div}(\overrightarrow{B})$
- $\text{div}(f\overrightarrow{A}) = f\text{div}(\overrightarrow{A}) + (\overrightarrow{\text{grad}}f) \cdot \overrightarrow{A}$

si $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ désignent des champs vectoriels et f un champ scalaire.
Dans un système de coordonnées (u, v, w) quelconque, où

$$d\overrightarrow{OM} = N_u du\overrightarrow{e_u} + N_v dv\overrightarrow{e_v} + N_w dw\overrightarrow{e_w}$$

la divergence s'écrit

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{A}) = \frac{\overrightarrow{e_u}\cdot}{N_u}\frac{\partial}{\partial u}(A_u\overrightarrow{e_u}+A_v\overrightarrow{e_v}+A_w\overrightarrow{e_w})+\frac{\overrightarrow{e_v}\cdot}{N_v}\frac{\partial}{\partial v}(A_u\overrightarrow{e_u}+A_v\overrightarrow{e_v}+A_w\overrightarrow{e_w})+\frac{\overrightarrow{e_w}\cdot}{N_w}\frac{\partial}{\partial w}(A_u\overrightarrow{e_u}+A_v\overrightarrow{e_v}+A_w\overrightarrow{e_w})$$

ce que l'on peut écrire aussi :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{A}) = \frac{1}{N_uN_vN_w}(\frac{\partial}{\partial u}(A_uN_vN_w) + \frac{\partial}{\partial v}(N_uA_vN_w) + \frac{\partial}{\partial w}(N_uN_vA_w))$$

Formule de la divergence : elle exprime un lien existant entre le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée Σ et l'intégrale sur le volume $\mathcal{V}$ délimité par cette surface de la divergence du champ vectoriel, soit

$$\oiint_{\Sigma}\overrightarrow{V}\cdot d\overrightarrow{\sigma} = \iiint_{\mathcal{V}}\mathrm{div}\overrightarrow{V}d\mathcal{V}$$

5.1.1 Equation de continuité

Exemple de l'écoulement d'un fluide dans un tuyau. Soit un domaine $\mathcal{D}$. Entre t et $t+dt$ une certaine quantité de fluide entre et sort de ce domaine et la masse volumique ρ a donc pu varier, si l'on suppose que le domaine n'a pas changé. Suivant un raisonnement classique (identique à la discussion préliminaire à la définition du flux), la masse de fluide ayant quitter (algébriquement) le domaine est égale au flux du champ vectoriel $\rho\overrightarrow{v}dt$, où $\overrightarrow{v}$ désigne le champ de vitesse d'écoulement du fluide. La conservation de la matière impose la condition :

$$\iiint_{\mathcal{D}}\rho(t+dt)d\mathcal{V} - \iiint_{\mathcal{D}}\rho(t)d\mathcal{V} = \oiint_{\Sigma}\rho\overrightarrow{v}\cdot d\overrightarrow{\sigma}dt$$

En transformant la dernière intégrale par la formule de la divergence, en intégrale sur $\mathcal{D}$, on obtient :

$$\iiint_{\mathcal{D}}(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\overrightarrow{v}))d\mathcal{V} = 0$$

Localement ($\mathcal{D}$ état tout à fait quelconque) ceci se traduit par l'**équation de continuité** :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\overrightarrow{v}) = 0$$

Cette équation traduit la conservation de la matière, de la charge ...

5.2 Rotationnel d'un champ vectoriel

Par définition, il s'agit du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V}$. Ses propriétés immédiates sont :

- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{A}) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{B})$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\overrightarrow{A}) = f\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{A}) + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)\times\overrightarrow{A}$
- $\mathrm{div}(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{A})\cdot\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{B})$

si $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ désignent des champs vectoriels et f un champ scalaire.

5.3 Expressions du rotationnel

L'expression du rotationnel dans un système de coordonnées (u, v, w) quelconques est :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{A}) = \frac{1}{N_u N_v N_w} \begin{vmatrix} N_u \overrightarrow{e_u} & \frac{\partial}{\partial u} & N_u A_u \\ N_v \overrightarrow{e_v} & \frac{\partial}{\partial v} & N_v A_v \\ N_w \overrightarrow{e_w} & \frac{\partial}{\partial w} & N_w A_w \end{vmatrix}$$

5.4 Formule du rotationnel

Elle relie la circulation d'un champ vectoriel le long d'une courbe fermée Γ au flux du rotationnel de ce champ à travers toute surface Σ qui s'appuie sur Γ. Plus précisément

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{OM} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{\sigma}$$

5.5 Terminologie

champ $\overrightarrow{V}$		$\text{div}\overrightarrow{V}$	$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V}$
uniforme	$V_x = V, V_y = V_z = 0$	0	$\overrightarrow{0}$
divergent	$V_r = V, V_\theta = V_z = 0$	$V/r \geq 0$	$\overrightarrow{0}$
convergent	$V_r = -V, V_\theta = V_z = 0$	$-V/r \leq 0$	$\overrightarrow{0}$
tournant	$V_r = 0, V_\theta = V, V_\phi = 0$	0	$V/r\overrightarrow{e_z}$

Divergence et rotationnel sont non nuls respectivement pour des sources (ou des puits) et des vortex. Ceci permet d'avoir une vision "géométrique" de ces quantités.

5.6 Application répétée des opérateurs vectoriels

On peut démontrer les propriétés suivantes (en cartésiennes par exemple) :

- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}})f = \overrightarrow{0}$
- $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}})\overrightarrow{V} = 0$

Ces deux relations ramènent respectivement aux notions de **champ conservatif** et **champ à flux conservatif**. En effet, on a vu qu'un champ conservatif avait une circulation nulle sur un contour fermé. On voit ici que c'est équivalent à l'énoncé "un champ conservatif dérive d'un potentiel" :

$$\oint \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{OM} = \iint \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{\sigma} = \iint \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overrightarrow{\sigma} = 0$$

De même on pourra dire que les champs à flux conservatif dérivent d'un potentiel vecteur : $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A}$. On a alors :

$$\iint \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{\sigma} = \iiint \text{div}(\overrightarrow{V}) d\mathcal{V} = \iiint \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A}) = 0$$

Les énoncés "$\overrightarrow{V}$ est à flux conservatif" et "$\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel vecteur" sont bien équivalents.

Il existe deux autres opérateurs différentiels importants, ce sont les opérateurs du deuxième ordre appelés Laplaciens :

- Laplacien scalaire : $\Delta(f) = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f)$
- Laplacien vectoriel : $\overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div} \overrightarrow{V}) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}} \overrightarrow{V})$

Application : équation de Laplace en électrostatique

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{E}) = \rho/\epsilon_0 \Leftrightarrow \Delta U + \rho/\epsilon_0 = 0$$