A.E. 95; PARTIE A

PARTIE A

ONDES STATIONNAIRES, MODES PROPRES ET RÉSONANCE EN MÉCANIQUE

A.1. OSCILLATEURS COUPLÉS.

A.1.*a*. Décrire brièvement une expérience mettant en évidence les régimes libres d'oscillation de deux oscillateurs couplés en mécanique. Dégager la notion de ***mode propre*** (définition et mise en évidence). Dans le cas d'oscillateurs faiblement couplés qu'observe-t-on lorsque à la date $t = 0$, on écarte un seul des oscillateurs de sa position de repos ; qu'illustre cette observation ? Quelle est l'influence qualitative des frottements (supposés faibles) ?

A.1.*b*. Décrire brièvement une expérience permettant d'étudier la réponse en régime sinusoïdal forcé de fréquence f de deux oscillateurs couplés en mécanique. Tracer l'allure des graphes donnant l'amplitude des oscillateurs en fonction de la fréquence f et dégager la notion de ***résonance*** et d'***antirésonance***. Quelle est l'influence qualitative des frottements (supposés faibles) ?

A.1.*c*. On considère la chaîne d'oscillateurs couplés représentée sur la figure 1. Tous les points matériels M_n ont même masse m ; à l'équilibre ils sont confondus avec les points A_n d'abscisse na où n est un entier quelconque et a une constante donnée ; hors d'équilibre, ils sont susceptibles de se déplacer le long de Ox et on note leur abscisse $x_n(t) = na + u_n(t)$.

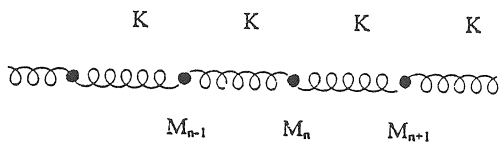

Figure 1

Chaque masse est reliée à ses deux voisines par des ressorts de même longueur à vide égale à a et de même raideur K. On ne tient pas compte de la pesanteur. u_n est assez petit pour qu'il n'y ait pas de choc entre deux points matériels M_n voisins.

A.1.*c*.1. Établir l'équation différentielle du mouvement de M_n et la mettre sous la forme

$\dfrac{d^2 u_n}{dt^2} + \omega_0^2 \dfrac{2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}}{2} = 0$. Donner l'expression de ω_0 (en fonction de m et K) et sa dimension.

A.1.*c*.2. La chaîne est infinie ($-\infty < n < +\infty$). On fait l'***approximation des milieux continus***, c'est-à-dire qu'on définit une fonction $u(x, t)$ variant très peu à l'échelle de a et telle que $u_n(t) = u(x = na, t)$.

En faisant un développement de Taylor pour $u_{n+1}(t) - u_n(t) = u(x + a, t) - u(x, t)$ et pour $u_{n-1}(t) - u_n(t) = u(x - a, t) - u(x, t)$ (à l'ordre 2 en a), montrer que $u(x, t)$ est solution d'une équation de propagation de d'Alembert de la forme $c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ où c est une constante à exprimer en fonction de a et ω_0.

A.2. CORDE VIBRANTE.

A.2.*a*. **Expérience de la corde de Melde.**

Décrire brièvement le dispositif de l'expérience de la corde de Melde. Qu'observe-t-on suivant les valeurs de la fréquence f d'excitation de la corde ?

À quelles(s) mesure(s) quantitative(s) peut donner lieu cette expérience ?

A.2.*b*. **Équation des cordes vibrantes.**

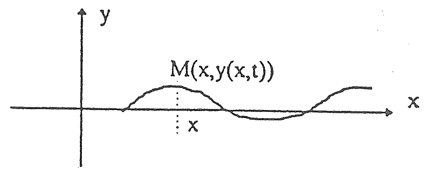

Figure 2

On considère (fig. 2) une corde vibrante de masse linéique μ, sans élasticité et sans torsion, se déformant faiblement au voisinage d'un axe Ox : à l'ordre d'approximation considéré, le point M qui a pour coordonnées $(x, 0)$ au repos passe au point de coordonnées $(x, y(x, t))$; le déplacement $y(x, t)$ est un infiniment petit d'ordre un ainsi que l'angle $\alpha(x, t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}$ que fait la corde au point d'abscisse x avec l'axe Ox.

Si on coupe fictivement la corde au point d'abscisse x (fig. 3), la partie droite de la corde exerce sur la partie gauche une force $T(x)$ tangente à la corde et la partie gauche exerce sur la partie droite la force opposée $-T(x)$.

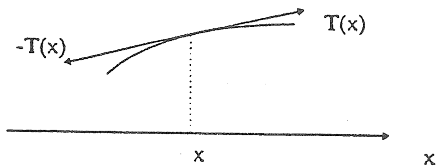

Figure 3

On ne tient pas compte de la pesanteur.

A.2.*b*.1. En exploitant le principe fondamental de la dynamique pour un élément de corde compris entre les abscisses x et $x + dx$, montrer que $T_x(x)$ est indépendante de x (on note sa valeur constante T) et que $y(x, t)$ est solution d'une équation de propagation de d'Alembert de la forme $c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ où c est une constante à exprimer en fonction de T et μ.

A.2.*b*.2. Donner, ***sans démonstration***, la forme générale des solutions de cette équation. Définir la notion d'onde ***progressive*** et donner dans ce cas la signification physique de c.

A.2.*b*.3. Proposer des valeurs numériques réalistes pour T et μ et calculer un ordre de grandeur de c.

A.2.*c*. **Modes propres.**

Dans cette question, la corde est fixée à ses deux extrémités $x = 0$ et $x = L$. Elle n'est soumise à aucune excitation aux dates positives, mais on lui donne une forme $y(x, t = 0)$ à la date 0 et on l'abandonne sans vitesse initiale, c'est-à-dire que $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0$.

A.2.*c*.1. On cherche une solution du type *mode propre,* c'est-à-dire de la forme $y(x, t) = f(x)\cdot\cos(\omega t)$.

Montrer que $f(x)$ est de la forme $A \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$ et que les seules pulsations possibles sont de la forme $\omega_n = n\cdot\omega_1$ avec n entier; exprimer la pulsation ω_1 du mode fondamental en fonction de L et c.

Quel lien peut-on faire avec la notion de mode propre pour des oscillateurs couplés ?

A.2.*c*.2. Écrire une superposition quelconque de modes propres à la date $t = 0$ et vérifier que l'expression de $y(x, t)$ prend la forme d'une série de Fourier en x de période 2L et impaire.

Si on suppose par exemple que $y(x, 0) = 4b\sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, déterminer $y(x, t)$.

Plus généralement pour $y(x, 0)$ quelconque, comment construit-on $y(x, t)$ à partir des modes propres? Comment expliquez-vous que le mode fondamental domine assez rapidement les harmoniques ?

A.2.*d*. **Ondes stationnaires — Résonance.**

Dans cette question, la corde est fixée à l'extrémité $x = L$ et on impose avec un vibreur un déplacement sinusoïdal $y(0, t) = b\cos(\omega t)$ à l'extrémité $x = 0$. On cherche en régime sinusoïdal forcé des solutions du type *ondes stationnaires,* c'est-à-dire de la forme $y(x, t) = f(x)\cdot\cos(\omega t)$.

A.2.*d*.1. Comparer brièvement les ondes progressives et les ondes stationnaires.

A.2.*d*.2. On suppose d'abord que $\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \neq 0$.

Écrire l'équation différentielle dont est solution $f(x)$ et les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$; en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de ω, c, b, L et x.

Définir la notion de nœud et de ventre de vibration; quelle est la distance entre deux nœuds successifs ? Le point d'abscisse $x = 0$ est-il un nœud ?

Montrer que ces solutions sont aussi la superposition de deux ondes planes progressives et interpréter concrètement.

A.2.*d*.3. Montrer que pour certaines valeurs particulières de la pulsation qu'on précisera, il y a *résonance.* Justifier qu'alors on peut considérer que l'extrémité $x = 0$ est un nœud de vibration.

Comparer les pulsations de résonance aux pulsations des modes propres et commenter en liaison avec A.1.*a*. et A.1.*b*.

Quelle est l'amplitude des ventres à la résonance ? Indiquer brièvement comment il faut améliorer le modèle pour interpréter de manière plus réaliste l'expérience de la corde de Melde.

A.E.90 PARTIE 5 : ONDES ACOUSTIQUES

5.1. *Approximation acoustique.*

5.1.1. On considère un fluide, isotrope, non visqueux, (dont l'équation d'état thermodynamique est supposée connue), qui, au repos dans un référentiel galiléen, est caractérisé par les champs uniformes ci-dessous :

- le champ vectoriel des vitesses macroscopiques des « particules » fluides, nul au repos, soit $\vec{v}_0 = \vec{0}$;
- les champs scalaires de pression, de masse volumique, de température, notés respectivement P_0, μ_0, T_0.

Lors de la perturbation acoustique, on notera

$$\vec{v}(\vec{r}, t), \quad P(\vec{r}, t), \quad \mu(\vec{r}, t), \quad T(\vec{r}, t)$$

les champs variables spatio-temporellement. De plus :

- lors de la perturbation acoustique, seules les forces de pression interviennent, à l'exclusion de toutes autres;
- la perturbation est thermodynamiquement assimilable à une transformation isentropique, avec un coefficient de compressibilité χ.

Écrire l'équation d'Euler, la relation de continuité (conservation de la masse) et la relation de définition de χ.

5.1.2. Procéder à la linéarisation des équations précédentes dans le cadre de « l'approximation acoustique », celui des petits mouvements au voisinage du repos.

On posera :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1, \qquad P = P_0 + p_1, \qquad \mu = \mu_0 + \mu_1.$$

En déduire les équations différentielles fournissant $\vec{v}_1(\vec{r}, t)$, $p_1(\vec{r}, t)$, $\mu_1(\vec{r}, t)$.

Exprimer la vitesse du son dans le fluide en fonction des données.

5.1.3. Exercice : *vitesse du son dans l'air.*

L'air est assimilé à un gaz parfait diatomique de rapport γ indépendant de T, de masse molaire M.

La constante des gaz parfaits est notée R.

Fournir l'expression littérale de la vitesse c_0 du son dans l'air à la température T_0.

Application numérique.

Calculer c_0 à 0 °C (les autres valeurs numériques sont supposées connues des candidats).

5.2. *Ondes acoustiques planes.*

5.2.1. Soit une onde acoustique plane indépendante de y et z.

Démontrer qu'elle est longitudinale.

Écrire la forme générale de $p_1(\vec{r}, t)$.

En déduire $\vec{v}_1(\vec{r}, t)$, et $\mu_1(\vec{r}, t)$.

5.2.2. Exercice : *aspect énergétique de l'onde acoustique plane progressive harmonique* ω. *Niveau sonore et « conversation ».*

Rappeler les expressions de l'énergie cinétique volumique e_c, attachée à l'onde acoustique, plane, progressive, harmonique ω, ainsi que l'énergie potentielle élastique volumique, e_p, liée à la surpression vibratoire acoustique.

Rappeler la définition de l'intensité sonore I de l'onde acoustique (mesurée en $W \cdot m^{-2}$).

Le niveau sonore est défini en *décibels* (dB) par :

$$N = 10 \log_{10}(I / I_0) \quad \text{avec } I_0 = 10^{-12}\ W \cdot m^{-2}.$$

Quelle est l'amplitude de la surpression acoustique d'une telle onde au niveau du tympan d'une oreille qui perçoit un son de « hauteur » 2 kHz dans une conversation de 50 dB de niveau ?

On donne $\mu_0 = 1{,}2\ kg \cdot m^{-3}$ et $c_0 = 340\ m \cdot s^{-1}$.

Calculer enfin, numériquement, l'amplitude ξ_{1m} du déplacement acoustique.