Agrégation Interne Physique-Chimie **2012-2013**

Mécanique – Problèmes d'agreg interne

- Agreg interne 1996 :
  - A.I Dynamique dans un référentiel galiléen
  - A.II Dynamique dans un référentiel non galiléen

- Agreg interne 1998 :
  - 6. Oscillateurs couplés
  - 8. Résonance d'un système d'oscillateurs couplés.

Agreg interne 1996 :

A.I. Dynamique dans un référentiel galiléen.

A.I.1.*a.* Énoncer la deuxième loi de Newton ou loi fondamentale de la dynamique du point matériel.

b. Préciser en quelques lignes les concepts de force, de masse, de quantité de mouvement et de référentiel galiléen.

c. Quelles sont les limites de validité de la deuxième loi de Newton ? Illustrer chaque limite par un exemple.

A.I.2.*a.* Établir, à partir de la loi fondamentale, le théorème de l'énergie cinétique $\mathscr{E}_k$ pour un point matériel.

b. Quand dit-on qu'une force dérive d'une énergie potentielle ? Quelle est l'énergie potentielle $\mathscr{E}_p$ associée à une force de la forme $\vec{F} = (K/r^2)\,\vec{e_r}$, K étant une constante, r la norme du vecteur position $\vec{r}$ et $\vec{e_r}$ le vecteur unitaire défini par $\vec{r}/r$.

c. Montrer que le théorème de l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme :

$$\Delta(\mathscr{E}_k + \mathscr{E}_p) = W_{nc}$$

où W_{nc} est le travail des forces qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle.

A.I.3. Application au calcul de la vitesse des électrons à la sortie d'un canon de microscope électronique : un électron est émis, sans vitesse initiale, par une cathode chauffée puis accéléré par une anode portée au potentiel d'accélération V_a par rapport à la cathode (fig. 1).

a. À l'aide de l'énergie, trouver la vitesse v de l'électron à la sortie de l'anode.

b. Représenter $\beta^2 = v^2/c^2$ en fonction de V_a. Calculer β pour $V_a = 5$ kV.

c. Calculer β pour $V_a = 1$ MV. Commenter.

A.I.4. Application au mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique : un proton de masse m_p est soumis à une seule force imposée par un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$. Sa vitesse initiale $\vec{v_0}$ fait l'angle α_0 avec le champ (fig. 2).

a. Écrire, sous forme vectorielle, la loi fondamentale de la dynamique dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Montrer que la norme de la vitesse reste égale à v_0.

On introduit la pulsation cyclotron $\omega_c = eB/m_p$ du proton dans le champ. On adopte une origine O et trois axes formant une base orthonormée directe tels que : O coïncide avec la position du proton à l'instant pris comme origine, le champ s'écrive $\vec{B} = B\vec{e_z}$, B étant la norme du vecteur champ et $\vec{e_z}$ le vecteur unitaire porté par l'axe Oz, et enfin que $\vec{v_0}$ soit contenu dans le plan Ozx.

b. Trouver les trois équations différentielles du mouvement.

c. Quel est le mouvement de la projection de l'électron sur la direction de $\vec{B}$? Quelle est la trajectoire de sa projection dans un plan perpendiculaire à cette direction ?

d. Exprimer, à l'aide de v_0 et ω_c, les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

A.II. **Dynamique dans un référentiel non galiléen.**

A.II.1. Exprimer la loi fondamentale de la dynamique du point matériel dans un référentiel non galiléen ; forces d'inertie.

A.II.2. Microgravité dans une cabine spatiale : dans le référentiel R^* associé à une cabine spatiale, en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen, on s'intéresse au mouvement d'un corps assimilé à un point matériel A, de masse m, soumis à aucune action de contact (fig. 3).

a. En désignant par $m^*\vec{\mathcal{G}}(\mathrm{A})$ la force de gravitation à laquelle est soumis A, m^* étant la masse de gravitation et $\vec{\mathcal{G}}(\mathrm{A})$ le champ de gravitation en A, écrire la loi fondamentale de la dynamique dans R^* ; on y désignera par $\vec{a}_\mathrm{A}$ l'accélération de A.

b. Appliquer, par rapport à un référentiel galiléen, la loi fondamentale de la dynamique à la cabine spatiale, assimilée à son centre de masse C, doté de sa masse totale M ; on désigne par $\mathrm{M}^*\vec{\mathcal{G}}(\mathrm{C})$ la force de gravitation qui s'exerce sur C. En déduire la relation suivante :

$$\vec{a}_\mathrm{A} = \left(\frac{m^*}{m}\right)\vec{\mathcal{G}}(\mathrm{A}) - \left(\frac{\mathrm{M}^*}{\mathrm{M}}\right)\vec{\mathcal{G}}(\mathrm{C}).$$

c. En fait $\vec{\mathcal{G}}(\mathrm{A}) \simeq \vec{\mathcal{G}}(\mathrm{C})$ avec une excellente précision. On constate expérimentalement que, dans la cabine spatiale, ne règne qu'une microgravité, c'est-à-dire que $\vec{a}_\mathrm{A} \simeq 0$. Quelle conclusion fondamentale en tire-t-on sur le rapport des masses grave et inerte ?

A.II.3. Pesanteur.

a. Donner la définition expérimentale du poids $\vec{\mathrm{P}}$ d'un corps en un point de la surface de la Terre. Qu'appelle-t-on verticale du lieu ?

b. On désigne par $m\vec{\mathcal{G}}$ la force de gravitation à laquelle il est soumis de la part de la Terre et de tous les autres astres. Appliquer, sous forme vectorielle, la loi fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre, non galiléen, à un point matériel A suspendu à l'extrémité inférieure d'un fil mince sans raideur.

c. Établir la relation suivante entre le poids $\vec{\mathrm{P}}$, la force de gravitation $m\vec{\mathcal{G}}$ et la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{\mathrm{P}} = m\vec{\mathcal{G}} - m\vec{a}_e .$$

En déduire la relation entre le champ de pesanteur $\vec{g}$, le champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}$ et le champ $\vec{a}_e$ des forces d'inertie d'entraînement.

d. Quel est le terme, dans l'expression de la loi fondamentale de la dynamique dans un référentiel terrestre, qui permet d'expliquer le comportement du pendule de Foucault ? Interpréter qualitativement le comportement du pendule au pôle Nord.

A.II.4. Application à la déviation de particules dans l'hémisphère Nord : on considère une particule astreinte par des forces de contact verticales à un mouvement dans un plan horizontal Oxy. Elle n'est soumise qu'à la pesanteur et à la réaction du support.

a. Montrer que, dans le référentiel terrestre, son mouvement satisfait à l'équation vectorielle :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\, m\,\vec{\Omega}_v \wedge \vec{v}$$

$\vec{\Omega}_v$ étant une vitesse angulaire que l'on reliera à la vitesse de rotation de la Terre Ω autour de son axe Sud-Nord et à la latitude λ du lieu.

b. Trouver la nature de la trajectoire ; on comparera ce mouvement à celui d'une particule chargée dans un champ magnétique. Au bout de quelle durée la particule passera-t-elle par le même point ? Application numérique en un lieu où $\lambda = 43{,}6°$.

A.II.5. Champ de pesanteur apparent : on fait tourner un récipient rempli d'eau autour d'un axe vertical, avec une vitesse angulaire ω constante par rapport au référentiel terrestre R.

a. En écrivant la loi fondamentale de la dynamique dans le référentiel tournant R' pour un élément A de fluide, montrer que, dans la situation d'équilibre relatif, le champ de pesanteur $\vec{g}$ peut être remplacé par un champ apparent $\vec{g}_a$ que l'on exprimera en fonction de $\vec{g}$, ω et du vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{HA}}$, H étant la projection de A sur l'axe de rotation.

b. Citer une application en instrumentation optique qui s'appuie sur le résultat précédent.

Agreg interne 1998 :

6 Oscillateurs couplés

<u>Questions de cours (PC, PC*)</u>

On considère le système de deux oscillateurs couplés représentés sur la figure 2

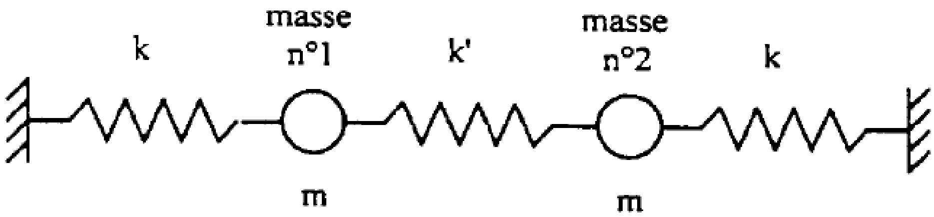

Figure 2

Les solides en translation sont identiques, de masse m, reliés par trois ressorts de masse négligeable, de longueur à vide l_0, de raideurs respectives k, k', k (voir figure 2). Ils se déplacent sur l'axe commun des trois ressorts et ne sont soumis qu'à l'action des ressorts. Les murs droite et gauche sont fixes galiléens.

6 a) Combien y a-t-il de degrés de liberté de vibration ?

6 b) Qu'appelle-t-on modes propres et pulsations propres de vibration ?

6 c) Combien y a-t-il de modes propres et comment les générer en pratique dans le cas ci-dessus ?

6 d) Quelles sont les pulsations propres correspondant au mode propre symétrique et au mode propre antisymétrique ?

6 e) Notant $u_1(t)$ et $u_2(t)$ les écarts à leurs positions d'équilibre des deux masses m, établir alors les expressions précises de u_1 et u_2 dans le cas d'excitation initiale :

$$u_{10} = a,\ u_{20} = 0,\ (du_1/dt)_0 = (du_2/dt)_0 = 0.$$

6 f) On suppose de plus dans le dernier cas (celui de la question 6 e)) que $k' \ll k$.
Représenter l'allure dans ces conditions de $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
Comment s'appelle ce phénomène ?

6 g) Examiner la pertinence du cas asymptotique $k'/k = 0$.

6 h) Que dire du cas asymptotique $k'/k \rightarrow +\infty$?

6 h) Dessiner le schéma électrique analogue au schéma mécanique de la figure 2 et calculer les périodes propres de ces circuits électriques couplés.

8 Résonances d'un système d'oscillateurs couplés

Questions de cours (PC, PC*)

On reprend le dispositif de la figure 2, mais on suppose de plus qu'une action extérieure produit sur la masse de gauche n°1 une force supplémentaire longitudinale $F_0 \cos \omega t$.
On s'intéresse au régime sinusoïdal permanent en $u_1(t)$, $u_2(t)$ (définis en 6 e)).

8 a) Tracer les graphes des amplitudes U_{1m} et U_{2m} de $u_1(t)$ et $u_2(t)$ en fonction de ω.

8 b) Préciser les fréquences de résonance et d'antirésonance.

8 c) Voyez vous des avantages pratiques à l'antirésonance ?

8 d) Comment se modifient les courbes du 8 a) si l'on tient compte de faibles frottements visque linéaires en vitesse.