Agrégation Interne Physique-Chimie **2012-2013**

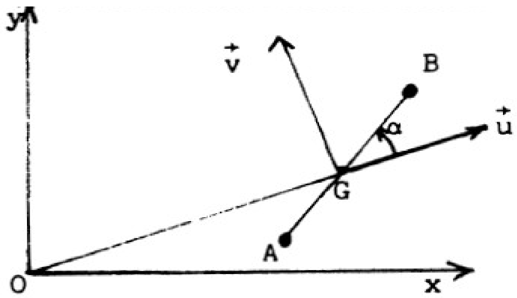
Mécanique – Exercices et problème

- Limite de Roche d'un satellite
- Satellite haltère
- Boule homogène sur un plan incliné
- Barre conductrice dans un champ magnétique
- Problème : Planètes extra-solaires

Limite de Roche d'un satellite – On assimile le satellite à une boule homogène de rayon *R*, de masse *m*, dont la cohésion est due à son propre champ de gravitation. Il est en orbite circulaire de rayon r_0 autour de la Terre. Montrer qu'en dessous d'une certaine valeur de r_0, le satellite se désagrège.

Satellite haltère – La terre est supposée constituée de couches concentriques homogènes de centre *O*. On envisage un satellite dont le centre d'inertie G décrit une trajectoire circulaire de rayon *r* dans le plan *xOy*, à la vitesse angulaire ω. Il est constitué de deux masses ponctuelles *m* identiques en *A* et *B*, reliées par une tige rigide *AB* de masse négligeable ($AB = 2L$).

Etudier le mouvement du satellite.
On pose $\alpha = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.

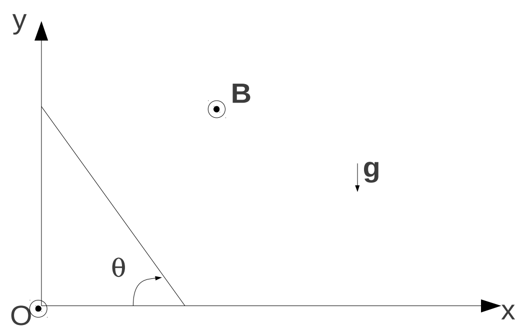


Boule homogène sur un plan incliné – Soit une boule homogène de masse m, de rayon R qui roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Déterminer l'équation de son mouvement par <u>deux méthodes</u>.

Barre conductrice dans un champ magnétique –
On considère le système suivant où les axes sont parfaitement conducteurs, la barre, de longueur *2l*, a une résistance R et glisse sans frottement sur les deux axes.

Etablir l'équation du mouvement de la barre.

Les forces électromagnétiques permettent-elles de stopper la chute de la barre?

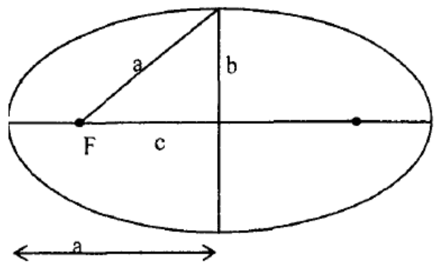


Agrégation Interne Physique-Chimie **2012-2013**

Problème – Les planètes extra-solaires – Depuis la découverte, en 1995, de la première planète extra - solaire autour d'une étoile très analogue à notre Soleil, Pégase 51, les détections se sont multipliées pour atteindre maintenant plus d'une centaine d'objets, de propriétés très diverses.

Données numériques :

- unité astronomique : 1 ua = $1{,}5.10^{11}$ m
- vitesse de la lumière : c = $3{,}0.10^{8}$ ms^{-1}
- constante de gravitation : G = $6{,}7.10^{-11}$ $Nm^2 kg^{-2}$
- constante de Stefan : $\sigma = 5{,}7.10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}
- masse du Soleil : $M_S = 2{,}0.10^{30}$kg
- rayon du Soleil : $R_S = 7{,}0.10^{8}$ m
- masse de la Terre : $M_T = 6{,}0.10^{24}$ kg
- masse de Jupiter : $M_J = 2{,}0.10^{27}$ kg
- période de Jupiter : P_J = 12 ans



En coordonnées polaires avec origine au foyer, l'équation d'une ellipse peut se mettre sous la forme: r $r=\dfrac{p}{1+\cos(\theta)}$ où p est le paramètre de l'ellipse et e son excentricité.

On a les relations suivantes : $a^2=b^2+c^2$ $e=\dfrac{c}{a}$ $p=\dfrac{b^2}{a}$. L'aire de l'ellipse est : $S=\pi a b$.

Rappels de cinématique : $\vec{a}=\dfrac{-C^2}{r^2}\left(\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{1}{r}\right)+\left(\dfrac{1}{r}\right)\right)\vec{u}_r$, où C est la constante des aires.

1. Interaction gravitationnelle à deux corps

On considère un système isolé constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2, de centre de masse G, repérés par les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$; O étant une origine fixe de l'espace. On note : $\vec{r}_1=\overrightarrow{GM_1}$ et $\vec{r}_2=\overrightarrow{GM_2}$

Les deux points matériels sont en interaction ; on désigne par $E_p(r)$ l'énergie potentielle d'interaction correspondante, en notant : $r=\|\vec{r}\|=\|\vec{r}_2-\vec{r}_1\|$.

1.1 Mouvement dans un potentiel central

Donner les équations différentielles donnant accès au mouvement des deux masses.

Montrer qu'il est possible de découpler ces deux équations de telle sorte que l'une traduise une loi de conservation que l'on précisera et que l'autre soit l'équation du mouvement d'un point particulier dont on précisera les caractéristiques. Connaissant les conditions initiales du mouvement, montrer que la détermination de $\vec{r}(t)$ permet de connaître les positions de M_1 et M_2 à tout instant.

1.2 Première et deuxième lois de Kepler

Soit la grandeur $\vec{C}=\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$ où $\dot{\vec{r}}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ et où le symbole $\times$ désigne le produit vectoriel.

Vérifier que cette grandeur est constante. On notera $C=\|\vec{C}\|$ la constante des aires. A quelle loi de conservation est associée cette constante ? Quelles sont les conséquences géométriques et horaires sur le vecteur $\vec{r}(t)$?

1.3 Cas particulier du potentiel gravitationnel

On se place désormais dans le cadre d'un potentiel de gravitation ; par ailleurs, on se limite à des états liés. Etablir que la trajectoire $\vec{r}(t)$ est une ellipse et préciser le lien entre le paramètre de l'ellipse p, la constante des aires C et les paramètres physiques du problème.
Quelle relation lie l'aire de l'ellipse et la période P du mouvement ? En déduire la relation liant la période P du mouvement au demi - grand axe a de l'ellipse, connue sous le nom de troisième loi de Kepler.

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G\,(m_1 + m_2)}{4\,\pi^2}$$

1.4 Cas des orbites circulaires

Dans le cas simplifié où la courbe $\vec{r}(t)$ est un cercle, établir les caractéristiques (rayon et vitesse) des trajectoires des deux points M_1 et M_2 dans le référentiel barycentrique. Les résultats seront exprimés en fonction des masses m_1 et m_2 et de la période P du mouvement. Faire un schéma représentant les deux points à un instant donné, le centre de masse, les trajectoires et les vecteurs vitesse.

1.5 Applications numériques

Pour les deux couples (Soleil, Terre) et (Soleil, Jupiter), et dans l'hypothèse de trajectoires circulaires, donner les valeurs des rayons des trajectoires et des vitesses dans leur référentiel barycentrique.

2. Détection des planètes extra - solaires par observation directe

2.1 Définition et valeur du parsec

On appelle parsec (symbole pc) la distance d à laquelle le rayon moyen de l'orbite terrestre autour du Soleil a (appelé unité astronomique, symbole ua) est vu sous un angle θ de 1 seconde d'arc. Exprimer d en fonction de a et θ. Quelle approximation est-il raisonnable de faire ? En déduire la valeur du parsec en mètres et en ua.

2.2 Séparation angulaire entre l'étoile et sa planète

On considère une planète située à la distance a de son étoile. Quelle est la séparation angulaire θ entre les deux objets pour un observateur situé à la distance D du système telle que $D >> a$? Calculer et exprimer en secondes d'arc la valeur de θ pour un système de type Soleil - Terre (a = 1 ua) puis pour un système de type Soleil - Jupiter (a = 5 ua), situés l'un et l'autre à D = 10 pc de l'observateur.

2.3 Puissance rayonnée par l'étoile

L'étoile, assimilée à une sphère de rayon R^*, rayonne comme un corps noir de température T^*. Exprimer la puissance L^* qu'elle émet (on note σ la constante de Stefan).

2.4 Puissance interceptée par la planète

La planète est assimilée à une sphère de rayon R, située à la distance a de l'étoile. On suppose qu'elle intercepte la puissance émise par l'étoile comme un disque de rayon R, perpendiculaire à l'axe étoile – planète et uniformément éclairé. Quelle est la puissance L ainsi interceptée ?
Calculer la fraction L/L^* de puissance stellaire interceptée par une planète de type Jupiter (R = 0,1 R*, a = 5 ua) et par une planète de type Terre (R = 0,01 R*, a = 1 ua).

2.5 Température d'équilibre de la planète

La planète réfléchit une fraction A (appelée albédo) de la puissance incidente. On suppose qu'elle se comporte comme un corps noir de température T. Exprimer T en fonction de T^*. Pour une étoile de type solaire, T^* = 6000 K ; en prenant A = 0,3 calculer T pour une planète de type Jupiter et pour une planète de type Terre.

2.6 Maximum d'émission de la planète

Le maximum d'émission de l'étoile se situe à la longueur d'onde λ^* = 0,5 µm, quelles sont alors les longueurs d'onde du maximum d'émission d'une planète de type Jupiter et d'une planète de type Terre ?

2.7 Limitations observationnelles

Qu'appelle-t-on la résolution spatiale d'un instrument d'optique ?
Rappeler, sans démonstration, l'expression du diamètre angulaire β de la tache centrale de diffraction à l'infini d'une pupille circulaire de diamètre b, éclairée par un rayonnement de longueur d'onde λ. Pourquoi considère-t-on qu'un télescope de diamètre b a une résolution spatiale β ?

Calculer les résolutions spatiales d'un télescope de 8m de diamètre lorsqu'il opère dans le visible (λ = 0,5 µm) et lorsqu'il opère dans l'infrarouge (λ = 20 µm). A ces longueurs d'onde, un tel instrument peut-il résoudre un système de type Soleil - Jupiter, situé à 10 pc du télescope ? Qu'en est-il d'un système de type Soleil – Terre, à la même distance ?

La deuxième limitation observationnelle provient des détecteurs, qui ne permettent pas actuellement d'atteindre une dynamique (c'est à dire un rapport entre les intensités maximale et minimale détectables) supérieure à 10^4. Comparez cette limite avec le rapport des puissances rayonnées par l'étoile et par la planète. Qu'en concluez-vous sur la détectabilité directe actuelle des systèmes planétaires ? Expliquez pourquoi la détection par observation directe est plus prometteuse en infrarouge qu'en visible.

4. Détection indirecte des planètes via la vitesse de l'étoile

On suppose désormais que les planètes ont des orbites circulaires autour de leur étoile.

4.1 Vitesse orbitale de l'étoile

Exprimer la vitesse V de la planète sur son orbite en fonction de m^* et de P et en fonction de m^* et de a. Quelle relation peut-on écrire entre V, la vitesse V^* de l'étoile sur son orbite, et le rapport des masses m/m^* ? Calculer V^* pour un système de type Soleil – Jupiter ($a = 5$ ua, $m = 10^{-3}\ m^*$), puis de type Soleil – Terre ($a = 1$ ua, $m = 3.10^{-6}\ m^*$).

4.2 Vitesse longitudinale de l'étoile

On note i l'inclinaison de l'orbite de l'étoile par rapport à l'observateur, c'est à dire l'angle entre la normale à l'orbite et la direction étoile – observateur.

4.2.1 On considère un système étoile - planète vu "par la tranche" (c'est-à-dire correspondant à un angle $i = 90°$). Exprimer en fonction de V^* et P la loi de variation temporelle $U(t)$ de la vitesse longitudinale de l'étoile (c'est-à-dire de la projection de la vitesse orbitale V^* sur la direction étoile - observateur).

4.2.2 Comment suffit-il de modifier l'expression de $U(t)$ si le système est vu sous une inclinaison $i < 90°$?

4.3 Effet Doppler longitudinal

Une source émettant un signal de fréquence ν et de célérité c se déplace à la vitesse longitudinale (algébrique) U, telle que $|U| \ll c$, en direction d'un observateur. On note ν' la fréquence perçue par l'observateur.

Etablir l'expression du décalage Doppler $\Delta\nu = \nu' - \nu$, en accompagnant le calcul d'un schéma clair, où apparaîtront les positions relatives de l'observateur et de la source, ainsi que l'orientation des grandeurs algébriques utilisées.

4.4 Caractéristiques de la planète déduites par cette méthode

Le spectre d'une étoile de type solaire présente des raies de fréquences au repos bien connues si bien qu'il est possible d'en déterminer avec précision le décalage Doppler.

La masse de l'étoile étant connue par ailleurs, montrer que le suivi au cours du temps du décalage Doppler du spectre de l'étoile permet de déterminer son rayon orbital a et une *limite inférieure* de la masse de la planète. Cette méthode est-elle applicable quelle que soit l'orientation i de l'orbite par rapport à l'observateur ?