Agrégation Interne Physique-Chimie **2012-2013**

Mécanique – Problèmes d'agreg interne

- Agreg interne 2012 :
  - B.2 Observation expérimentale d'une dynamo turbulente
- Agreg interne 1997 :
  - I.2 Charges en mouvement
- Agreg interne 2009 (partie E : écoulement de Poiseuille)

Agreg interne 2012 :

B.2 Observation expérimentale d'une dynamo turbulente

Les questions de cette sous-partie se rapportent à l'article intitulé « L'expérience VKS2, observation d'une dynamo turbulente et des renversements erratiques du champ magnétique », publié en 2005 dans « Reflets de la Physique, bulletin de la Société Française de Physique » et donné en annexe 1.

B.2.2 Le nombre de Reynolds cinématique

En négligeant les effets de la pesanteur, l'équation de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide conducteur s'écrit :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P+\vec{j}\wedge\vec{B}+\eta\Delta\vec{v},$$

où ρ est la masse volumique du fluide et η sa viscosité dynamique.

49. Donner l'interprétation physique des différents termes de cette équation.

50. Le nombre de Reynolds cinématique permet de comparer l'ordre de grandeur de deux termes de cette équation. Lesquels ? Commenter alors la signification du nombre de Reynolds cinématique donné dans l'encadré situé à la fin de l'article.

51. Entre 100°C et 150°C, la viscosité dynamique et la masse volumique du sodium liquide valent approximativement : $\eta\simeq 6\ 10^{-5}$ Pa.s et $\rho\ \simeq\ 9\ 10^{2}$ kg.m^{-3}.

Évaluer l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds cinématique dans l'expérience VKS. Comparer le résultat obtenu avec celui qui est donné dans le texte.

B.2.3 Le nombre de Reynolds magnétique

52. Dans le cas d'un conducteur en mouvement, la loi d'Ohm locale s'écrit :

$$\vec{j}=\sigma(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}),$$

où σ est la conductivité électrique du fluide.

Nous admettrons que la perméabilité magnétique du sodium est la même que celle du vide.

À partir des équations de Maxwell, dans lesquelles le terme $\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ sera négligé devant $\vec{j}$, montrer que l'équation vérifiée par le champ magnétique peut s'écrire :

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}\wedge\vec{B})+\frac{1}{\mu_0\sigma}\Delta\vec{B}.$$

53. Le nombre de Reynolds magnétique compare l'ordre de grandeur de deux termes de cette équation. Lesquels ?

54. Entre 100°C et 150°C, la conductivité électrique du sodium est de l'ordre de 10^7 S.m^{-1}. Évaluer l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds magnétique dans l'expérience VKS. Comparer le résultat obtenu avec celui qui est donné dans le texte.

Agreg interne 1997 :

I.2. **Charges en mouvement.**

Supposons maintenant que l'équilibre est rompu et que les charges électriques deviennent mobiles. Il apparaît alors des courants électriques.

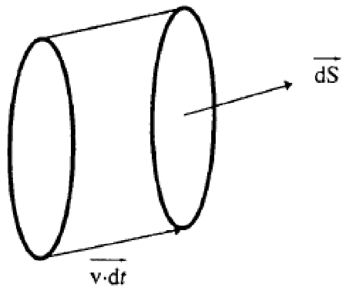


Figure 5 : *densité de courant*

I.2.1. Notion de densité de courant.

Soit un flux de particules de charges identiques q et de même vitesse $\vec{v}$. Dans le volume $d\tau$ on compte $dN = n\, d\tau$ charges ; la grandeur physique $\rho = n\,q$ représente la densité volumique de charge. On lui associe le champ de vecteurs densité de courant $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Quelle est la charge élémentaire d^2Q traversant une surface élémentaire dS pendant le temps dt (fig. 5) ?

En intégrant sur une surface finie S orientée, exprimer l'intensité I du courant en précisant son sens suivant le signe des charges mobiles.

I.2.2. Pour établir l'équation de conservation de la charge électrique reliant $\vec{j}$ à ρ, on considère une surface fermée, limitant un volume $\mathcal{V}$ contenant une charge $Q(t)$ à l'instant t. En admettant qu'il ne peut y avoir création de charge dans un système isolé, donner l'expression de $Q(t)$ puis de $Q(t + dt)$ et en déduire l'équation de conservation des charges appelée également équation de continuité :

$$\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Que devient cette relation en régime stationnaire ?

Quelle est la propriété du flux de $\vec{j}$?

I.2.3. Dans un milieu conducteur, le mouvement des charges peut être dû à un gradient de potentiel électrique empêchant l'équilibre du conducteur.

Énoncer la loi d'Ohm locale, considérée comme une loi constitutive, permettant la définition de la conductivité γ du conducteur (on se borne au terme linéaire).

Dans le cas simple d'un conducteur de section s et de longueur L en régime stationnaire, écrire la forme intégrale de la loi d'Ohm et retrouver l'expression de sa résistance R.

I.2.4. *Exercice :* théorie microscopique de la conductibilité selon Drude.

Soit un conducteur constitué d'un réseau cristallin dans lequel se déplacent des électrons sous l'action d'un champ appliqué $\vec{E}_a$ uniforme et indépendant du temps. Un élément de volume $d\tau$ renferme donc une charge mobile négative. On peut interpréter l'influence des défauts du réseau cristallin comme un frottement visqueux freinant le mouvement des charges $q_e = -e$ avec une force opposée au mouvement $\vec{f}_v = -\frac{m_e}{t_0}\vec{v}$, ($m_e$ représente la masse d'un électron).

I.2.4.1. Établir et résoudre l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse des électrons.

Mettre en évidence le régime transitoire et le régime permanent.

Quel est le rôle de t_0 ?

I.2.4.2. Écrire l'expression de la conductivité γ en fonction de la densité d'électrons n_e.
Définir la mobilité des électrons μ_e.
Application numérique : $n_e = 8,3\ 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$; $j = 10\ \mathrm{A{\cdot}mm^{-2}}$; $\gamma = 5,3\ 10^7$ S.I.
Calculer le temps t_0 et la vitesse des électrons en régime permanent.

I.2.5. *Exercice :* un exemple de la limitation de la loi d'Ohm.

On envisage un conducteur métallique assimilable à un gaz d'électrons libres de charge q_e, de densité n_e et de mobilité μ_e, placés dans un réseau d'ions fixes de densité N_0. Lorsque la concentration en porteurs de charge n'est pas uniforme, il apparaît un courant de diffusion $\vec{J}_D$ donné par la loi de Fick : $\vec{J}_D = -D\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ n_e$.

Quelle est la condition d'équilibre électrique entre les courants de diffusion et de conduction ? En appliquant une des équations de Maxwell, montrer que l'équation différentielle donnant le champ $\vec{E}$ est de la forme $\Delta\vec{E} - \frac{\vec{E}}{\lambda_D^2} = 0$, avec $\lambda_D^2 = \frac{\varepsilon_0 D}{n_e q_e^2 \mu_e}$ où λ_D représente la longueur de Debye.

Montrer que la diffusion s'oppose à l'accumulation des charges à la surface d'un métal conducteur en résolvant l'équation différentielle. Préciser la répartition du champ électrique et de la densité de charge au voisinage de la surface du métal.

Application numérique :

Sachant que le coefficient de diffusion est $D = 2\mu_e \varepsilon_F/3$, où ε_F représente l'énergie de Fermi, calculer la longueur de Debye quand $\varepsilon_F = 7$ eV et $n_e = 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$.

Agreg interne 2009 :

1 Ecoulement de Poiseuille

Pour modéliser le transfert de liquide à travers un nanotube de carbone, on considère l'écoulement, dit de Poiseuille, d'un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η à travers un cylindre de rayon R. On s'intéresse à l'écoulement stationnaire induit par une différence de pression ΔP sur une longueur L du tube. On utilise les coordonnées cylindriques r, θ, z définies par la figure 9. L'origine $(z = 0)$ de l'axe des z est notée O. On note $P(M)$ la pression au point M et on pose $P(z=0) - P(z=L) = \Delta P$. On cherche le champ des vitesses du fluide sous la forme $\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_z$. On néglige les effets de la pesanteur.

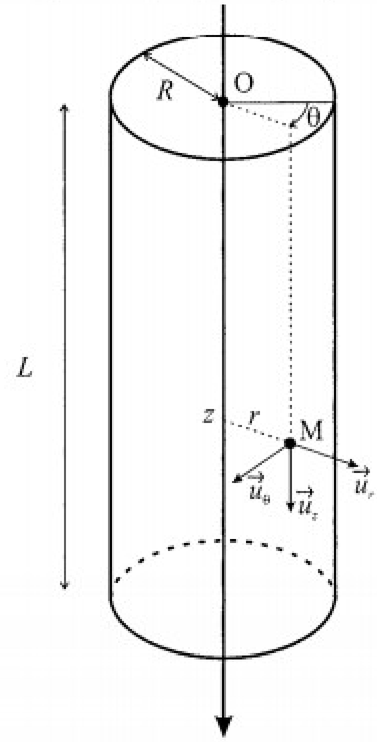
[1]J.K. Holt et al., *Fast mass transport through Sub-2-Nanometer carbon nanotubes*, Science, **312**, 1034 (2006).

On rappelle l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques :

$$\text{si} \qquad \vec{A} = A_r\vec{u}_r + A_\theta\vec{u}_\theta + A_z\vec{u}_z$$

$$\text{alors} \qquad \mathrm{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

1. Ecrire l'équation locale traduisant la conservation de la masse.
   Montrer que dans le cas où le fluide peut être considéré comme incompressible, elle se ramène à :
   $$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$
   Un champ de vitesse de la forme $v(r)\vec{u}_z$ vérifie-t-il cette équation ?
   A quelle condition peut-on considérer le fluide comme incompressible ? Dans la suite, on supposera cette condition réalisée.

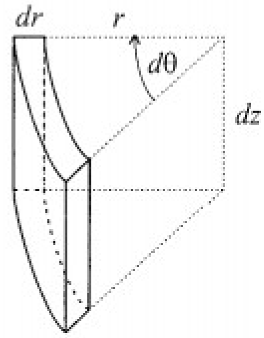


- *Figure 9* -

On considère l'élément de fluide représenté figure 10. On rappelle que la force de viscosité exercée sur cet élément par le fluide situé entre 0 et r s'écrit :

$$d^2\overrightarrow{F} = -\eta \frac{dv}{dr}\, r d\theta dz\, u_z$$

2. Quelle est l'origine microscopique de la force de viscosité ?



- *Figure* 10 -

3. Calculer la résultante des forces de viscosité qui s'exercent sur l'élément de fluide de la figure 10 et montrer que la densité volumique de force de viscosité s'écrit :

$$\frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\vec{u}_z$$

L'équation, dite de Navier-Stokes, qui régit le champ des vitesses du fluide en régime stationnaire et en géométrie cylindrique s'écrit :

$$\rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = -\overrightarrow{grad}\,P + \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\vec{u}_z$$

4. Interpréter chacun des termes de cette équation.
5. Montrer que le terme $\rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}$ est nul dans la géométrie considérée.
   Déduire de l'équation de Navier-Stokes que P ne dépend que de z et montrer que le gradient de pression est indépendant de z. En déduire :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta P}{L}$$

   Comment varie la pression dans le tube ?
6. En utilisant les conditions aux limites au centre et sur le bord du tube, montrer que :

$$v(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L}(r^2 - R^2)$$

   Représenter schématiquement le profil de vitesse dans le tube.
   Montrer que le débit volumique de l'écoulement est donné par :

$$D = \frac{\Delta P}{8\eta L}\pi R^4$$

   Quelle est la vitesse moyenne $\bar{v}$ d'une particule de fluide ?